Sui fondamenti della teoria della misura in uno spazio cartesiano a tre o più dimensioni

1. La scelta d'un qualunque sistema d'ascisse su di una retta, permette d'associare, ad ogni segmento della retta stessa, un numero positivo che chiamasi « *lunghezza* » del segmento e che non varia se si sposta comunque, sulla retta, l'origine delle ascisse ed anche se si inverte l'orientamento della retta, purchè si mantenga invariata l'unità di misura delle lunghezze. Questa proprietà, com'è noto, è una conseguenza immediata, elementarissima dei postulati fondamentali della geometria. Ed è anche noto che i sistemi di detti postulati, come sono stati enunciati per es. dall'HILBERT, o dal VERONESE, o dal PEANO [1], sono sufficienti per sviluppare il concetto dell'uguaglianza e quello dell'equivalenza, in uno spazio cartesiano S_n ad un numero qualunque n di dimensioni.

Tutti i moderni trattati di geometria elementare espongono la teoria dell'equivalenza e quindi anche quella della misura delle grandezze, sia per le figure piane che per quelle dello spazio tridimensionale, a partire dall'equidecomponibilità e, così facendo, incorrono in complicazioni che mal celano un certo sforzo critico, mentre d'altro lato si trovano, a un certo punto, costretti ad abbandonare, per una ragione o per l'altra, la teoria stessa dell'equidecomponibilità. Perciò mi sono molto vivamente interessato al nuovo metodo proposto dal prof. M. PICONE, secondo cui quelle teorie possono venire direttamente e completamente svolte, sulla base d'un solo e del più elemen-

---

[1] Cfr. l'art. di P. BENEDETTI, dal titolo: *Fondamenti di Geometria*, nell'« Enciclopedia delle Matematiche Elementari », vol. II, 1 pagg. 19 e segg.

tare dei concetti fondamentali dell'analisi, cioè del concetto d'estremo (superiore ed inferiore) d'un insieme di numeri reali. E sono lieto ed onorato di portare un modesto contributo all'esposizione di questo nuovo metodo, facendo seguire alla pubblicazione della conferenza che il prof. PICONE stesso tenne nel 1945 presso l'Istituto Romano di Cultura Matematica, una dimostrazione del teorema che *l'estensione d'un parallelepipedo è sempre uguale al prodotto delle sue tre dimensioni, qualunque sia il sistema d'assi cartesiani ortogonali ai quali è fatto riferimento* (v. questo « Periodico », vol. XXV, 1947, pag. 194).

Darò le prime e più importanti conseguenze di questo teorema e mostrerò inoltre come esso possa, con tutta facilità e per via ricorrente, venire generalizzato ai domini rettangolari appartenenti ad uno spazio S_n, ad un numero comunque grande n di dimensioni.

2 Ferme restando la terminologia e le notazioni dell'articolo citato del prof. PICONE, indichiamo con F_0 una qualunque figura del piano $z=0$ e con F il « *prisma retto di base* F_0 *e d'altezza* h » ($h>0$), cioè la figura costituita da tutti i punti dello spazio, le cui coordinate x, y individuano un punto di F_0 e la cui quota z soddisfa alla doppia limitazione $0 \leq z \leq h$. Cominciamo col dimostrare il

LEMMA. - *Risulta*

$$\text{est}\, F = h \cdot \text{est}\, F_0 \text{ (2)}.$$

Dim. - *a*) Sia D_0 un qualunque dominio plurirettangolare del piano $z=0$, ricoprente la figura F_0. Il prisma retto di base D_0 e d'altezza $h+\delta$, ove δ è un numero positivo arbitrario, è un certo dominio plurirettangolare D, ricoprente la figura F, per cui

$$\text{est}\, F \leq \sigma(D).$$

Ma

$$\sigma(D) = (h+\delta)\sigma(D_0), \quad \text{mentre} \quad \text{est}\, F_0 = \text{estr. inf. di } \{\sigma(D_0)\}.$$

Dunque

$$\text{est}\, F \leq h \cdot \text{est}\, F_0 .$$

---

(2) Senza incorrere in equivoco, intendiamo sempre, relativamente a una qualunque figura piana F_0, che il simbolo est F_0 rappresenti l'*estensione piana* di F_0. Analoga convenzione dovrà sottintendersi, fra poco, per il simbolo $\sigma(D_0)$, ecc.

