Poligoni equivalenti per traslazione [1]

1. In un interessante recente articolo pubblicato su questa stessa rivista [2], il prof. C. F. Manara ha studiato il problema dei poligoni *equivalenti per traslazione* o *T-equivalenti*, cioè delle coppie di poligoni P, P' del piano euclideo, decomponibili ciascuno in un numero finito di parti poligonali due a due non compenetrantisi, in modo tale che fra le parti di P e quelle di P' sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, nella quale ogni parte di P possa venir sovrapposta per traslazione alla parte corrispondente di P'. Le parti così biunivocamente corrispondentisi sono dette *congruenti per traslazione*.

In questo lavoro intendo proseguire la ricerca, supponendo che P e P' possano anche indicare ciascuno un gruppo (in numero finito) di poligoni due a due non compenetrantisi. Si otterrà così una trattazione soltanto formalmente più generale di quella del prof. Manara, ma conveniente per una certa semplicità d'esposizione di cui il lettore sarà buon giudice.

Darò una nuova dimostrazione d'un teorema sostanzialmente dovuto ad H. Hadwiger e P. Glur [3], e perciò non credo di poter attribuire a questo mio lavoro se non un interesse metodologico. E desidero precisare fin d'ora, per togliere ogni possibilità d'equivoco, che ognuno dei poligoni o delle parti poligonali di cui si parlerà nell'enunciato, verrà inteso come

---

[1] Da una comunicazione fatta alla Società « Mathesis » di Torino il 20 maggio 1958.

[2] C. F. Manara, *Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri* (Period. di Matemat. s. IV, *35*$_5$, dicembre 1957, pp. 279-285).

[3] H. Hadwiger e P. Glur, *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone* (Elemente der Mathematik *6*, 1951 pp. 97-106, v. teor. n. 9 di p. 105).

un dominio limitato internamente connesso, con frontiera formata da un numero finito di circuiti poligonali semplici e chiusi, ciascuno dei quali percorso in un ben determinato verso da assumersi come positivo: per es. il verso che, con le ben note convenzioni, lascia alla propria sinistra i punti interni al dominio stesso.

Saranno dunque esclusi, dalle considerazioni di principio, i poligoni (o parti poligonali, o domini) intrecciati, pur ammettendo, invece, che essi possano presentare delle concavità. Soltanto nel corso della dimostrazione, si offrirà l'opportunità di considerare poligoni di tipo più particolare o generale, ma ciò solo transitoriamente e in via puramente euristica, e s'avrà cura di segnalare in modo esplicito.

2. Anche in questo lavoro è fondamentale il concetto di « *stella vettoriale* », così opportunamente introdotto dalla Dr.ssa S. DENTELLA nella Sua tesi di Laurea, al quale va il merito della semplicità ed espressione del nuovo enunciato. Ci permettiamo di ricordare qui tale concetto, nel riferimento più generale cui abbiamo accennato (n. 1).

Fissato a piacere un punto O dello spazio, immaginiamo applicati in esso tanti vettori quanti sono i lati del poligono P o del gruppo P di poligoni considerati. Ciascun vettore sia equipollente al lato corrispondente, cioè abbia ugual direzione, ugual verso ed uguale lunghezza. Dopo ciò, se accadrà che più vettori applicati in O risultino fra loro collineari (cioè abbiano ugual retta d'azione), se ne faccia la somma algebrica. Il complesso di vettori applicati che da ultimo si verrà ad ottenere in tal modo, verrà chiamato la « *stella vettoriale* » associata al poligono P, o al gruppo P di poligoni. Non si esclude naturalmente che i vettori del detto complesso possano risultare tutti nulli, nel qual caso si dirà che la stella vettoriale associata a P è nulla: tale, per es., è la stella vettoriale associata ad un qualunque parallelogramma.

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema, dando così risposta ad una domanda formulata dal prof. MANARA alla fine del citato articolo.

TEOREMA. – *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè due poligoni o due gruppi di poligoni* P, P′ *siano* T–*equivalenti, sono:*

1ª) *che* P *e* P′ *siano equivalenti,*

2ª) *che* P *e* P′ *abbiano la stessa stella vettoriale* (4).

