Sui tetraedri con quattro sfere tangenti inscritte

1. Il problema delle quattro sfere.

Il problema di Malfatti (¹) di costruire tre cerchi ciascuno tangente esternamente agli altri due e a due lati di un triangolo assegnato nello spazio a tre dimensioni si pone nella seguente forma: *assegnato un tetraedro trovare se esistono quattro sfere, ciascuna tangente esternamente alle altre tre, e inoltre tangente internamente a tre facce del tetraedro.*

Questo *problema*, detto *delle quattro sfere tangenti* fu proposto nel 1811 negli « Ann. de Math. p. et appl. de Gergonne » (²), e al contrario di quello sempre solubile di Malfatti, in generale non ammette soluzioni; noi l'abbiamo preso in questa nota in considerazione, non risultandoci che almeno di recente esso sia stato studiato.

Proveremo nel n. 3 che fra i sei parametri che individuano il tetraedro debbono in generale intercorrere due relazioni algebriche.

Successiamente nel n. 4, esamineremo i casi che due delle sfere inscritte abbiano ugual raggio e più in particolare che le quattro sfere possano suddividersi in due coppie di sfere, ciascuna coppia formata da sfere di ugual raggio.

In questi casi le relazioni fra i dati si riducono ad una soltanto che nel caso di due coppie di sfere di ugual raggio (n. 4, b)) sarà data esplicitamente.

(¹) C. F. S. Malfatti, Mem. mat. fis. Soc. Ist. Sc., 10 (1803), 235. Cfr., anche per la bibliografia A. Procissi, Period. Mat., (4) 12 (1932), 289.

(²) Ann. de Mathématiques pures et appliquées (J. Gergonne), (1816-1831), I, 196; II, 287, X, 298. Cfr. anche J. Steiner, *Einige geometrische Betrachtungen*, Journ. f. Math. (Crelle), I (1826), (161-184) 183-184, oppure Ges. Werke, I (Berlin, 1882) 40.

Infine nel n. 5 esamineremo il caso che tre sfere abbiano ugual raggio, cioè il caso della piramide regolare triangolare che ammette sempre una soluzione.

2. Una limitazione del raggio delle sfere.

a) Sia T un tetraedro per il quale il problema delle quattro sfere sia risolubile e siano r_1, r_2, r_3, r_4 $(r_i>0)$ i raggi delle quattro sfere $\Sigma_i=(O_i\,;\,r_i)$, $(i=1, \ldots, 4)$ di centro O_i e raggio r_i. Essendo queste sfere tangenti esternamente due a due si avrà

$$\overline{O_iO_k}=r_i+r_k\,,\ (i\neq k).$$

Chiameremo V_i il vertice di T cui appartengono le tre facce tangenti alla sfera di centro O_i, e indicheremo con ε_i la misura dell'angolo del cono circolare C_i inscritto nel triedro di T di vertice V_i, cosicchè si ha $0<\varepsilon_i<\pi/2$. Gli assi dei coni C_1, C_2, C_3, C_4 si incontrano in un punto O che è il centro della sfera Σ inscritta in T, ne indicheremo con R il suo raggio; perciò $\Sigma=(O;\ R)$.

Si osservi che i punti degli spigoli di T uscenti da V_i, salvo V_i, sono esterni al cono C_i.

b) Qualunque sfera di raggio $>R$, tangente a tre facce di T ha punti esterni a T perciò dovrà aversi $0<r_i\leq R$; proveremo più precisamente che si ha

$$r_i<R,\ (i=1, \ldots, 4). \tag{1}$$

Supposto che vi sia un $r_i=R$, ad es. $r_4=R$, O_4 coincide con O e le sfere Σ_1, Σ_2, Σ_3 inscritte nei coni C_1, C_2, C_3, sono tangenti esternamente tra loro due a due, e tangenti esternamente a Σ.

Noi vedremo che questa circostanza non può verificarsi, proveremo anzi più in generale che *non possono esistere tre sfere Σ_1, Σ_2, Σ_3 tangenti esternamente tra loro due a due, e simultaneamente esterne o tangenti a Σ.*

Sia infatti H il punto di contatto della sfera Σ colla faccia V_1, V_2, V_3 di T (v. Fig. 1); il segmento $\overline{OH}$ taglia il triangolo O_1, O_2, O_3 in un punto interno, in conseguenza se P_1, P_2, P_3 sono le proiezioni ortogonali sul piano V_1, V_2, V_3, rispettivamente di O_1, O_2, O_3, il punto H è interno al triangolo P_1, P_2, P_3, e dovrà essere quindi