b) Sia D un qualunque dominio plurirettangolare ricoprente la figura F. Sezioniamo D con un generico piano di equaz. $z = c$ (costante compresa fra 0 ed h) e proiettiamo la sezione, così ottenuta, ortogonalmente sul piano $z = 0$. Al variare di c da 0 ad h, queste corrispondenti proiezioni hanno in comune un certo dominio plurirettangolare D_0 del piano $z = 0$, ricoprente F_0, per cui

$$\sigma(D_0) \geq \text{est}\, F_0 .$$

Ma è $\sigma(D) > h \cdot \sigma(D_0)$, dunque $\sigma(D) > h \cdot \text{est}\, F_0$ e perciò anche

$$\text{est}\, F \geq h \cdot \text{est}\, F_0 .$$

Confrontando con la limitazione sopra trovata, si ha l'enunciato.

3. Ci sembrerà più semplice ed espressivo dimostrare la proposizione fondamentale enunciata al n. 1, sotto la forma equivalente: *l'estensione d'un dominio rettangolare* F *dello spazio è sempre uguale al prodotto delle sue tre dimensioni, qualunque sia il movimento che si pensi d'imprimere al dominio stesso.* Sia F' il parallelepipedo nel quale F viene a portarsi, per effetto del movimento. Osserviamo anzitutto che, se il movimento considerato consiste in una semplice traslazione, la dimostrazione è del tutto immediata, in quanto ogni dominio plurirettangolare ricoprente F, si trasforma, per effetto del movimento, in un dominio plurirettangolare uguale e d'uguale estensione, ricoprente F' e inversamente. Onde senz'altro est $F = \text{est}\, F'$.

Possiamo dunque supporre che F abbia un vertice nell'origine e che tale vertice si mantenga fisso durante il movimento. F sia individuato dalle tre limitazioni

$$0 \leq x \leq l_1 , \qquad 0 \leq y \leq l_2 , \qquad 0 \leq z \leq l_3 ,$$

onde, per definizione, sarà

$$\text{est}\, F = l_1 l_2 l_3 .$$

Se il movimento è una rotazione intorno ad uno degli assi cartesiani di riferimento, per es. intorno all'asse z, la dimostrazione del teor. è immediata. Infatti, indicando con F_0 e con F_0' le facce rispettivamente di F e di F' nel piano $z=0$, si ha (n. 17 dell'art. cit.)

$$\text{est}\, F_0' = \text{est}\, F_0 = l_1 l_2 .$$

Considerando dunque F' come un prisma retto di base F_0' e d'altezza l_3, risulta, in virtù del lemma dimostrato (n. 2),

$$\text{est}\, F' = l_3 \cdot \text{est}\, F_0' = l_1 l_2 l_3 .$$

Se infine il movimento considerato non è una rotazione intorno ad uno degli assi cartesiani, indicando ancora con F_0 la faccia $z=0$ di F, con F_0' la faccia omologa di F_0 (cioè la posizione in cui F_0 viene a portarsi, per effetto del movimento), si può osservare che i piani delle due facce F_0, F_0' s'intersecano certamente e che la loro retta r d'intersezione passa per l'origine. Diamo ad F una rotazione intorno al terzo spigolo (spigolo d'equazioni $x=y=0$), che porti il primo spigolo ($y=z=0$) a sovrapporsi alla retta r, e diamo analogamente ad F' una rotazione intorno all'omologo del terzo spigolo, che porti l'omologo del primo spigolo a sovrapporsi alla retta r.

Siano $\overline{F}$ ed $\overline{F}'$ le posizioni in cui vengono a portarsi rispettivamente F ed F', per effetto dell'uno e dell'altro movimento. Si riconosce che $\overline{F}$ ed $\overline{F}'$ hanno uno spigolo in comune, sovrapposto alla retta r, onde $\overline{F}$ ed $\overline{F}'$ potranno ottenersi l'uno dall'altro, con una rotazione intorno a tale spigolo comune.

Si avrà dunque, per quanto poco sopra dimostrato,

$$\text{est}\, F' = \text{est}\, \overline{F}' = \text{est}\, \overline{F} = \text{est}\, F = l_1 l_2 l_3 .$$

Da questo teorema fondamentale si può immediatamente dedurre:

a) con dimostrazione identica a quella data al n. 17 dell'art. cit. pag. 193, che *l'estensione d'una qualunque figura dello spazio non dipende dal sistema cartesiano di riferimento;*

b) che un qualunque prisma retto F ha estensione uguale ad $h \cdot \text{est}\, F_0$, essendo F_0 la sua base (figura piana del tutto arbitraria) ed h la sua altezza.