Che le condizioni enunciate siano necessarie, è stato già dimostrato (5). Ci limiteremo dunque a provare che esse sono sufficienti, e ciò faremo ammettendo dapprima certe ipotesi restrittive.

3. G. Vacca aveva già osservato, or sono molti anni, che due parallelogrammi equivalenti sono anche T-equivalenti (6). Valendosi allora della transitività della T-equivalenza (7), si riconosce facilmente che, anche se P o P' sono gruppi di parallelogrammi, la semplice equivalenza di P e P' ha per conseguenza la loro T-equivalenza (8).

Supponiamo ora, invece, che P e P' siano due poligoni semplici (cioè semplicemente connessi) e convessi, ciascuno dei quali sia privo di coppie di lati fra loro paralleli. Dimostriamo che, in tal caso ed ammessa anche la sola ipotesi della coincidenza delle due stelle vettoriali, P e P' sono addirittura T-congruenti.

Infatti, se immaginiamo di voler eseguire la costruzione di

---

(4) S'intende rispetto ad una stessa origine O.

Il più gran pregio del nuovo concetto di « stella vettoriale » ci sembra essere l'*additività*, della quale faremo continuo ed evidente uso nel seguito. Con ciò si conviene di dire che, se P è un qualunque gruppo di poligoni, la stella di P è la *somma* delle stelle dei singoli poligoni di P, ove per « somma di più stelle » s'intenda la stella che s'ottiene sovrapponendo quelle dei singoli addendi e sommando algebricamente i vettori applicati collineari che eventualmente si presentassero (cfr. loc. cit. alla nota (2) p. 284).

(5) Cfr. loc. cit. alla nota (2), p. 284.

(6) G. Vacca, *Su alcuni teoremi di Geometria piana analoghi a quelli di* M. Dehn *nella Geometria solida* (Rend. Lincei 22_2, 1913 pp. 417-423, v. p. 419).

(7) Cfr. loc. cit. alla nota (2), p. 282.

(8) Infatti sia P'' un parallelogramma equivalente tanto a P quanto a P'. Mediante un sistema di rette parallele ad una delle due coppie di lati opposti, P'' potrà suddividersi in tanti parallelogrammi quanti sono quelli che formano il gruppo P, in modo che ogni parallelogramma di P risulti equivalente al parallelogramma parziale di P'' che ad esso corrisponde. Di qui segue la T-equivalenza di P'' a P, e analogamente si dimostra la T-equivalenza di P'' a P'.

uno dei due poligoni a partire dalla sua stella vettoriale supposta assegnata, riconosciamo facilmente che una tale costruzione, a meno d'una traslazione arbitraria nel piano, è possibile in uno e in un sol modo. La costruzione potrà farsi così: si assegneranno successivamente gli indici 1, 2, ..., n ai vettori $\bar{u}$ della stella, a cominciare da uno qualunque di questi ed eseguendo ordinatamente il giro completo della stella nel verso positivo (cioè antiorario, secondo la convenzione fatta); scelto poi un punto arbitrario A, si applicherà in A un vettore equipollente ad $\bar{u}_1$, nel punto $A + \bar{u}_1$ un vettore equipollente ad $\bar{u}_2$, nel punto $A + \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ un vettore equipollente ad $\bar{u}_3$, e così via fino al termine della costruzione cioè fino a ricadere nel punto $A = A + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + ... + \bar{u}_n$. Dopo ciò, basta osservare che P e P' non sono altro che due diversi poligoni corrispondenti ad una stessa stella vettoriale.

D'ora in poi saranno esplicitamente ammesse entrambe le ipotesi dell'enunciato.

Se P e P' sono due poligoni semplici e convessi nelle condizioni più generali, si può ragionare come segue. Supponiamo per es. che P possieda due lati paralleli fra loro AB, CD (da percorrersi evidentemente nei versi opposti) con $\overline{AB} \geq \overline{CD}$. Si applichi in B il vettore $\overrightarrow{BE}$ equipollente a $\overrightarrow{CD}$ e si osservi che il parallelogramma $EBCD$ è interamente contenuto in P (fig. 1). P risulterà in generate decomposto, dai due segmenti BC, ED, in tre parti che saranno anch'esse dei poligoni semplici e convessi: cioè nel detto parallelogramma, in un poligono R avente per lato ED, e in un altro poligono S avente per lato BC.

