

Le fasi di Venere e i due massimi sistemi

di Agnese Berra ⁽¹⁾, Ledo Stefanini ⁽²⁾

Sunto. *Si propone un percorso didattico che analizza la corrispondenza tra due diversi modelli planetari (il tolemaico e il copernicano) e le osservazioni delle fasi di Venere. Queste, compiute da Galileo, sono considerate dagli storici della scienza, il fattore che ha deciso l'esito della battaglia tra i "due massimi sistemi del mondo".*

Una delle vie che sono state percorse, con esiti diversi, in materia di didattica della fisica, è quella dello sviluppo storico. Il tentativo più ambizioso e che ha fornito i risultati più convincenti è stato quello dell'Harvard Project Physics, unico esempio di progetto didattico per la scuola media superiore diretto da un grande storico della fisica, Gerald Holton, che ha avuto una certa diffusione anche nella scuola italiana [1]. Sul piano didattico si tratta di una scelta molto impegnativa, che comporta notevoli rischi, sia sul versante della correttezza storica che su quello del rigore scientifico, non sempre agevolmente coniugabili. A nostro parere,

(¹) Liceo "M. Fanti", V.le Peruzzi 1, CARPI, MO.

(²) Ingegneria dell'ambiente e delle risorse, Università di Mantova (Via Frattini 7, 46100 MN).

la riflessione sugli aspetti storici della fisica è utile e produttiva solo quando impiantata su un solido terreno di conoscenze scientifiche di base. Diversamente, si rischia la divulgazione non di nozioni di storia della fisica, ma - come diceva Giulio Cortini a proposito di Relatività Speciale - di "agiografie in costume", come sono spesso le note storiche in appendice ai corsi tradizionali. Purtroppo le difficoltà opposte dalla storia della fisica sono maggiori della somma delle difficoltà della fisica e della storia.

Restano tuttavia indubitabili il grande valore culturale della storia della fisica e il ruolo importante che può rivestire nel processo formativo del giovane. A condizione che questi sia posto in grado di dominare compiutamente i termini delle questioni scientifiche oggetto di studio.

Questo lavoro intende essere un contributo ad una linea didattica in materia di insegnamento della cinematica del sistema solare sulla quale si innesta il problema dei due (massimi) sistemi, risolto da Galileo con la scoperta delle fasi di Venere.

Il livello di complessità matematica dell'esposizione non supera quello della tradizionale trigonometria piana e, pertanto, questa può essere sostituita, quando l'insegnante lo ritenga opportuno, da metodi grafici, che non ne mutano il nodo concettuale. Essenziale è invece che la linea didattica non prescindere da osservazioni vere e proprie compiute dagli allievi ad occhio nudo o mediante l'ausilio di semplici strumenti per l'uso dei quali si può chiedere l'aiuto di una delle tante associazioni di astrofili, solitamente ben felici di darlo.

1. Una premessa copernicana

Quando si osserva un pianeta (nel nostro caso, Venere) ad occhio nudo, non si distinguono particolari della sua superficie. Infatti le sue dimensioni angolari, anche quando è alla minima distanza dalla Terra (1' circa) sono al limite dell'acuità visiva dell'occhio umano. Basta tuttavia un modesto cannocchiale per scoprire, come Galileo, che *Cynthiae figuras aemulatur mater amo-*

rum⁽³⁾ cioè che Venere (la *mater amorum*) presenta fasi simili a quelle della Luna (*Cintia*).

L'osservatore ad occhio nudo coglie la luminosità del pianeta e si rende conto che questa subisce variazioni nel tempo, ma questa non dipende, come la fase, solo dalla separazione angolare dal Sole - la *digressione*, per usare un termine galileiano - ma anche dalla sua distanza dalla Terra.

La Fig. 1 vuole rappresentare il globo di Venere e le direzioni del Sole e della Terra, nel piano dell'eclittica.