4. Calcolo del volume del tetraedro. Vogliamo giungere, partendo dall'ordine d'idee indicato, alla espressione

$\frac{h}{3}$ area F_0, del volume d'un qualunque tetraedro F (indicando con F_0 una qualunque delle quattro facce, con h l'altezza relativa).

a) Supponiamo dapprima che *la faccia* F_0 *giaccia nel piano* $\mathrm{z}=0$ *ed abbia un vertice nell'origine, mentre il vertice opposto* V *cada sull'asse* z *ed abbia quota* $\mathrm{h}>0$. Prefissato un intero $k>0$ arbitrario, indichiamo genericamente con F_i $(i=0,1,2,\dots,k-1)$ il triangolo che si ottiene tagliando F col piano $z=i\frac{h}{k}$. Si riconosce subito (v. la proposizione *a*) della nota alla fine dell'art. cit.) che

$$\text{area } F_i=\left(1-\frac{i}{k}\right)^2 \text{area } F_0 .$$

Il prisma retto Π_i, di base F_i e d'altezza $\frac{h}{k}$, ha volume (n. 2)

$$\text{vol } \Pi_i=\frac{h}{k}\text{ area } F_i=\frac{h}{k}\left(1-\frac{i}{k}\right)^2 \text{area } F_0,$$

mentre, essendo

$$\sum_1^{k-1}{}_i\, \Pi_i < F < \sum_0^{k-1}{}_i\, \Pi_i, \ (^3)$$

risulta

$$\text{vol} \sum_1^{k-1}{}_i\, \Pi_i = \sum_1^{k-1}{}_i \text{ vol } \Pi_i = h \text{ area } F_0 \cdot \frac{1}{k}\sum_1^{k-1}{}_i\left(1-\frac{i}{k}\right)^2 <$$

$$< \text{vol } F < \text{vol} \sum_0^{k-1}{}_i\, \Pi_i = h \text{ area } F_0 \cdot \frac{1}{k}\sum_1^{k-1}{}_i\left(1-\frac{i}{k}\right)^2 + \frac{h}{k}\text{ area } F_0 .$$

Ma, per una formula nota dall'algebra, è

$$\frac{1}{k}\sum_1^{k-1}{}_i\left(1-\frac{i}{k}\right)^2=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{6k^2}\right)$$

e si riconosce che la quantità positiva $\frac{1}{2k}-\frac{1}{6k^2}$ può rendersi arbitrariamente piccola (purchè s'assuma k sufficientemente grande) e così pure la quantità $\frac{h}{k}$ area F_0. Si è dunque nelle

(3) Con la notazione $U<V$, essendo U e V due figure qualunque, s'intende che la figura U è contenuta nella figura V.

ipotesi del n. 10 dell'art. cit. pag. 187. onde può affermarsi che

$$\text{vol } F = \text{estr. sup. (al variare di } k\text{) di : } h \text{ area } F_0 \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{6k^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{3} \text{ area } F_0, \qquad \text{c. d. d.}$$

b) Supponiamo, in secondo luogo, che *la faccia* F_0 *giaccia nel piano* $z = 0$, *ma nessuno dei suoi tre vertici cada nell'origine; il vertice opposto* V *cada ancora sull'asse* z *ed abbia quota* $h > 0$. Subordinatamente a ques'ipotesi, conviene ancora distinguere diversi sottocasi. Siano P_1, P_2, P_3 i vertici di F_0.

b_1) *L'origine O cada nell'interno di* F_0. Allora F_0 è la somma dei tre triangoli $F_0^{(1)} \equiv OP_2P_3$, $F_0^{(2)} \equiv OP_1P_3$, $F_0^{(3)} \equiv \equiv OP_1P_2$, e analogamente F è la somma dei tre tetraedri $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, aventi per facce rispettivamente $F_0^{(1)}$, $F_0^{(2)}$, $F_0^{(3)}$ e vertice opposto in comune nel punto V. Avremo dunque, per il teorema del n. 14 dell'art. cit. pag. 190 e per quanto s'è dimostrato in *a*),

$$\text{vol } F = \text{vol } F^{(1)} + \text{vol } F^{(2)} + \text{vol } F^{(3)} = \frac{h}{3}(\text{area } F_0^{(1)} +$$