$$P_1\widehat{H}P_2+P_2\widehat{H}P_3+P_3\widehat{H}P_1=2\pi. \tag{2}$$

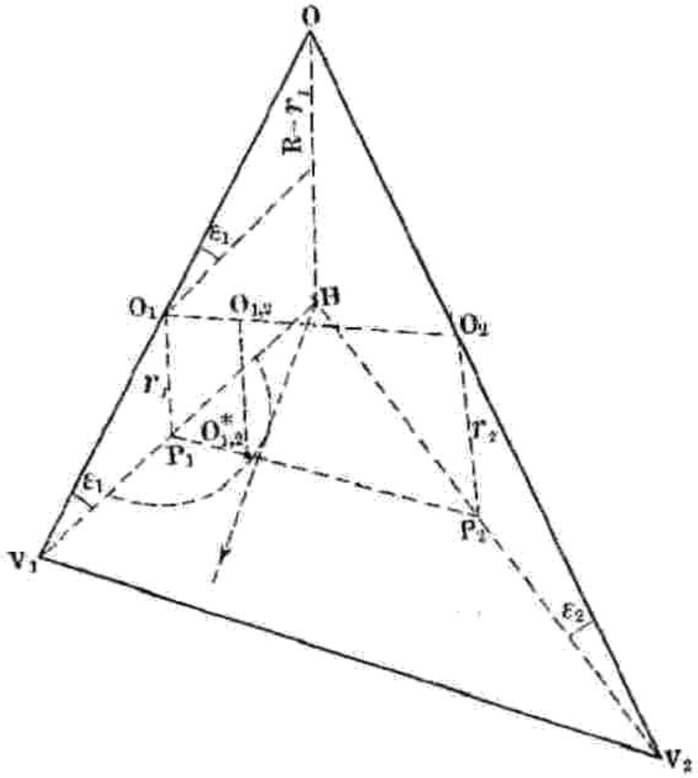

Fig. 1

Per le nostre ipotesi è $\overline{O_iO}=r_i+R+\tau_iR$, con $0\leq\tau_i$, $(i=1, 2, 3)$ ed essendo $H\widehat{V_i}O=\varepsilon_i$ risulta

$$R-r_i=(R+r_i+\tau_iR)\sin\varepsilon_i\,,$$

perciò

$$r_i=R\,\frac{1-\sin\varepsilon_i-\tau_i\sin\varepsilon_i}{1+\sin\varepsilon_i}\,.$$

Si ha anche

$$\overline{P_iH}=(R+\tau_i+\tau_iR)\;\cos\varepsilon_i=R\,\frac{2+\tau_i}{1+\sin\varepsilon_i}\;\cos\varepsilon_i$$

$$\frac{r_i}{\overline{P_iH}}=\frac{1-\sin\varepsilon_i-\tau_i\sin\varepsilon_i}{(2+\tau_i)\cos\varepsilon_i}\leq\frac{1}{2}\,\frac{1-\sin\varepsilon_i}{\cos\varepsilon_i},$$

e poichè $1-\sin\varepsilon_i\leq\cos\varepsilon_i$ ne viene

$$\frac{r_i}{\overline{P_iH}}\leq\frac{1}{2}\,. \tag{3}$$

Le due sfere Σ_i, $\Sigma_k (i, k=1, 2, 3;\ i \neq k)$ si tocchino nel punto $O_{i,k}$ del segmento $\overline{O_i O_k}$; se indichiamo con $O^*_{i,k}$ la proiezione ortogonale di $O_{i,k}$ sul piano V_1, V_2, V_3 questo punto $O^*_{i,k}$ appartiene al segmento $\overline{P_i P_k}$, perciò

$$P_i \widehat{H} P_k = P_i \widehat{H} O^*_{i,k} + O^*_{i,k} \widehat{H} P_k . \tag{4}$$

Se nel piano $V_1V_2V_3$ consideriamo il cerchio con centro P_i e raggio r_i, per (3) il punto H è esterno a questo cerchio che è diviso dalla semiretta $\overrightarrow{HV_i}$ in due semicerchi e al semicerchio che è dalla stessa parte di V_k rispetto alla retta HV_i appartiene $O^*_{i,k}$ perciò per la (3)

$$\sin V_i \widehat{H} O^*_{i,k} = \frac{r_i}{\overline{P_1 H}} \leq \frac{1}{2},$$

e in conseguenza

$$V_i \widehat{H} O^*_{i,k} \leq \pi/6.$$

Si ha analogamente $O^*_{i,k} \widehat{H} V_k \leq \pi/6$ e per la (4)

$$V_i \widehat{H} V_k \leq \pi/3$$

e la (2) è quindi impossibile.

La (1) risulta così dimostrata.

c) Notiamo che dalla dimostrazione fatta in b) segue che se Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *risolvono il problema delle quattro sfere tangenti, e consideriamo tre qualunque di esse, una almeno fra queste deve secare la sfera* Σ.

Nel n. 3) proveremo che tutte sono secanti di Σ.

3. Condizioni di risolubilità del problema.

a) Assegnato il tetraedro T sono senz'altro note le distanze $d_i - \overline{OV_i} (i=1, \ldots, 4)$ delle congiungenti il centro O della sfera inscritta a T e gli angoli $V_i \widehat{O} V_k = \omega_{i,k} (i \neq k,\ i, k=1, \ldots, 4;\ \omega_{i,k} = \omega_{ki})$. Consideriamo il triangolo $V_i O V_k$. Poichè r_i è la distanza di O_i dalle tre facce del triedro di T di vertice V_i è $\overline{V_i O_i} = r_i / \sin \varepsilon_i$ e perciò $\overline{OO_i} = d_i - r_i / \sin \varepsilon_i$, e analogamente $\overline{OO_k} = d_k - r_k / \sin \varepsilon_k$, e siccome $\overline{O_i O_k} = r_i + r_k$ ne viene che tra le r_i e le r_k intercedono le sei relazioni quadratiche (v. Fig. 2).

$$(5)\qquad f(r_i, r_k)=(r_i+r_k)^2-\left(d_i-\frac{r_i}{\sin\varepsilon_i}\right)^2-\left(d_k-\frac{r_k}{\sin\varepsilon_k}\right)^2+$$

$$+2\left(d_i-\frac{r_i}{\sin\varepsilon_i}\right)\left(d_k-\frac{r_k}{\sin\varepsilon_k}\right)\cos\omega_{i,k}=0,$$

$$(i, k)=(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4).$$

Eliminando r_1 tra le due equazioni $f(r_1, r_2)=0$, $f(r_1, r_3)=0$ si ottiene l'equazione algebrica $G(r_2, r_3)=0$ ed eliminando r_2 fra $G(r_2, r_3)=0$ e $f(r_2, r_3)=0$ si ottiene l'equazione $H_1(r_3)=0$.

