

Federigo Enriques

## IDEE SEMPRE VIVE E ATTUALI SULL'INSEGNAMENTO MATEMATICO

*Uno dei nostri cacciatori di pezzulli, ricordando che molti brani adatti si potevano trovare nella prefazione di Enriques alla Teoria geometrica delle equazioni (\*), andò a rileggersi quelle pagine. Ma era un peccato staccare singoli pezzulli, pur bellissimi e significativi anche se isolati. Meglio riprodurre tutte le parti della prefazione non strettamente legate alla funzione di prefazione e al contenuto del trattato; bastava, volendo, sottolineare con stampa in grassetto i brani che maggiormente potevano apparire significativi anche come pezzulli. Di aggiunte non c'è che i sottotitoli e qualche raccordo ove alcune parole o frasi sono state omesse per evitare riferimenti ad argomenti del trattato, che avrebbero dato un significato apparentemente limitativo ad affermazioni di validità generale.*

### 1. CENNI SUL TRATTATO

Le questioni che qui vengono studiate hanno formato oggetto d'un insegnamento, proseguito durante più anni all'Università di Bologna. Il dott. Oscar Chisini che ha raccolto dapprima quelle lezioni, ha atteso lungamente a svolgere il disegno traendone anche occasione a ricerche originali; così il suo lavoro ha costituito la trama del trattato, frutto di un'intima ed assidua collaborazione.

La geometria algebrica — ove confluiscono il metodo delle coordinate e quello delle proiezioni, tutti i diversi ordini di concetti suggeriti dallo studio delle curve — riesce ormai ad una **dottrina qualitativa** delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra e che vorremmo pur designare con questo nome, superando la significazione più ristretta che vi attribuiscono gli specialisti.

---

(\*) F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 4 voll., ed. Zanichelli, Bologna 1915-19; prefazione in Vol. I, pp. VII-XIV.

Siffatta dottrina possiede invero la sua base ugualmente negli algoritmi dell'Aritmetica e nei principi dell'Analisi infinitesimale; anzi lo studio delle singolarità, e in genere delle proprietà differenziali delle curve e delle varietà algebriche, forma un capitolo di quell'Analisi, che si maturò — com'è noto — per opera della scuola newtoniana. Ma lo sviluppo ulteriore della dottrina è dominato dalla veduta sintetica delle funzioni considerate nella loro integrità e perciò si riattacca naturalmente al campo delle variabili complesse; del pari a questa concezione d'insieme si sono andati via via conformando i metodi geometrici, elaborati durante il secolo decimonono sotto l'impulso delle idee direttive di MONGE e di PONCELET

## 2. PURISMO ED ECLETTISMO

Lo sviluppo di concetti e di metodi diversi, coltivati per lungo tempo come rami distinti del sapere matematico, la varietà dei linguaggi che riflette differenti intuizioni, tutta la immane somma degli acquisti fatti, impone grave carico allo studioso che miri oggi a far progredire in qualche maniera i problemi attinenti alla più generale considerazione dell'Algebra.

Non è più il tempo in cui possa presumersi di dominare l'intera materia con una sola veduta ad es., nel caso della geometria algebrica, mediante forme invariantive (SALMON) o principi sintetici sulle polari (CREMONA): **la nostra epoca ha superato decisamente il purismo delle scuole analitiche e geometriche, traendo da ciascuna gli istrumenti della ricerca; il ravvicinamento dei metodi che risponde al programma eclettico (Clebsch) ha segnato un reale e fecondo progresso.**

Tuttavia i criteri scientifici e didattici onde sorse l'aspirazione puristica non hanno perduto il loro valore, sebbene si esprimano oggi in modi di pensiero meno esclusivi. L'opportunità del successo euristico, che domina ogni altra considerazione, pare a non pochi una ragione di compromesso, sulla quale mal saprebbe fondarsi il trattato organico di un ramo delle Matematiche; anche perché fra i metodi sopra accennati ve ne sono alcuni che, ottimamente aiutando alla scoperta, sembrano rispondere meno bene al rigore della prova.

Presupposto di tali aspirazioni resta infine l'antico modello classico del trattato, che si riattacca alla venerabile tradizione dell'EUCLIDE l'idea di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che debba apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sé le incerte e mutevoli suggestioni del concreto, tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca o scopra nuove difficoltà, rompendo l'armonia del sistema.

Ma questo ideale del sistema contrasta colla generale filosofia della scienza, frutto della critica moderna. Infatti la critica logica e gnoseologica riesce in ultima analisi a definire il campo della logica ed a riconoscere in ciascuna teoria gli elementi intuitivi di diverso ordine che le conferiscono significato e valore; infine approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, codesta critica oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase d'un processo unico, che sale dal particolare al generale per ridiscendere al particolare.

Vi è luogo a chiedere se questo concepimento dinamico del sapere, che ognor più prende il posto del vecchio concepimento statico, non debba comporre in qualche modo anche l'antitesi tradizionale fra ricerca ed esposizione sistematica, e così fra scienza e storia della scienza. Chi accolga un tale ordine d'idee sarà naturalmente condotto ad un nuovo modo di pensare il trattato, più vicino alla realtà del progresso scientifico.