$$+ \text{area } F_0^{(2)} + \text{area } F_0^{(3)}) = \frac{h}{3} \text{ area } F_0 .$$

b_2) *O cada su un lato di* F_0, per es. sul lato P_2P_3. Si ha allora

$$F_0 = F_0^{(2)} + F_0^{(3)}, \qquad F = F^{(2)} + F^{(3)}$$

e quindi

$$\text{vol } F = \text{vol } F^{(2)} + \text{vol } F^{(3)} = \frac{h}{3}(\text{area} F_0^{(2)} + \text{area } F_0^{(3)}) = \frac{h}{3} \text{area} F_0 .$$

b_3) *O cada sul prolungamento d'un lato di* F_0, per es. del lato P_2P_3 e da banda opposta di P_3 rispetto a P_2. Si ha

$$F_0 = F_0^{(2)} - F_0^{(3)}, \qquad F = F^{(2)} - F^{(3)},$$

$$\text{vol } F = \text{vol } F^{(2)} - \text{vol } F^{(3)} = \frac{h}{3}(\text{area } F_0^{(2)} - \text{area } F_0^{(3)}) = \frac{h}{3} \text{area} F_0 .$$

b_4) *O cada all'esterno di* F_0, *ma all'interno di uno degli angoli di* F_0, per es. dell'angolo $P_1\widehat{P_2}P_3$. Si ha

$$F_0 = F_0^{(1)} + F_0^{(3)} - F_0^{(2)}, \qquad F = F^{(1)} + F^{(3)} - F^{(2)},$$

$$\text{vol}\, F = \text{vol}\, F^{(1)} + \text{vol}\, F^{(3)} - \text{vol}\, F^{(2)} = \frac{h}{3} (\text{area}\, F_0^{(1)} +$$

$$+ \text{area}\, F_0^{(3)} - \text{area}\, F_0^{(2)}) = \frac{h}{3}\, \text{area}\, F_0 .$$

b_5) Infine *O cada all'esterno di* F_0 *ed entro uno degli angoli opposti agli angoli di* F_0, per es. entro l'angolo opposto a quello di vertice P_1: Si ha

$$F_0 = F_0^{(1)} - F_0^{(2)} - F_0^{(3)}, \qquad F = F^{(1)} - F^{(2)} - F^{(3)},$$

$$\text{vol}\, F = \text{vol}\, F^{(1)} - \text{vol}\, F^{(2)} - \text{vol}\, F^{(3)} = \frac{h}{3} (\text{area}\, F_0^{(1)} -$$

$$- \text{area}\, F_0^{(2)} - \text{area}\, F_0^{(3)}) = \frac{h}{3}\, \text{area}\, F_0 .$$

c) Supponiamo, da ultimo, F *in posizione del tutto generica nello spazio.* Spostiamo F in modo da portarne una faccia qualunque F_0 a giacere nel piano $z = 0$, e il vertice opposto V a cadere sull'asse z.

Sia F' la nuova posizione, così ottenuta, del tetraedro F. Se la quota del vertice V di F' è negativa, si costruisca il tetraedro F'' simmetrico di F' rispetto al piano $z = 0$. È immediato che F' ed F'' hanno ugual volume. Ma, d'altra parte, uno dei due tetraedri F', F'' si trova necessariamente nelle condizioni b) o addirittura nelle condizioni a). Ricordando il teorema fondamentale dimostrato al n. 3. si ha dunque, in ogni caso,

$$\text{vol}\, F = \frac{h}{3}\, \text{area}\, F_0 .$$

5. Generalizzazione allo spazio cartesiano S_n ad n dimensioni. Tutto ciò che precede può estendersi facilmente per induzione completa allo spazio S_n ad un numero qualunque n di dimensioni. Il teorema fondamentale (n. 1) si potrà enunciare così: l'estensione d'un dominio rettangolare è sempre uguale al prodotto delle sue dimensioni, *qualunque sia il sistema d'assi cartesiani ortogonali ai quali ci si riferisce* [4], op-

---

[4] Per le definizioni di « *dominio rettangolare* », « *dimensione* » ecc. relative all'S_n, si possono consultare le opere del prof. M. Picone: *Lezioni di Analisi Infinitesimale,* (Catania 1923), pagg. 44-47; *Lezioni di Calcolo Infinitesimale.* corso litografato per gli allievi d'ingegneria (Roma, 1945). pagg. 26-28.

pure (ciò che è lo stesso) ***qualunque sia il movimento che si pensi d'imprimere al dominio stesso*** (n. 3). Un movimento nell'S_n è definito da una qualunque sostituzione ortogonale

$$x_k = x_k^0 + \sum_1^n{}_i\, a_{ki} x'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\left(\sum_1^n{}_i\, a_{ki} a_{li} = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq k \\ 1 & \text{per } l = k \end{cases}, \qquad \| a_{ki} \| = 1\right),$$

sostituzione rispetto alla quale ciascuna delle n dimensioni d'un dominio rettangolare è un numero invariante.