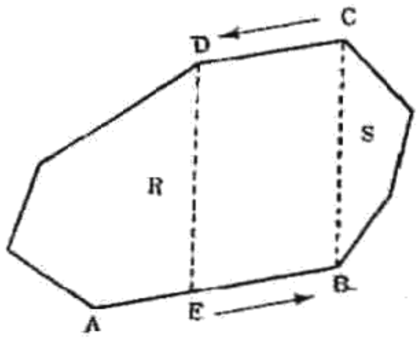

Fig. 1

Con un'opportuna traslazione si sposti il detto parallelogramma in modo che non abbia più alcun punto in comune con P, e si assoggetti poi una delle rimanenti due parti ad una traslazione tale da portarla adiacente all'altra, precisamente in modo che i due lati BC ed ED vengano a coincidere. Con ciò si sarà ottenuta la trasformazione di P, mediante due opportune traslazioni eseguite su parti poligonali di P (9), in un gruppo formato da un nuovo poligono semplice e convesso $P_1 = R + S$, e da un certo parallelogramma p_1. E risulterà dunque

$$P_1 + p_1 \qquad T\text{-equivalente a } P.$$

Può darsi che P_1 possieda altri due lati paralleli fra loro. Si opererà allora in modo del tutto analogo, a proposito di tali lati, e così s'otterrà un nuovo poligono P_2 semplice e convesso e un nuovo parallelogramma p_2, tali che

$$P_2 + p_2 \qquad T\text{-equivalente a } P_1$$

dunque

$$P_2 + p_1 + p_2 \qquad \text{»} \qquad \text{» } P.$$

Così si opererà successivamente su tutte le coppie di lati paralleli fra loro che si avrà la ventura di incontrare finchè, evidentemente dopo un numero finito h d'operazioni, si sarà arrivati ad un poligono P_h semplice, convesso e del tutto privo di simili coppie di lati. E sarà

$$P_h + p_1 + p_2 + \ldots + p_h \qquad T\text{-equivalente a } P \text{ (}^{10}\text{)}.$$

Si osservi ora che $P_1 + p_1$ ha la stessa stella vettoriale sia di P che di P_1, che $P_2 + p_1 + p_2$ ha la stessa vettoriale sia di P che di P_2, ecc. Dunque $P_h + p_1 + p_2 + \ldots + p_h$ ha la stessa stella vettoriale sia di P che di P_h.

Operazioni perfettamente analoghe potranno eseguirsi su P', ottenendosi anche qui un certo gruppo, analogo, T-equivalente a P':

$$P'_k + p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_k \qquad T\text{-equivalente a } P' \text{ (}^{11}\text{)}.$$

---

(9) È appena il caso d'avvertire che non intendiamo escludere l'eventualità che il segmento BC (oppure ED) sia uno dei lati di P: allora l'operazione in questione si semplifica ovviamente.

(10) Naturalmente non s'esclude che, in via eccezionale, nel primo membro di questa relazione possa anche svanire il termine P_h: ciò accade, per es., se P è un poligono regolare con un numero pari di lati.

(11) È interessante notare che dovrà certamente essere $k > 0$, per ragioni evidenti da quanto affermiamo nelle righe che seguono. Vale anche una osservazione analoga a quella della nota (10): ed anzi si constaterà precisamente che P'_k svanisce se e solo se svanisce P_h.

I due poligoni P_h, P'_k risulteranno fra loro T-congruenti per quanto poco sopra dimostrato, mentre i due gruppi di parallelogrammi $p_1 + p_2 + \ldots + p_h$, $p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_k$ risulteranno fra loro T-equivalenti, perchè fra loro equivalenti. Dunque è

$$P \qquad T\text{-equivalente a } P', \text{ c. d. d.}$$

4. Per passare a trattare il caso più generale, ci sarà utile (a scopo dimostrativo) l'attribuire un segno alla T-equivalenza. La questione può essere schematizzata nei seguenti termini.