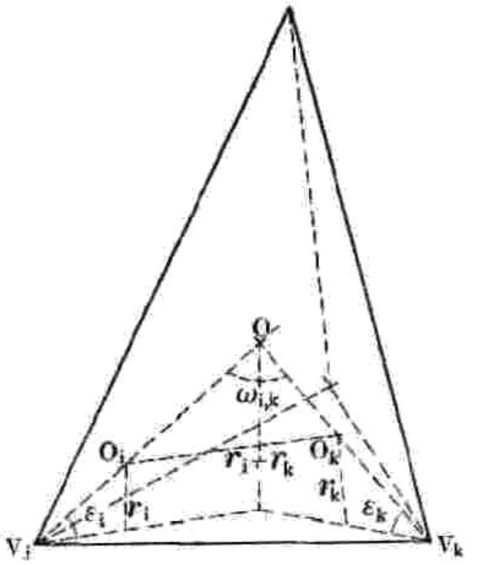

Fig. 2

Analogamente eliminando r_2 tra $f(r_2, r_3)=0$, $f(r_2, r_4)=0$ si ottiene l'equazione algebrica $G_1(r_3, r_4)=0$ ed eliminando r_4 fra $G_1(r_3, r_4)=0$ ed $f(r_3, r_4)=0$ si ottiene un'altra equazione $H_2(r_3)=0$; l'eliminazione infine di r_3 fra $H_1(r_3)=0$, $H_2(r_3)=0$ conduce ad una prima condizione di risolubilità del sistema (5).

Una seconda condizione si ricava seguendo il procedimento ora indicato cambiando r_3 con r_4.

Che il problema delle quattro sfere inscritte in un tetraedro T implichi fra i sei parametri che determinano T due condizioni deriva dalla seguente semplice considerazione.

Tutti gli elementi di un tetraedro sono ad es. determinati dalle tre lunghezze degli spigoli per un suo vertice V e dai tre angoli diedri del triedro di T con vertice in V, in tutto da sei parametri.

Le quattro sfere che risolvono il problema dipendono invece dai quattro parametri r_1, r_2, r_3, r_4 e dovranno quindi intercorrere due relazioni fra i primi 6 parametri.

b) Noi nei numeri seguenti considereremo il problema particolare in cui sia: i) $r_1=r_2$; ii) $r_1=r_2$, $r_3=r_4$; iii) $r_1=r_2=r_3$, e per questo riescono utili alcune considerazioni sull'equazione (5).

Abbiamo visto che si ha per ogni r_k la limitazione $0<r_k<R$, e fissato r_k per la (5) per r_i si ricavano due valori.

Per restare nel campo reale, fissato r_k, $0<r_k<R$, vogliamo dare le condizioni perchè la (5) abbia reali le radici r_i.

L'intersezione della sfera Σ inscritta in T col piano V_iV_kO è un circolo limitato dalla circonferenza $\gamma_{i,k}$ di centro O e raggio R; i due coni circolari C_i, C_k sono tagliati dallo stesso piano V_iV_kO dalle due coppie di semirette $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$; $a'_{k,i}$, $a''_{k,i}$ uscenti rispettivamente da V_i e V_k e tangenti alla circonferenza $\gamma_{i,k}$.

Poichè la retta V_iV_k è esterna alle sfere Σ_i, Σ_k, le semirette $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$; $a'_{k,i}$, $a''_{k,i}$ sono tutte dalla stessa parte rispetto alla retta V_iV_k e senza alterare le generalità supporremo

$$\widehat{\overrightarrow{V_iV_k},\, a'_{i,k}}<\widehat{\overrightarrow{V_iV_k},\, a''_{i,k}}, \qquad \widehat{\overrightarrow{V_kV_i},\, a'_{k,i}}<\widehat{\overrightarrow{V_kV_i},\, a''_{k,i}}.$$

Se indichiamo con $c_{i,k}$, $c_{k,i}$ le circonferenze intersezioni del piano V_iV_kO rispettivamente colle sfere Σ_i, Σ_k, $c_{i,k}$ e $c_{k,i}$ hanno rispettivamente i raggi r_i, r_k, i loro centri O_i, O_k rispettivamente interni ai segmenti $\overline{V_iO}$, $\overline{V_kO}$; le semirette $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ sono tangenti alla circonferenza $c_{i,k}$ e le $a'_{k,i}$, $a''_{k,i}$ alla circonforenza $c_{k,i}$.

Se indichiamo con $r_{k,i}$ (Fig. 3) il raggio della circonferenza $e_{k,i}$ inscritta al triangolo determinato da $a'_{k,i}$, $a''_{k,i}$, $a'_{i,k}$ abbiamo che perchè una circonferenza $c_{k,i}$ risulti tangente esternamente o secante di $a'_{i,k}$ è necessario si abbia $r_k \geq r_{k,i}$.