Si comincerà col dimostrare un lemma analogo a quello del n. 2, chiamando F_0 una qualunque figura dell'iperpiano $x_n = 0$, F un «*prisma retto di base F_0 e d'altezza* h», cioè la figura dell'S_n, costituita da tutti i punti P le cui prime $n-1$ coordinate individuano un punto P_0 di F_0 e le cui n-me coordinate soddisfano ad una doppia limitazione del tipo

$$0 \leq x_n \leq h \qquad (h \text{ num. arbitrario} > 0).$$

Anche qui si potrà osservare che, se il movimento considerato consiste in una semplice traslazione

$$\left(a_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ 1 & \text{per } i = k \end{cases}\right.$$

nelle formole sopra scritte), la dimostrazione del teorema fondamentale è del tutto immediata. Onde subito si potrà anche qui imporre la condizione semplificatrice che il dominio rettangolare considerato F abbia un vertice O nell'origine degli assi e che tale vertice si mantenga fisso.

F sia definito dalle n limitazioni

$$0 \leq x_k \leq l_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Per definizione è est $F = l_1 l_2 \ldots l_n$. La faccia di F giacente nell'iperpiano $x_n = 0$, è un dominio rettangolare F_0 ad $n-1$ dimensioni: supponiamo che per F_0 ***il teorema sia già stato dimostrato***, supponiamo cioè che est F_0 sia invariante, per un movimento qualsiasi entro l'iperpiano $x_n = 0$.

Tra gl'infiniti possibili movimenti nell'S_n, distinguiamo quelli che lasciano fissi tutti i punti d'una retta e che chiamiamo «***rotazioni***» intorno a quella retta. Orbene, nell'ipotesi che *il movimento considerato sia una rotazione del dominio* F *intorno al suo spigolo* n-*mo*, cioè intorno all'asse x_n, indicata con F_0' la faccia di F' (posizione del dominio alla fine del movimento) giacente nell'iperpiano $x_n = 0$, si ha, per quanto convenuto,

$$\text{est}\, F_0' = \text{est}\, F_0 = l_1 l_2 \,..\, l_{n-1}\,.$$

Ma F' può considerarsi come un prisma retto di base F_0' e d'altezza l_n, onde risulta, in virtù del lemma,

$$\text{est}\, F' = l_n\, \text{est}\, F_0' = l_1 l_2 \ldots l_n\,.$$

Analoga dimostrazione vale, nel caso che il movimento considerato sia una rotazione intorno ad un altro spigolo di F.

Se infine si suppone che il movimento considerato non sia una rotazione intorno ad uno degli spigoli di F, indicata ancora con F_0' la faccia di F' omologa di F_0, si riconosce che l'iperpiano $x_n = 0$ (contenente F_0) e l'iperpiano contenente F'_0, s'intersecano secondo un S_{n-2} (varietà lineare ad $n-2$ dimensioni), nel quale è certo possibile scegliere una retta r uscente dall'origine (e del resto arbitraria) [5]. Orbene facciamo subire al dominio F una rotazione intorno al proprio spigolo n-mo, la quale porti uno qualunque dei rimanenti spigoli, per es. il primo, a sovrapporsi sulla retta r, e diciamo $\overline{F}$ la nuova posizione in cui F viene a portarsi. Analogamente facciamo subire ad F' una rotazione intorno al proprio spigolo n-mo, la quale porti il primo spigolo a sovrapporsi sulla retta r, e diciamo $\overline{F}'$ la nuova posizione in cui F' viene a portarsi. Risulta che il dominio $\overline{F}'$ è ottenuto dal dominio $\overline{F}$, per effetto d'una rotazione intorno al primo spigolo. Per quanto sopra dimostrato, si ha dunque

$$\text{est}\, F' = \text{est}\, \overline{F}' = \text{est}\, \overline{F} = \text{est}\, F = l_1 l_2 \ldots l_n\,.$$