Supponiamo che, per tre poligoni, o gruppi di poligoni, P_1, P_2, P_3 valga la relazione

(1) $$P_1 \qquad T\text{-equivalente a } P_2 + P_3,$$

che vogliamo anche scrivere (con ovvio significato del simbolismo)

(1_1) $$P_1 - P_2 \qquad T\text{-equivalente a } P_3.$$

Indichiamo con P'_2 il poligono che s'ottiene da P_2 *invertendone il verso di percorrenza del perimetro*, e facciamo la convenzione che la (1) o la (1_1) possa essere scritta anche così:

(1_2) $$P_1 + P'_2 \qquad T\text{-equivalente a } P_3,$$

cioè facciamo la convenzione che, tutte le volte che, in una relazione di T-equivalenza, un gruppo di poligoni venga espresso come somma di poligoni o gruppi di poligoni, tale somma venga valutata in senso algebrico, intendendo che ogni poligono (o gruppo di poligoni) componente venga aritmeticamente sommato o detratto, a seconda che il verso di percorrenza del perimetro (o dei perimetri) sia positivo o negativo.

Con una tal convenzione, la (1) o (1_1) o (1_2) potrà ancora scriversi per es. così:

(1_3) $$P_1 \qquad T\text{-equivalente a } P_3 - P'_2,$$

oppure

(1_4) $$P'_2 + P'_3 \qquad T\text{-equivalente a } P'_1,$$

oppure

(1_5) $$P'_2 \qquad T\text{-equivalente a } P_3 + P'_1,$$

intendendo che P'_1 e P'_3 siano i poligoni che s'ottengono rispettivamente da P_1 e P_3 invertendone il segno di percorrenza dei perimetri, ecc.

Osserviamo però che, ciò facendo, dobbiamo in pari tempo liberarci dal vincolo, che c'eravamo imposti fino a tutto il n. 3, che i poligoni formanti gruppo in uno stesso membro d'una qualsiasi T-equivalenza, non dovessero mai compenetrarsi due a due (cfr. n. 1). È chiaro infatti che, se questa proprietà è verificata per es. nella T-equivalenza (1), non è detto che lo sia nella (1_1), o nella (1_5) ecc. Il detto vincolo verrà dunque abbandonato purchè, s'intende, risulti sempre ben chiaro dal contesto la possibilità d'individuare, ove occorra, i poligoni, d'uno stesso gruppo, che eventualmente si compenetrino, o che addirittura debbano essere ripetutamente (due o anche più volte) sommati o sottratti.

5. Nel caso più generale, il gruppo indicato con P nell'enunciato, conterrà sia poligoni semplici, sia poligoni non semplici.

Sia $\bar{P}$ un poligono semplice, non convesso, contenuto in P. Esso ha per lati certi vettori applicati (tenuto conto dell'orientamento convenuto) che indichiamo ordinatamente (cioè nel verso positivo di percorrenza del perimetro) con $[\bar{v}_1]$, $[\bar{v}_2], \dots,$ $[\bar{v}_n]$. Si riconosce facilmente che, eseguendo un'opportuna permutazione dei vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$, sia essa $\bar{v}_{r_1}, \bar{v}_{r_2}, \dots, \bar{v}_{r_n}$, e scegliendo a piacere un punto A, è possibile ottenere che il poligono P^* di vertici

$$A, A+\bar{v}_{r_1}, A+\bar{v}_{r_1}+\bar{v}_{r_2}, \dots, A+\bar{v}_{r_1}+\bar{v}_{r_2}+\dots+\bar{v}_{r_{n-1}}$$

risulti *convesso* (12).

Poichè la permutazione $\bar{v}_{r_1}, \bar{v}_{r_2}, \dots, \bar{v}_{r_n}$ può sempre imma-

---

(12) La permutazione $\bar{v}_{r_1}, \bar{v}_{r_2}, \dots, \bar{v}_{r_n}$ è certamente unica, se fra i vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ non ce ne sono due fra loro paralleli; in caso contrario, possono esservi più permutazioni del tipo voluto. Quanto al nuovo poligono, esso può dirsi unico, purchè si convenga di sopprimere ogni eventuale vertice che risultasse comune a due lati situati per diritto.