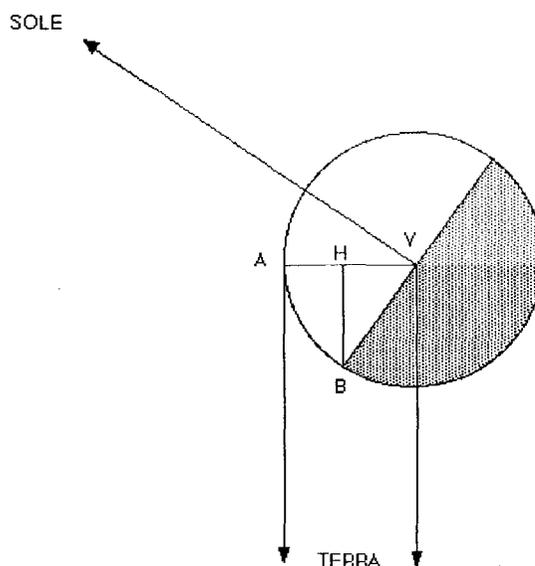


Fig.1. Il globo di Venere, illuminato dal Sole e osservato da Terra.

(³) Galileo affidò la notizia della sua scoperta a Giuliano de' Medici, allora ambasciatore a Praga, inviandogli la seguente misteriosa frase "Haec immatura a me iam frustra leguntur o y", di cui quella riportata è l'anagramma.

La parte illuminata è la semisfera rivolta al Sole; e di questa è visibile da Terra solo la parte la cui traccia, in figura, è AB. VB ($=r$) è la traccia di un semicerchio di raggio r che vediamo in proiezione; cioè come un'ellisse di semiassi r e VH (Fig. 2).

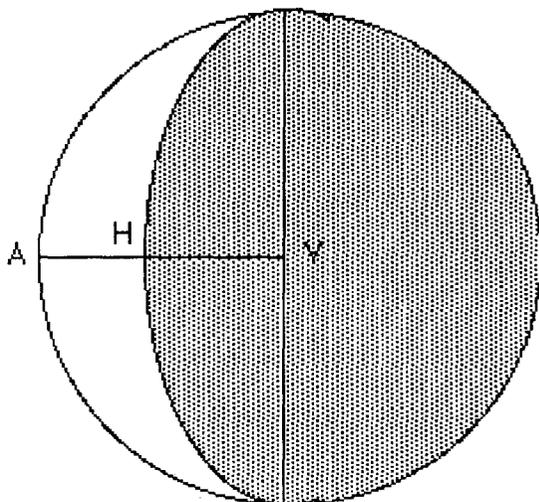


Fig.2. Come appare Venere vista da Terra. La curva che separa la zona illuminata da quella in ombra (terminatore) è una semi-ellisse.

dove $VH = VB \cos(\widehat{HVB}) = r \cos(\widehat{HVB})$

Le orbite dei pianeti, com'è noto, non sono circolari; ma l'errore che commettiamo nell'assumere come vera questa ipotesi è veramente piccolo. Infatti, l'eccentricità dell'orbita di Venere è solo 0,007 e quella della Terra circa il doppio. D'altronde i risultati a cui perverremo non sono strettamente correlati a questo assunto. In Fig.3 sono rappresentati, sul piano dell'eclittica, le posizioni di Venere e della Terra rispetto al Sole.

Da questa si ricava che $HVB = 180^\circ - \delta$ dove δ indica l'angolo tra le direzioni del Sole e della Terra visti dal pianeta.

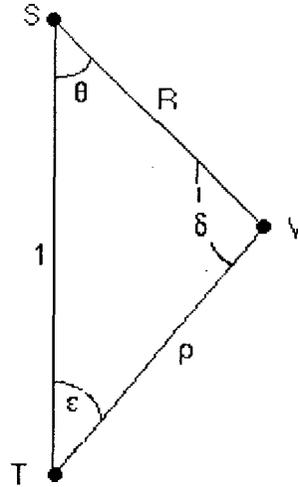


Fig.3. Terra, Sole e Venere. ϵ =elongazione solare di Venere;
 δ =elongazione solare della Terra vista da Venere;
 ρ =distanza Terra-Venere; R =raggio dell'orbita di Venere.
 Le distanze sono espresse in Unità Astronomiche (U.A.).

Ne viene

$$VH = -r \cos \delta.$$

L'area illuminata visibile da Terra è quindi

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r VH = \frac{1}{2} \pi r^2 (1 + \cos \delta) \quad (1)$$

Si chiama FASE del pianeta il rapporto tra la parte illuminata e l'area totale del disco:

$$\Phi = \frac{A}{\pi r^2} = \frac{1 + \cos \delta}{2} \quad (2)$$

Questo risultato è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.