Se si prende $r_k=r_{k,i}$ chiamando con S e T rispettivamente i punti di contatto di $\gamma_{i,k}$, $e_{k,i}$ col raggio $a'_{i,k}$ si ha che il raggio di $\gamma_{i,k}$ vale $\overline{V_iS}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_i(=R)$; la $c_{k,i}$ coincide con $e_{k,i}$ e perciò il raggio di $c_{i,k}$ è dato da $\overline{V_iT}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_i$, e se $\overline{V_iT}\geq\overline{V_iS}$ la $c_{i,k}$ ha raggio $\geq R$.

Ne viene che se $r_k=r_{k,i}$ per la risolubilità del problema delle quattro sfere occorre che risulti $\overline{V_iT}<\overline{V_iS}$, e in questo caso l'equazione (5) ammette la sola radice doppia $r_i=\overline{V_iT}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_i$.

Escluso questo caso, il fissato valore r_k dovrà soddisfare la limitazione $R>r_k>r_{k,i}$, e perciò la corrispondente circonferenza $c_{k,i}$ seca la semiretta $a'_{i,k}$ in due punti A, B, con $0<\overline{V_iA}<\overline{V_iB}$, ed è esterna ad $a''_{i,k}$.

Indipendentemente dal problema in esame, ad ogni $r_i>0$ che soddisfa l'equazione (5) corrisponde una circonferenza, che indicheremo ancora con $c_{i,k}$ tangente a $c_{k,i}$, ed è ora facile provare che la (5) ammette due radici reali r_i distinte cui corrispondono appunto due circonferenze $c_{i,k}$ tangenti a $c_{k,i}$.

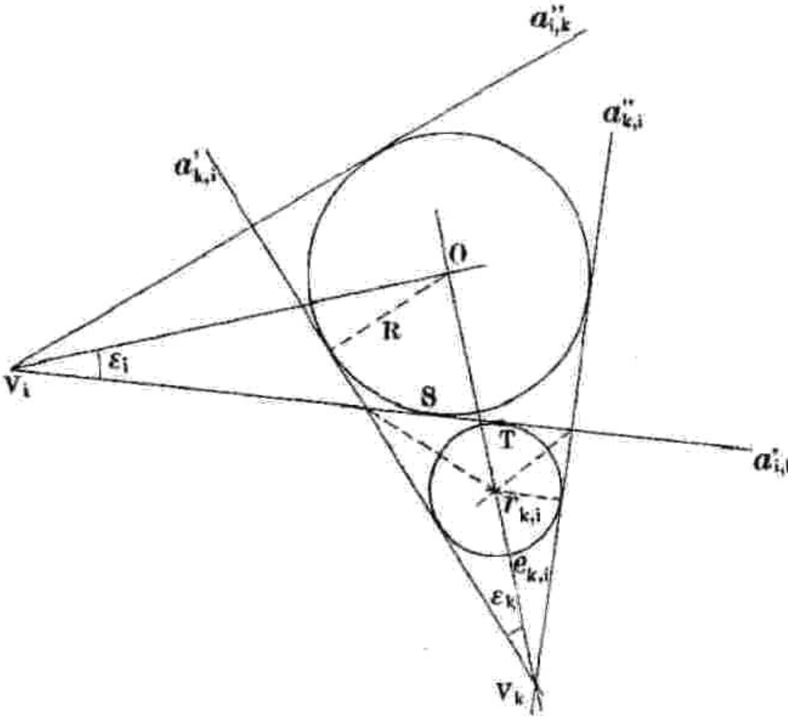

Fig. 3

Sia X un punto variabile su $\overrightarrow{V_iO}$. Se la distanza di X da V_i è sufficientemente piccola tutti i punti del segmento $\overline{V_iX}$ sono centri di circonferenze tangenti ad $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ ed esterne a $c_{k,i}$; mentre un punto X di $\overrightarrow{V_iO}$, la cui proiezione ortogonale su $a'_{i,k}$ appartiene al segmento $\overline{AB}$ non ha questa proprietà. Se $\overline{V_iO_i}$ è l'estremo superiore dei segmenti $\overline{V_iX}$ per i quali vale la proprietà dichiarata, il punto O_i è il centro di una circonferenza $c_{i,k}$ tangente esternamente a $c_{k,i}$; infatti se $c_{i,k}$ fosse esterna a (secante di) $c_{k,i}$ si potrebbe far variare X in un intervallo $\overline{X_0O_i}$, $0<\overline{V_iX_0}<\overline{V_iO_i}$, in maniera che le corrispondenti circonferenze di centro X, tangenti ad $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ sarebbero esterne (secanti) di $c_{k,i}$ ed O_i non avrebbe la proprietà di estremo dichiarata.

Per analoghe considerazioni $c_{i,k}$ non può essere tangente internamente a $c_{k,i}$.

Ripetendo i ragionamenti precedenti, partendo da una circonferenza tangente ad $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ il cui centro abbia la sua proiezione ortogonale su $a'_{i,k}$ appartenente ad AB e confrontando questa circonferenza con quelle tangenti ad $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ e raggio sufficientemente grande si arriva all'esistenza di una seconda circonferenza di raggio $r_i^* > r_i$ tangente ad $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$ ed esternamente a $c_{k,i}$; r_i^* rappresenta la seconda radice dell'equazione (5).