Tutto ciò a meno sempre d'una traslazione nel piano, ben s'intende, in armonia con quanto s'è detto al principio del n. 3: se si volesse togliere ginarsi ottenuta dalla $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ con successivi scambi fra coppie d'elementi consecutivi, la costruzione d'un poligono del tipo P potrà eseguirsi, in ogni caso, con la regola seguente.

Sia per es. $\bar{v}_h$, $\bar{v}_{h+1}$ la prima coppia d'elementi consecutivi da scambiarsi, e sia $[\bar{v}_h]$ applicato nel vertice B di $\bar{P}$. Si formi allora il poligono P_1 che differisce da $\bar{P}$ per i soli lati $[\bar{v}_h]$, $[v_{h+1}]$ fra loro *scambiati*, cioè P_1 abbia gli stessi lati $[\bar{v}_1]$, $[\bar{v}_2]$. $\dots$, $[\bar{v}_{h-1}]$, $[\bar{v}_{h+2}], \dots$, $[\bar{v}_n]$ di $\bar{P}$, con l'aggiunta dei lati ottenuti applicando $\bar{v}_{h+1}$ in B, e $\bar{v}_h$ in $B + \bar{v}_{h+1}$. Ovviamente, chiamando P_1 anch'esso un « poligono », diamo a questo termine un significato più generale che nel passato, perchè non potrà escludersi che P_1 sia intrecciato, o addirittura che due o più lati di P_1 abbiano segmenti in comune.

Dal poligono P_1 si deduca poi, in modo perfettamente analogo, un nuovo poligono P_2, con un opportuno scambio d'una coppia di lati consecutivi, poi un nuovo poligono P_3, e così via, fino ad ottenere, dopo un certo numero finito di simili scambi, il poligono P^* voluto.

Orbene osserviamo che, nel passaggio da $\bar{P}$ a P_1, non si fa altro che detrarre da $\bar{P}$ un certo parallelogramma p_1 avente due lati consecutivi ordinatamente equipollenti a $[\bar{v}_h]$ e $[\bar{v}_{h+1}]$, e perciò scriviamo

(2) $$P_1 + p_1 \qquad T\text{-equivalente a } \bar{P}.$$

È necessario precisare accuratamente il significato di questa relazione. Conveniamo perciò che, nel primo membro,

a) il parallelogramma p_1 venga assunto con segno positivo o negativo, secondochè il verso di percorrenza del suo perimetro è positivo o negativo (13);

b) il simbolo P_1 rappresenti eventualmente tutto un gruppo di poligoni, alcuni da prendersi positivamente, altri

---

anche questa indeterminazione, occorrerebbe non solo prefissare A, ma prefissare altresì il primo dei vettori della permutazione $\bar{v}_{r_1}$, $\bar{v}_{r_2}, \dots, \bar{v}_{r_n}$, per es. richiedere che sia $\bar{v}_{r_1} = \bar{v}_1$.

(13) In altre parole: che al verbo « detrarre », usato poco sopra, s'attribuisca significato algebrico.

negativamente, a seconda del verso di rotazione con cui risultano percorsi i loro rispettivi perimetri [14].