Adottiamo ora il modello copernicano ancorato al Sole. In questo (e solo in questo) il raggio dell'orbita di Venere è legato al valore massimo della sua elongazione rispetto al Sole:

$$R = \sin \varepsilon_M$$

E poichè questa è circa 45° , risulta $R \cong 0,71 \text{ U.A.}$ Inoltre, tale massimo si ha quando $\delta = 90^\circ$ a cui corrisponde una fase 0,5. Il massimo della fase si ha per $\delta = 0^\circ$, cioè in corrispondenza della congiunzione superiore con il Sole (Venere, Sole e Terra allineati e in quest'ordine), quindi non è osservabile.

L'occhio nudo è in grado di valutare la luminosità del pianeta, per confronto con le stelle. Questa, tuttavia, è proporzionale alla frazione di area illuminata, cioè alla fase, e inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza da Terra. Quindi

$$L \propto \frac{1 + \cos \delta}{\rho^2} \quad (3)$$

Dal triangolo di Fig.3 si ricava

$$\cos \delta = \frac{R^2 + \rho^2 - 1}{2R\rho} \quad (4)$$

Questa, inserita nella (3), produce

$$L \propto \frac{(R + \rho)^2 - 1}{\rho^3} \quad (5)$$

da cui si ricava che il massimo di luminosità si ha per

$$\rho_{Max} = \sqrt{3 + R^2} - 2R \quad (6)$$

che non coincide con il valore massimo della fase.

Nel caso di Venere $\rho_{Max} = 0,43 \text{ U.A.}$ a cui corrisponde un'e-longazione di 40° ed un angolo $VST = \vartheta = 22^\circ$ (Vedi Fig.3) . Per percorrere un angolo di 22° Venere, che ha una velocità angolare di $1,63^\circ$ al giorno, impiega 35 giorni circa. Pertanto, Venere presenta il massimo di luminosità 35 giorni prima (e dopo) la congiunzione inferiore col Sole (quando Sole, Venere e Terra sono allineati e in quest'ordine). Questa si verificherà il primo Aprile del 2001; per cui il massimo di luminosità si avrà intorno al 25 Marzo (Venere vespertina) e al 5 Maggio (Venere mattutina). Pertanto, il massimo della luminosità del pianeta non coincide con il massimo della fase, come, ingenuamente, si sarebbe indotti a pensare.

2. Una pagina di storia

Il 5 dicembre 1610 Galileo ricevette una lettera da parte di Benedetto Castelli, suo discepolo. Questi gli segnalava che le osservazioni di Venere mediante il cannocchiale avrebbero potuto risolvere la questione dei "due massimi sistemi del mondo". Infatti nel sistema geocentrico si attribuiva a Venere il terzo cielo. Inoltre, secondo Tolomeo, Venere non percorre un'orbita circolare il cui centro è la Terra; ma si muove su un cerchio (epiciclo) il cui centro percorre quella circonferenza, detta *deferente*. Nel modello tolemaico le distanze relative non erano date; semplicemente, a Venere era assegnato il *terzo cielo*:

*“Solea creder lo mondo in suo periculo
che la bella Ciprigna il folle amore
raggiasse, volta nel terzo epiciclo”*

[Par. C.VIII]

Poichè al Sole, nella cosmologia tolemaica è assegnato il quarto cielo, le cose dovrebbero andare com'è descritto in Fig. 4.

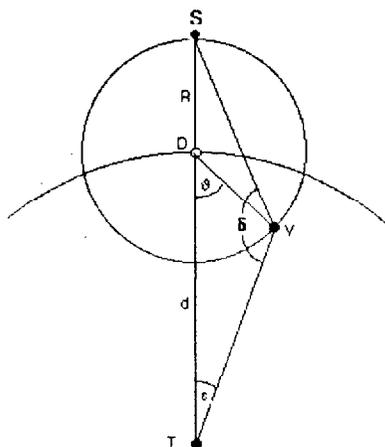


Fig.4. Epiciclo di Venere secondo il sistema tolemaico. d indica la distanza della Terra dal deferente di Venere, R il raggio dell'epiciclo, ϑ l'angolo che il raggio forma con la direzione Terra-Sole, e l'elongazione di Venere vista dalla Terra.