Il teorema fondamentale è così completamente dimostrato. Da esso si possono dedurre le proposizioni analoghe alle *a*), *b*) del n. 3, a proposito della seconda delle quali si dovrà intendere, per « prisma retto dell'S_n », la figura ottenuta muovendo comuque un prisma retto del tipo sopra definito. Inoltre:

---

(5) Tale S_{n-2} contiene precisamente ∞^{n-3} rette uscenti dall'origine.

c) una qualunque figura F interamente contenuta in un iperpiano dell'S_n, ha estensione nulla rispetto all'S_n (cfr. la nota al n. 2). Ciò è evidente, se la F giace in uno degli iperpiani coordinati; in caso contrario basta far subire alla F un qualunque movimento atto a portarla in uno degli iperpiani coordinati, ecc.

È anche da osservare che, alle figure dell'S_n soddisfacenti alle due proprietà: 1°) sono dotate di punti interni rispetto all'S_n; 2°) hanno contorno d'estensione nulla rispetto all'S_n, si possono generalizzare tutte le considerazioni svolte nei nn. 12–14 dell'art. cit. pagg. 189–191.

6. Per calcolare l'estensione d'un $(n+1)$–edro dell'S_n, si può procedere come segue. Si comincia anzitutto col dimostrare che *l'* $(n+1)$*–edro* F, *limitato dagli* n *iperpiani fondamentali e dall'iperpiano d'equazione segmentaria*

$$\sum_1^n {}_k \frac{x_k}{l_k} = 1, \qquad (l_k > 0)$$

ha estensione $\dfrac{1}{n!} l_1 l_2 \dots l_n$.

All'uopo deve naturalmente supporsi la proposizione già dimostrata per un analogo n–edro dell'S_{n-1}. Se dunque F_0 è la faccia (base) di F, giacente nell'iperpiano fondamentale $x_n = 0$, si ha che

$$\text{est}\, F_0 = \frac{1}{(n-1)!} l_1 l_2 \dots l_{n-1}.$$

Prefissato un intero $k > 0$ arbitrario e indicato genericamente con $F_i (i = 0, 1, 2, \dots, k-1)$ l'n–edro che s'ottiene intersecando F con l'iperpiano $x_n = \dfrac{i}{k} l_n$, si riconosce che

$$\text{est}\, F_i = \frac{1}{(n-1)!} l_1 l_2 \dots l_{n-1} \left(1 - \frac{i}{k}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{i}{k}\right)^{n-1} \text{est}\, F_0.$$

Di qui, con passaggi del tutto elementari ed analoghi a quelli del n. 4 *a*), si deduce che

$$\text{est}\, F = \frac{1}{(n-1)!} l_1 l_2 \dots l_n \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{S_k^{(n-1)}}{k^n},$$

indicando con $S_k^{(n-1)}$ la somma delle potenze $(n-1)$–esime dei primi k numeri naturali. Ponendo nella formola

$$\binom{n}{1}S_k^{(n-1)}+\binom{n}{2}S_k^{(n-2)}+\binom{n}{3}S_k^{(n-3)}+\ldots+\binom{n}{n-1}S_k^{(1)}=$$
$$=(k+1)\{(k+1)^{n-1}-1\},$$

ben nota dall'algebra, successivamente $n=2$, $n=3,\ldots$, si trova, per via ricorrente,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_k^{(1)}}{k^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{S_k^{(2)}}{k^3}=\frac{1}{3},\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{S_k^{(n-1)}}{k^n}=\frac{1}{n},$$

e perciò infine

$$\text{est}\, F=\frac{1}{n!}\,l_1 l_2\ldots l_n\,.$$

7. Si passa, in secondo luogo, a dimostrare che, *se* F_0 *è un qualunque* n*-edro dell'iperpiano* $x_n=0$*, con un vertice nell'origine, ogni* $(\mathrm{n}+1)$*-edro* F*, avente una faccia coincidente con* F_0 *ed il vertice opposto in un punto del semiasse positivo* x_n*, ha estensione* $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{n}}$ *est* F_0*, ove* h *è l'ordinata di questo vertice.*