In fig. 2 è dato l'esempio d'un poligono $\bar{P}(I)$, e di due

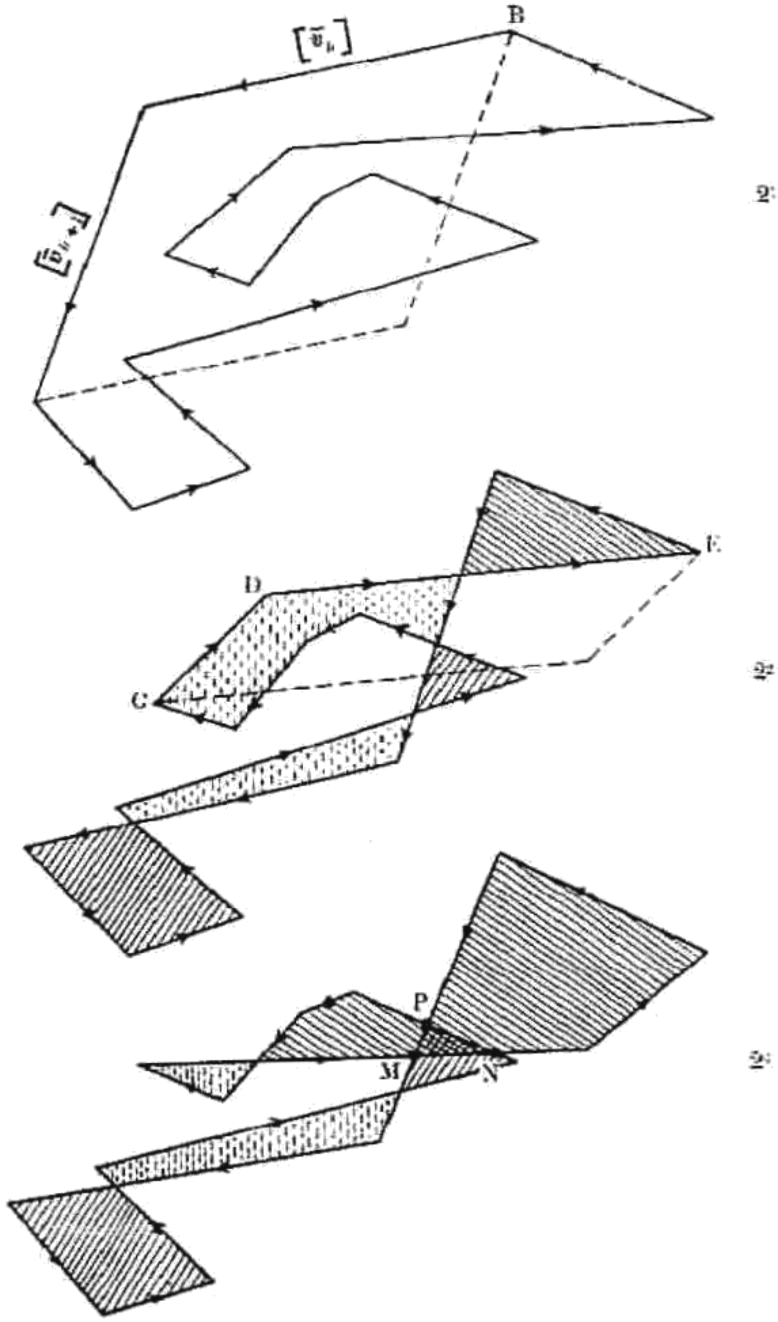

Fig. 2

([14]) Il gruppo rappresentato consta di due o più poligoni, quando risulti « intrecciato » il poligono di cui sopra, indicato anch'esso col simbolo P_t. Ma il doppio significato attribuito a tale simbolo non ci sembra possa far cadere in equivoco.

Si osservi infine che le convenzioni *a*), *b*) ora formulate, sono pienamente conformi al n. 4.

successivi poligoni P_1 (II) e P_2 (III). Come si vede, P_1 risulta intrecciato e perciò, ad illustrare la convenzione *b* ora fatta, in fig. 2_{II} si sono tratteggiati i poligoni parziali da prendersi positivamente nel primo membro della (2), si sono punteggiati quelli da prendersi negativamente.

Nel passaggio da P_1 a P_2, si detrae analogamente, da P_1, un certo parallelogramma p_2 e perciò scriveremo, con significato dei simboli del tutto analogo a quanto sopra,

$$P_2 + p_2 \qquad T\text{-equivalente a } P_1 . \tag{3}$$

In fig. 2_{II} s'è convenuto che $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ sia la coppia di lati consecutivi da scambiarsi, in fig. 2_{III} s'è indicato con doppio tratteggio il triangolo MNP che, come componente di P_2 nel primo membro della (3), dovrà prendersi due volte in senso positivo.

Così si continuerà ordinatamente, passando da P_2 a P_3, da P_3 a P_4, ..., fino a giungere a P^*. I parallelogrammi p_1, p_2, p_3, ... potranno sommarsi algebricamente ([15]) e daranno certamente una somma negativa, perchè l'area di P è ovviamente maggiore di quella di $\overline{P}$. Ponendo $p_1 + p_2 + p_3 + ... = - p$ ([16]), si avrà dunque

$$P^* - p \qquad T\text{-equivalente a } \overline{P}.$$

6. Un poligono non semplice contenuto in P può sempre decomporsi in parti poligonali semplici mediante tagli rettilinei, nel modo noto, senza per altro portare alterazione alla stella vettoriale di P. Non si compromette dunque la generalità delle ipotesi, supponendo che P contenga soltanto poligoni semplici. Se questi sono più d'uno, basta farli traslare opportunamente, in modo da portarli a contatto esternamente in un certo ordine, così che, per es., il primo poligono abbia un vertice in comune col secondo, il secondo col terzo, ecc.