Si consideri ora la circonferenza $\gamma_{i,k} = (O;\ R)$; per rispetto ad essa sono possibili i seguenti casi (v. Fig. 4):

i) se $\overline{V_iA} < \overline{V_iB} < \overline{V_iS}$ è $0 < r_i < r_i^* < R$;

ii) se $\overline{V_iA} < \overline{V_iB} = \overline{V_iS}$ è $0 < r_i < r_i^* = R$;

iii) se $\overline{V_iA} < \overline{V_iS} < \overline{V_iB}$ è $0 < r_i < R < r_i^*$

iv) se $\overline{V_iS} = \overline{V_iA} < \overline{V_iB}$ è $R = r_i < r_i^*$.

v) se $\overline{V_iS} = \overline{V_iA} < \overline{V_iB}$ è $0 < R < r_i < r_i^*$;

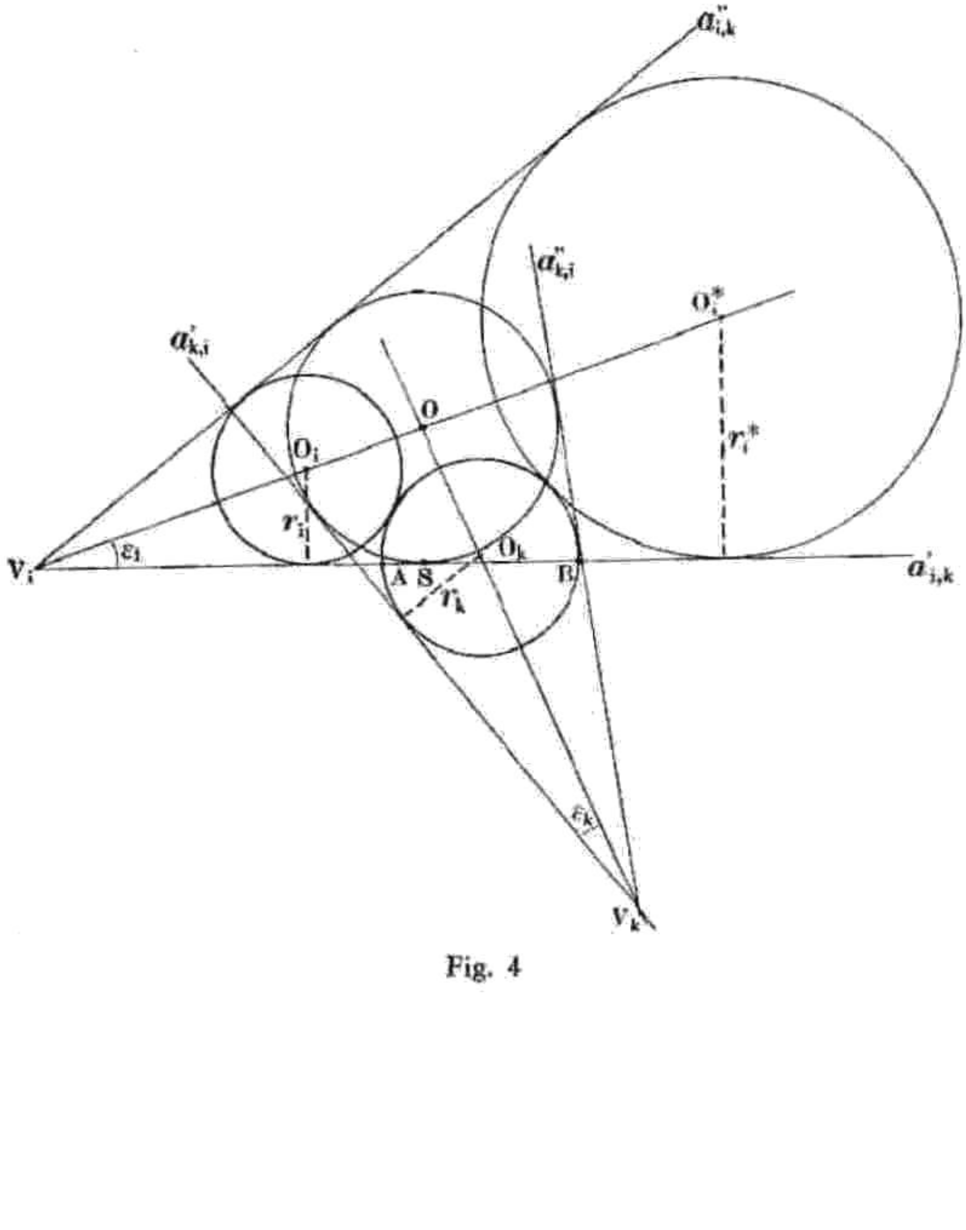

Fig. 4

Dalle cose dette segue che se $c_{k,i}$ è secante di $\gamma_{i,k}$ almeno una radice r_i dell'equazione (5) è $< R$.

c) Vogliamo mettere in evidenza il fatto che *se l'angolo* $V_i\widehat{O}V_k$ *è retto od ottuso, l'esistenza di due circonferenze* $c_{i,k}$, $c_{k,i}$, *con i centri interni a* $\overline{V_iO}$, $\overline{V_kO}$, *tangenti esternamente, importa che ciascuna di esse è secante di* $\gamma_{i,k}$.