Il dato osservativo era che la massima elongazione di Venere rispetto al Sole, ϵ , era di 45° circa. Questo consente di stabilire una relazione tra il raggio R dell'epiciclo e la distanza d del deferente di Venere dalla Terra: $R = d \sin 45^\circ$.

La (2) vale anche nel riferimento tolemaico, solo che qui il valore massimo dell'elongazione della Terra vista da Venere, δ , si verifica in corrispondenza del valore massimo dell'elongazione di Venere (Vedi Appendice).

Per $\epsilon = \epsilon_M = 45^\circ$, risolvendo il triangolo SVT di Fig. 4, si ricava $\delta \cong 112,5^\circ$ da cui $\cos \delta \cong -0,38$. Il modello tolemaico prevede quindi per Venere una fase massima circa del 30% e in corrispondenza della massima elongazione. Per la verità, anche ai tempi di Copernico, presso gli astronomi il modello tolemaico era inteso

più come strumento di calcolo delle posizioni planetarie che come realtà fisica, come attestano le parole di Osiander nella premessa al *De revolutionibus* [1]: «...Non è infatti necessario che queste ipotesi siano vere, anzi neppure che siano verosimili, ma basta solo che mostrino il calcolo in armonia con i fenomeni osservati, tranne che uno sia così indotto di ottica e di geometria da considerare l'epiciclo di Venere verosimile, o da credere che per causa sua Venere ora preceda, ora segua il sole di 40 gradi e più. Chi non vede infatti che, accettata questa ipotesi, ne consegue che il diametro dell'astro, nel perigeo, dovrebbe apparire quattro volte più grande, e la sua figura sedici volte più grande di quando è all'apogeo, cosa con cui è in palese contrasto l'esperienza umana di tutte le epoche?»

Ma già dai primi di ottobre Galileo aveva cominciato ad osservare l'astro che presentava condizioni favorevoli. Infatti Venere era stata in congiunzione (superiore) col Sole l'11 maggio e a ottobre era ben visibile dopo il tramonto.

Ai primi di ottobre (150 giorni dopo la congiunzione) la distanza dalla Terra era $\rho \cong 1,2 \text{ U.A.}$ e la fase (2) $\Phi \cong 77\%$.

Ai primi di dicembre (7 mesi dopo la congiunzione) la distanza era diventata meno della metà di quella iniziale (0,5 U.A.) e la fase si era ridotta al 34%.

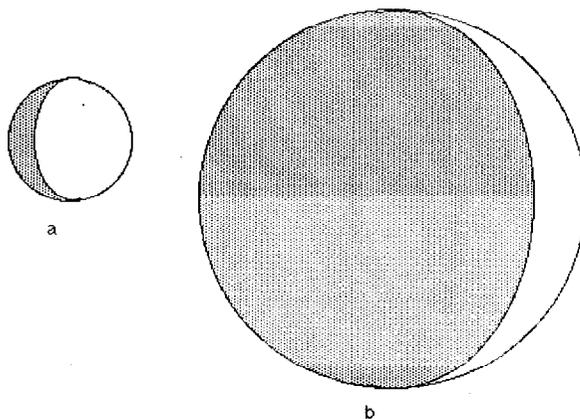


Fig.5. Fasi e dimensioni angolari di Venere come furono viste da Galileo nell'autunno del 1610.