([15]) Cfr. la nota ([8]).

([16]) In conformità col n. 4, si deve intendere il perimetro del parallelogramma p percorso positivamente.

(fig. 3) [17]. Si sarà ottenuto un certo poligono non più internamente connesso, e che non potrà neppure dirsi intrecciato [18], ma sul quale non vi sarà alcuna difficoltà a ripetere tutti i ragionamenti del n. precedente.

Fig.

Concludendo, le operazioni descritte porteranno, in definitiva, alla costruzione d'un unico poligono semplice e convesso P_0, avente la stessa stella vettoriale di P, e ad un parallelogramma p_0, tali che

$$P_0 - p_0 \quad T\text{-equivalente a } P.$$

Questa relazione può accettarsi poi come del tutto generale e cioè valevole anche per i casi già contemplati al n. 3 (per i quali p_0 svanisce).

Analogamente, eseguendo su P' le operazioni descritte, si perverrà ad un unico poligono semplice e convesso P_0', avente la stessa stella vettoriale di P', e ad un parallelogramma p_0', tali che

$$P_0' - p_0' \qquad T\text{-equivalente a } P'.$$

Poichè P è equivalente a P', sarà dunque

$$P_0 - p_0 \qquad \text{equivalente a } P_0' - p_0'$$

e, scambiando fra loro p_0 e p_0' (cioè aggregando p_0 a P_0' e p_0' a P_0), anche

$$P_0 + p_0' \qquad \text{equivalente a } P_0' + p_0 .$$

Ma la coppia P_0, p_0' può ovviamente sommarsi (e in più

[17] Nell'esempio di fig. 3 sono rappresentati tre poligoni, dopo eseguite le traslazioni accennate: il primo e il secondo hanno in comune il vertice M, il secondo e il terzo il vertice N.

[18] Se fosse intrecciato, i versi di percorrenza dei perimetri delle singole componenti connesse dovrebbero alternarsi, cosa che manifestamente non è.

modi) in un unico poligono $\overline{P}_0$ T–equivalente a $P_0 + p_0'$, tale poligono $\overline{P}_0$ essendo ancora semplice e convesso (fig. 4) ([19]). Analogamente può sommarsi la coppia $P_0' + p_0$. In virtù di quanto dimostrato al n. 3, si avrà dunque

$$P_0 + p_0' \quad T\text{-equivalente a } P_0' + p_0 ,$$

perciò anche

$$P_0 - p_0 \quad T\text{-equivalente a } P_0' - p_0' ,$$

e infine

$$P \qquad T\text{-equivalente a } P' .$$

Con ciò il nostro teorema è completamente dimostrato.

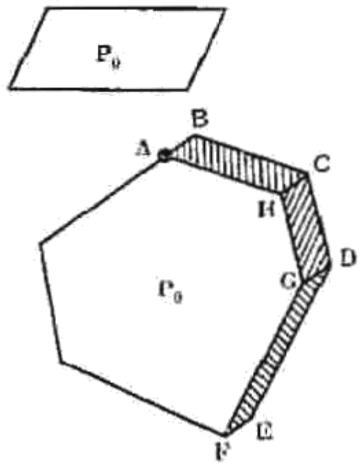

Fig. 4

TULLIO VIOLA

([19]) In fig. 4, per es., la somma $\overline{P}_0$ di p'_0 e P_0 è stata eseguita prolungando uno dei lati di P_0 oltre uno A dei suoi vertici, e costruendo poi un certo numero di parallelogrammi $ABCH$, $HCDG$, $GDEF$ adiacenti a P_0, che nel loro complesso (zone tratteggiate) abbiano area uguale a quella di p'_0. La detta somma è stata dunque eseguita, sempre senza alterare la stella vettoriale del gruppo.