Infatti se ad es. $c_{k,i}$ fosse tangente esternamente a $\gamma_{i,k}$ oppure esterna a $\gamma_{i,k}$ si avrebbe $\overline{OO_k} \geq R + r_k$, $r_i + r_k = \overline{O_iO_k} \geq R + r_k$, $r_i \geq R$, e ciò non può essere (v. fig. 5).

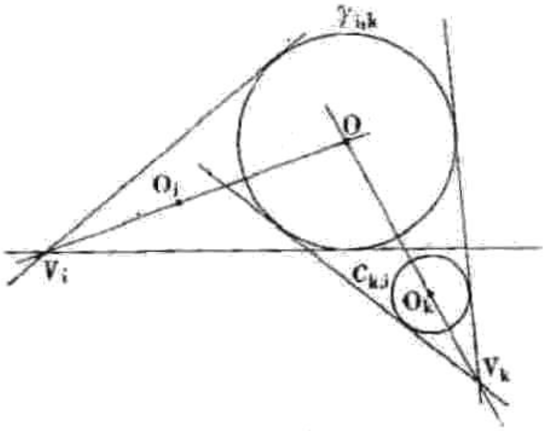

Fig. 5

d) Completeremo il risultato del n. 2, c) provando che *se il problema delle quattro sfere è risolubile, ciascuna delle quattro sfere* Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *è secante di* Σ.

Per questo premetteremo il seguente lemma:

Se V_1, V_2, V_3, V_4 *sono i vertici di un tetraedro* T, *ed* O *è un suo punto interno, o esistono tre vertici distinti* V_i, V_k, V_l *tali che indicando con* V_m *il quarto vertice risulta*

$$V_i\widehat{O}V_m \geq \pi/2, \quad V_k\widehat{O}V_m \geq \pi/2, \quad V_l\widehat{O}_lV_m \geq \pi/2.$$

oppure se questa circostanza non si verifica, i quattro vertici possono ripartirsi in due gruppi V_i, V_k; V_l, V_m *tali che* $V_l\widehat{O}V_i \geq \pi/2$, $V_l\widehat{O}V_k \geq \pi/2$, $V_l\widehat{O}V_m < \pi/2$, *e inoltre uno almeno degli angoli* $V_i\widehat{O}V_m$, $V_k\widehat{O}V_m$ *è* $> \pi/2$.

Sia infatti Π il piano condotto per O normale alla bisettrice dell'angolo $V_1\widehat{O}V_2 (< \pi)$.

Tutte le semirette per O appartenenti a Π o appartenenti al semispazio limitato da Π che non contiene V_1 e V_2 (v. Fig. 6) non possono formare simultaneamente angoli acuti con $\overrightarrow{OV_1}$, $\overrightarrow{OV_2}$, e siccome uno almeno dei vertici V_3, V_4 è interno al semispazio ora considerato ne segue che uno almeno dei raggi $\overrightarrow{OV_3}$, $\overrightarrow{OV_4}$ forma con $\overrightarrow{OV_1}$ oppure con $\overrightarrow{OV_2}$ un angolo $\geq \pi/2$.

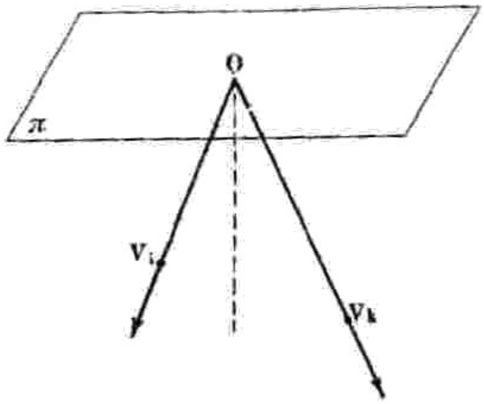

Fig. 6

Sia ad es. $V_1\widehat{O}V_3 \geq \pi/2$.

Se consideriamo la coppia $\overrightarrow{OV_2}$, $\overrightarrow{OV_4}$ per il ragionamento testè fatto $\overrightarrow{OV_2}$ oppure $\overrightarrow{OV_4}$ debbono formare con $\overrightarrow{OV_1}$ oppure con $\overrightarrow{OV_2}$ un angolo $\geq \pi/2$.

Ne viene che senza ledere le generalità possiamo supporre che $\overrightarrow{OV_3}$ formi sia con $\overrightarrow{OV_1}$ sia con $\overrightarrow{OV_2}$ angoli $\geq \pi/2$.

Si conduca per O il piano Π^* normale ad $\overrightarrow{OV_3}$; rispetto a Π^*, V_1 e V_2 sono sopra Π^* stesso o dalla parte opposta di V_3. Se anche V_4 appartiene a Π^* il lemma è vero; resta allora da considerare il caso che $\overrightarrow{OV_4}$ formi con $\overrightarrow{OV_3}$ un angolo $< \pi/2$.

In questo ultimo caso $\overrightarrow{OV_4}$ deve formare con uno almeno dei raggi $\overrightarrow{OV_1}$, $\overrightarrow{OV_2}$ un angolo $\geq \pi/2$ perchè in caso opposto ove si avesse $V_1\widehat{O}V_4 < \pi/2$, $V_2OV_4 < \pi/2$, $V_3\widehat{O}V_4 < \pi/2$ i quattro raggi $\overrightarrow{OV_1}$ $\overrightarrow{OV_2}$, $\overrightarrow{OV_3}$, $\overrightarrow{OV_4}$ sarebbero della stessa parte rispetto al piano per O normale ad $\overrightarrow{OV_4}$ e ciò è assurdo, essendo O interno al tetraedro. Il lemma è così dimostrato.

e) Tenuto conto di c) e del lemma dimostrato in d) segue che *le quattro sfere* Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *tagliano* Σ.