La Fig. 5 vuole fornire un'idea delle immagini viste da Galileo all'inizio e alla fine delle osservazioni che descrisse in una lettera datata 1 gennaio 1611 e indirizzata a Giuliano de' Medici a Praga [2]: "...Sapranno dunque come, circa 3 mesi fa, vedendosi Venere vespertina, la cominciai ad osservare diligentemente con l'occhiale, per veder col senso stesso quello di che non dubitava l'intelletto. La veddi dunque, sul principio, di figura rotonda, pulita et terminata, ma molto piccola: di tal figura si mantenne sino che cominciò ad avvicinarsi alla sua massima digressione [che ebbe luogo il 20 Luglio] , tutta via andò crescendo in mole. Cominciò poi a mancare dalla rotondità nella sua parte orientale et aversa al sole, et in pochi giorni si ridusse ad essere un mezo cerchio perfettissimo; et tale si mantenne, senza punto alterarsi, sin che incominciò a ritirarsi verso il sole, allontanandosi dalla tangente. Hora va calando dal mezo cerchio et si mostra cornicolata, et anderà assottigliandosi sino all'occultazione, riducendosi allora con corna sottilissime; quindi, passando ad apparizione mattutina, la vedremo pur falcata et sottilissima, et con le corna averse al sole; anderà poi crescendo sino alla massima digressione, dove sarà semicircolare, et tale, senza alterarsi, si manterrà molti giorni; et poi dal mezo cerchio passerà al tuttotondo, et così rotonda si conserverà poi per molti mesi. Ma è il suo diametro adesso circa cinque volte maggiore di quello che si mostrava nella sua prima apparizione vespertina: dalla quale mirabile esperienza haviamo sensata et certa dimostrazione di due gran questioni, state sin qui dubbie tra' maggiori ingegni del mondo. L'una è, che i pianeti sono di loro natura tenebrosi (accadendo anco a Mercurio l'istesso che a Venere): l'altra, che Venere necessariissimamente si volge intorno al sole, come anco Mercurio et tutti li altri pianeti, cosa ben creduta da i Pittagorici, Copernico, Keplero et me, ma non sensatamente provata, come hora in Venere et in Mercurio. Haveranno dunque il Sig. Keplero et altri Copernicani da gloriarsi di havere creduto et filosofato bene, se bene ci è toccato, et ci è per toccare ancora, ad essere reputati dall'universalità de i filosofi in libris per poco intendenti et poco meno che stolti..."

Pertanto, queste osservazioni , non previste e non interpretabili sulla base del modello degli epicicli di Tolomeo -mentre lo erano nel contesto copernicano - costituirono la prova sperimentale

della corrispondenza tra realtà e sistema eliocentrico. Questo cessava quindi di essere un mero artificio di calcolo (come sosteneva Osiander nella prefazione al *De Revolutionibus*) per diventare *episteme* cioè verità dimostrata.

Appendice

La fase massima secondo il sistema tolemaico

Con riferimento alla Fig. 4, in cui consideriamo il Sole alla minima distanza possibile, cioè addirittura sull'epiciclo di Venere, cominciamo con l'osservare che

$$\cos\delta = \cos(T\hat{V}S) = -\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \varepsilon\right) \text{ poiché } \delta = 180^\circ - \varepsilon - \frac{\vartheta}{2}.$$

Differenziando si ottiene

$$d(\cos\delta) = \sin\delta \left(\frac{1}{2} + \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \right) d\vartheta \quad (1A)$$

Il teorema dei seni applicato al triangolo *VDT* produce

$$\frac{\sin\varepsilon}{R} = \frac{\sin(\varepsilon + \vartheta)}{d}$$

da cui si ricava

$$\tan\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon_M \sin\vartheta}{1 - \sin\varepsilon_M \cos\vartheta} \quad (2A)$$

avendo posto

$$\varepsilon_M = \arcsin \frac{R}{d}$$

ad indicare il valore massimo dell'elongazione di Venere.
Differenziata, la (2A) diviene

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \sin\varepsilon_M \frac{\cos\vartheta - \sin\varepsilon_M}{1 + \sin^2\varepsilon_M - 2 \sin\varepsilon_M \cos\vartheta}$$

che permette di accertare che

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} + \frac{1}{2} > 0$$

Pertanto, per la (1A), la funzione $\cos\delta$, quindi la fase, è crescente al crescere dell'elongazione e presenta un massimo in corrispondenza al massimo di ε .

Ringraziamenti

I più sentiti ringraziamenti all'amico Mario Rigutti, professore emerito di Astronomia presso l'Università di Napoli, che ha letto il manoscritto e segnalato alcune inesattezze da correggere. Naturalmente, gli eventuali errori sono da attribuire *in toto* alla responsabilità degli autori.

Note

- [1] F. Barone (a cura di), *Opere di Nicola Copernico*, UTET, Torino, 1979, pag. 165.
[2] G. Galilei, *Sensate esperienze e certe dimostrazioni*, Antologia a cura di F. Brunetti e L. Geymonat, Laterza, Bari (1963), pagg. 74-76.

Bibliografia

- (1) AA.VV. 1970 , *The Project Physics Course*, Zanichelli Editore, Bologna.