La dimostrazione di questa proposizione s'appoggia a quella della proposizione precedente (n. 6), tenendo ben conto che si deve supporre non solo (come s'è detto) d'aver già eseguito il calcolo dell'estensione d'un n-edro dell'S_{n-1}, ma d'averne anche dedotte tutte la proprietà immediate, utili ai fini del calcolo dell'estensione d'un $(n+1)$-edro (proprietà che naturalmente devono poi potersi verificare a posteriori, come risultati di questo stesso calcolo). Di tali proprietà ne occorrono qui due e cioè: la possibilità di costruire n-edri equivalenti (cioè d'uguale estensione) a un dato e soddisfacenti a certe condizioni restrittive, e la proporzionalità dell'estensione di n-edri simili, alle $(n-1)$-esime potenze delle loro dimensioni lineari (per es. delle lunghezze d'uno spigolo omologo). Ponendosi dunque da questo punto di vista, si deve supporre di poter costruire un $(n+1)$-edro ausiliario G, del tipo considerato al n. 6, che abbia la faccia $x_n=0$ equivalente ad F_0 e sia tale che $l_n^{*}=h$. Ai fini della dimostrazione basta far vedere che est $F=$ est G e a ciò appunto si perviene facilmente, osservando che due sezioni di F e di G, fatte con uno stesso iperpiano $x_n=$ cost, sono necessariamente equivalenti.

8. Si dimostra ancora la formola

$$\text{est}\, F = \frac{h}{n}\, \text{est}\, F_0$$

nell'ipotesi che *la faccia* F_0 *dell'* $(n+1)$*–edro considerato giaccia nell'iperpiano* $x_n = 0$, *ma nessuno dei suoi* n *vertici cada nell'origine; il vertice opposto* V *cada ancora sull'asse* x_n *ed abbia quota* $h > 0$.

È facile riconoscere che, in tale ipotesi, si può esprimere (nel senso del n. 14 dell'art. cit. pag. 190) F_0 come somma (algebrica) d'un certo numero d'n–edri aventi un vertice in O mentre, se ciascuno di questi n–edri s'assume come faccia d'un $(n+1)$–edro avente vertice opposto in V, anche F risulta espresso come somma (algebrica) d'un ugual numero d'$(n+1)$–edri: ed anzi, in questa seconda somma, ciascun $(n+1)$–edro dev'esser preso con lo stesso segno con cui figura, nella prima somma, l'n–edro che n'è faccia. Da ciò appunto si deduce l'enunciato, perchè, per quanto s'è dimostrato al n. 7, ciascuno di questi $(n+1)$–edri ha estensione uguale ad $\frac{h}{n}$ moltiplicato per l'estensione dell'n–dro che n'è faccia.

Infine, con ragionamento perfettamente identico a quello del n. 4, *c*), si dimostra che la formola $\text{est}\, F = \frac{h}{n}\, \text{est}\, F_0$ vale *per un* $(n+1)$*–edro* F *in posizione del tutto generica nell'* S_n, indicandosi con F_0 una qualunque faccia di F e con h l'altezza relativa.

9. Tenendo conto di quanto precede, si può anche dimostrare, per induzione completa e con procedimento analogo a quello (ben noto dalla geometria analitica) per il caso $n = 3$ che, *per un qualunque* $(n+1)$*–edro* F, *di vertici*

$$P^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

è

$$\text{est}\, F = \frac{1}{n!} \left| \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} \right| .$$

Il segno del determinante a secondo membro individua un certo verso nell'ordine secondo cui si considerano successivamente i vertici di F. Precisamente si può affermare che il detto segno è positivo nel caso che F possa ridursi, per deformazione continua e senza che est F mai s'annulli, a sovrapporsi all'$(n+1)$-edro fondamentale limitato dall'iperpiano

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, x_k = 1,$$

im modo che i primi n vertici $P^{(i)}(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ vengano a coincidere rispettivamente coi punti

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0, \quad . \quad x_i = 1,$$

mentre $P^{(n+1)}$ venga a coincidere con l'origine delle coordinate. Nel caso contrario il segno è negativo, caso in cui, come si riconosce facilmente, F deve potersi ridurre, per deformazione continua e senza che est F mai s'annulli, a sovrapporsi all'$(n+1)$-edro simmetrico del precedente rispetto all'iperpiano fondamentale $x_1 = 0$, cioè all'$(n+1)$-edro il cui primo vertice è il punto $(-1, 0, 0, \dots, 0)$, mentre tutti gli altri vertici sono gli stessi di quelli dell'$(n+1)$-edro fondamentale suddetto.

TULLIO VIOLA