Infatti se $V_1\widehat{O}V_4 \geq \pi/2$, $V_2\widehat{O}V_4 \geq \pi/2$, $V_3\widehat{O}V_4 \geq \pi/2$ per c) le sfere (Σ_1, Σ_4), (Σ_2, Σ_4), (Σ_3, Σ_4) tagliano Σ, e così pure se $V_1\widehat{O}V_3 \geq \pi/2$,

$V_2\widehat{O}V_3 \geq \pi/2$, $V_1\widehat{O}V_4 \geq /2$, anche le tre coppie di sfere (Σ_1, Σ_3), (Σ_2, Σ_3), (Σ_1, Σ_4) tagliano Σ.

4. Condizioni necessarie e sufficienti perchè il problema delle quattro sfere sia risolubile nel caso che due sfere abbiano ugual raggio, oppure con due coppie di sfere di ugual raggio.

a) Supponiamo che il problema delle quattro sfere tangenti sia risolubile e sia con le nostre notazioni

$$r_1 = r_2 \tag{6}$$

cioè Σ_1 e Σ_2 abbiano ugual raggio.

Il piano Π tangente a Σ_1 e Σ_2 nel loro punto di contatto contiene i centri di Σ_3 e Σ_4; Π è perciò un piano di simmetria per la configurazione delle quattro sfere Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 e ciò implica che i piani delle due facce $V_1V_3V_4$, $V_2V_3V_4$ sono simmetrici rispetto a Π e le due facce $V_1V_2V_3$, $V_1V_2V_4$ sono ortogonali a Π, perciò i vertici V_3 e V_4 sono su Π e si ha (v. Fig. 7)

$$\overline{V_1V_3} = \overline{V_2V_3}\,; \quad \overline{V_1V_4} = \overline{V_2V_4}\,. \tag{7}$$

Inversamente *se sono verificate le* (7) *e il problema delle quattro sfere è risolubile,* dovrà valere la (6).

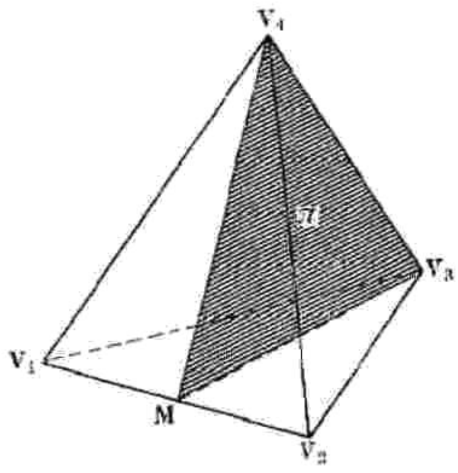

Fig. 7

Supponiamo per assurdo $r_1 \neq r_2$, ad es.

$$r_1 < r_2\,. \tag{8}$$

Per il lemma del n. 3, d), appartenendo il cento O della sfera inscritta al tetraedro T al piano Π, e per la simmetria di $\overline{OV_1}$, $\overline{OV_2}$ rispetto a Π, ne viene che

$$V_1\widehat{O}V_3 = V_2\widehat{O}V_3 \geq \pi/2, \quad V_1\widehat{O}V_4 = V_2\widehat{O}V_4 \geq \pi/2.$$

Le sfere Σ e Σ_1 sono entrambe inscritte nel cono circolare C_1 e ancora inscritta a questo stesso cono risulta la sfera Σ_2^* simmetrica di Σ_2 rispetto al piano Π. Detto con O_2^* il centro di Σ_2^* si ha (v. Fig. 8)

$$\overline{VO_1} < \overline{VO_2^*} < \overline{VO}.$$

Le Σ_1 e Σ_2^* sono entrambe di raggio $<R$ e tangenti esternamente alla sfera Σ_3, e poichè $V_1\widehat{O}V_3 \geq \pi/2$ ragionando come in 3, c) risulta

$$r_1 + r_3 = \overline{O_1O_3} > \overline{O_2^*O_3} = r_2 + r_3,$$

perciò $r_1 > r_2$ e ciò è contro la (8).