#### 4. RIGORE E GENERALITA'

Non si vuole togliere al trattato il proprio carattere letterario: esso deve rimanere esposizione — quanto è possibile perfetta — dei risultati conseguiti in un ordine di problemi, cioè resoconto e sistemazione dello stato attuale della scienza. Ma, come questo stato viene pensato qual grado di uno sviluppo, così diventa importante di esporre accanto alla verità le vie — spesso diverse — che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole

**in ogni concezione parziale delle teorie.**

Ciò non significa punto che si voglia far gettito del **rigore** matematico, che esprime la suprema esigenza di conservazione del nostro sapere; ma **al culto del rigore formale che — affettando di bandire ogni manchevolezza — talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore, vuolsi sostituire il culto sincero del rigore concepito come abito di correzione e di critica.** Da questo punto di vista acquistano speciale interesse gli errori storici, i paradossi, i sofismi, che spesso hanno segnato la via delle più importanti scoperte.

Anche l'aspirazione comune alla generalità, compare in nuova luce secondo i criteri della nostra trattatistica.

Il criterio di ricerca così splendidamente fatto valere da ABEL « **porre i problemi nell'aspetto più generale per scoprirne la vera natura** », designava l'indirizzo dell'Analisi che vuol liberare la conoscenza dei rapporti qualitativi dalle complicazioni accidentali dei calcoli, cioè appunto quell'indirizzo di cui è massima attuazione la teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.

Ma il precetto della generalità ha ricevuto altra interpretazione presso [molti] contemporanei, specialmente nel nostro paese. Si è eretto a principio di massima che ogni teorema debba enunciarsi sempre nella forma più generale di cui è suscettibile, e cioè per  $n$  variabili anziché per due o per tre, e per un qualsivoglia grado in cambio che per i primi gradi, e così di seguito.

Conviene riconoscere che **quest'abito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri, e merita di essere seriamente contrastato.** Giacché in primo luogo, **la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini, ed — in secondo luogo — crea nei giovani studiosi la lusinga delle facili generalizzazioni, puramente formali.**

La storia della scienza c'insegna che **altro è l'ideale della generalità nei grandi fattori del progresso matematico; pei quali il senso vero della conoscenza generale si commisura al particolare significativo che vi è contenuto.** Così ad ogni problema compete in qualche modo un proprio grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela

la sua vera natura; ed importa che lo studioso apprenda a riconoscere come potenzialmente data in questo la generalizzazione ulteriore.

#### 4. VISIONE DINAMICA E STORICA DELLA SCIENZA

Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia. La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza, ed ha posto nell'esposizione delle dottrine, per quanto giovi spogiarla — nella misura del possibile — da troppo ingombrante ricchezza di citazioni, che tolga la visione sintetica del progresso nelle sue grandi linee. Il richiamo al passato non si disgiunge qui dall'interesse del presente, che vi attinge solo la visione di una più larga realtà, e la vivifica ricreando la scoperta.

#### 5. VISIONE ATTIVA DELL'INSEGNAMENTO

Un'opera ideale d'insegnamento, nella pratica non può esplicarsi che per gradi, ed in parte con metodo ciclico, promovendo la partecipazione attiva degli allievi, a cui la verità non deve porgersi come qualcosa di dato, bensì come mèta da guadagnare da sé.

L'unità degli scopi balzerà fuori dalla varietà delle trattazioni, per lo studioso che ne approfondisca l'esame.

Il richiamo di un lavoro serve a designare in termini generici la scoperta di un teorema o l'introduzione di un concetto di dimostrazione; resta inteso che — anche in quest'ultimo caso — la dimostrazione viene da noi elaborata e ripensata indipendentemente dall'originale, e — dove occorra — resa completa e rigorosa.

Il vero significato di quest'ultima avvertenza si capirà facilmente ove si ricordi che qui la storia viene guadagnata

**attraverso la scienza, in servizio della scienza, e non viceversa:** anzi vogliam dire che prima abbiamo ripensato — e talora svolto — la materia con piena libertà di spirito costruttivo, poi abbiám cercato di comprenderla storicamente, rendendoci conto dell'origine delle idee. Comunque questo metodo di lavoro possa venir giudicato da altri, esso è proprio a spiegare i pregi e i difetti che per avventura possano riconoscersi al nostro trattato, ed importa perciò che sia noto al lettore: **infatti l'epoca in cui gli uomini di scienza nascondevano le tracce del proprio cammino è ormai oltrepassata; la nostra generazione considera giustamente come un dovere di render chiaro in ogni opera scientifica il sistema delle idee costruttive.**

### « Vecchio » e « nuovo »

*Ciò che deve essere ricercato è l'equilibrio fra il vecchio e il nuovo: ciò che nel primo è di vivo o lo fa attuale, e quanto nel secondo ha radici profonde che gli danno significato.*

LUIGI CAMPEDELLI (da «*Esigenze di nuove forme di sapere*», in *Nuova didattica della matematica*, Ass. Piemonte-Italia, Torino 1971: p. 97).



### Antipatia comprensibile

*...la visione di questa matematica, pura, compiuta, perfetta come una statua di Fidia, mi è francamente antipatica. Comprendo benissimo che essa possa riuscire antipatica anche a molti allievi: non è una visione di vita, è una visione di morte! (... ed anche falsa!).*

*Si dirà: «Ma questa è cosa che non si può insegnare ad allievi delle scuole secondarie. E si cerchi che l'insegnamento semini piuttosto la certezza che il dubbio: benedetta l'esistenza di almeno una materia, la matematica, con la quale si possono ancor oggi inculcare delle certezze!».* — *La mia risposta è: «E' senza dubbio difficile insegnare la matematica come scienza che presenta anch'essa una sua problematica, sia pure sui generis. Ma innumerevoli esperienze dimostrano che ciò non è impossibile, anche ai bassi livelli».*

TULLIO VIOLA (da «*Il valore della nuova didattica della matematica nell'educazione dei giovani*», in «*Nuova didattica della matematica*», Ass. Piemonte-Italia, Torino 1971: pp. 89-90).