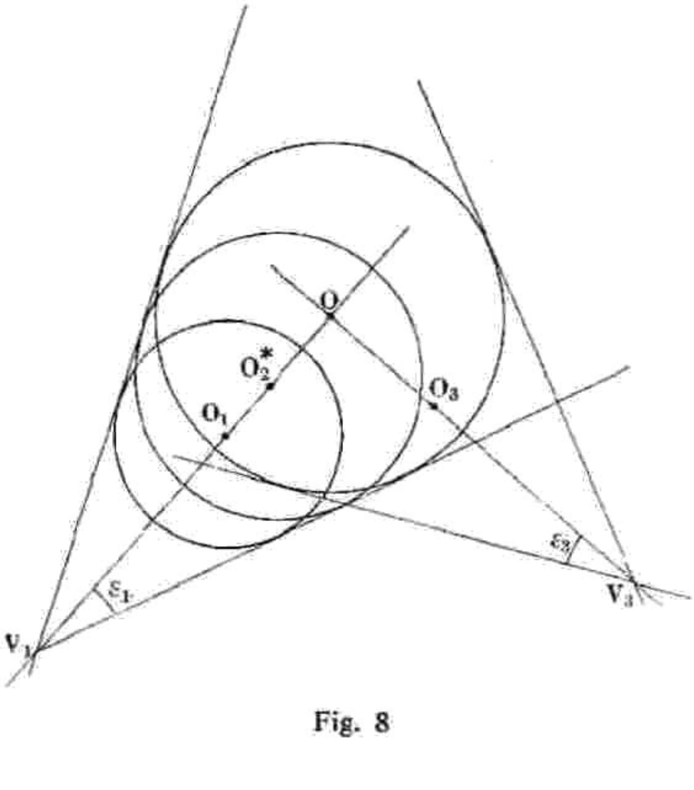

Fig. 8

È dunque $r_1 = r_2$, e le due sfere Σ_1 e Σ_2 si toccano in un punto del piano Π.

Supposto che il problema delle quattro sfere sia risolubile per il tetraedro T possiamo facilmente ricavare il valore λ di r_1, r_2. $(r_1 = r_2 = \lambda)$.

Si indichi con v il volume (noto) di T e siano f_1, f_2, f_3, f_4 le aree (note) delle quattro facce di T opposte rispettivamente a V_1, V_2, V_3, V_4. Indicato con R il raggio della sfera inscritta a T è $(f_1+f_2+f_3+f_4)R=3v$, $(f_1=f_2)$.

Se indichiamo con M il punto medio di $\overline{V_1V_2}$ e con $\sigma_{3,4}$ la superficie (nota) del triangolo MV_3V_4, λ è il raggio della sfera iscritta al tetraedro $V_1MV_3V_4$ il cui volume vale $v/2$; abbiamo allora

$$\left(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2+\frac{1}{2}f_3+\frac{1}{2}f_4+\sigma_{3,4}\right)\frac{\lambda}{3}=\frac{1}{2}v=\frac{1}{6}(f_1+f_2+f_3+f_4)R$$

perciò

$$\lambda=r_1=r_2=R\,\frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{f_1+f_2+f_3+f_4+2\sigma_{3,4}}\,,\ (f_1=f_2). \tag{9}$$

Con le notazioni precedentemente dichiarate r_3, r_4 sono rispettivamente uguali alle radici minime positive delle due equazioni di secondo grado

$$\begin{aligned}(r_i+\lambda)^2-\left(d_i-\frac{r_i}{\sin\varepsilon_i}\right)^2-\left(d_1-\frac{\lambda}{\sin\varepsilon_1}\right)^2+\\ +2\left(d_i-\frac{r_i}{\sin\varepsilon_i}\right)\left(d_1-\frac{\lambda}{\sin\varepsilon_1}\right)\cos\omega_{1,i}=0\end{aligned} \tag{10}$$

$(i=3, 4)$, e la *condizione necessaria e sufficiente perchè il problema delle quattro sfere sia risolubile per T è che r_3, r_4 soddisfino l'equazione*

$$\begin{aligned}(r_3+r_4)^2-\left(d_3-\frac{r_3}{\sin\varepsilon_3}\right)^2-\left(d_4-\frac{r_4}{\sin\varepsilon_4}\right)^2+\\ +2\left(d_3-\frac{r_3}{\sin\varepsilon_3}\right)\left(d_4-\frac{r_4}{\sin\varepsilon_4}\right)\cos\omega_{3,4}=0,\end{aligned} \tag{11}$$

b) Il caso, particolarmente semplice è che oltre le (7) si abbia $\overline{V_2V_3}=\overline{V_2V_4}$, sia cioè (v. Fig. 9)

$$\overline{V_1V_2}=\overline{V_2V_3}=\overline{V_1V_4}=\overline{V_2V_4}\,. \tag{12}$$

il che comporta che r_3 e r_4 sono uguali, $(r_3=r_4=\mu)$. In questo caso se N è il punto medio di V_3V_4 e si indica con $\sigma_{1,2}$ l'area del triangolo

V_1V_2N e teniamo conto delle (9) si ha

$$(13_1) \qquad \lambda = r_1 = r_2 = R \frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{f_1+f_2+f_3+f_4+2\sigma_{3,4}}$$

$$(13_2) \qquad \mu = r_3 = r_4 = R \frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{f_1+f_2+f_3+f_4+2\sigma_{1,2}}$$

$$(f_1=f_2\ ;\ f_3=f_4)$$

e perciò *condizione necessaria e sufficiente perchè il problema delle quattro sfere sia risolubile con due coppie di sfere, aventi i raggi di ogni coppia uguali, è che indicando con* λ *e* μ *rispettivamente i raggi di ciascuna coppia, i valori di* λ *e* μ *dati* (con le nostre notazioni) *dalle* (13_1), (13_2) *soddisfino la relazione*

$$(14) \qquad \boxed{(\lambda+\mu)^2 - \left(d_1 - \frac{\lambda}{\sin\varepsilon_1}\right)^2 - \left(d_3 - \frac{\mu}{\sin\varepsilon_3}\right) + 2\left(d_1 - \frac{\lambda}{\sin\varepsilon_1}\right)\left(d_3 - \frac{\mu}{\sin\varepsilon_3}\right)\cos\omega_{1,3} = 0,}$$

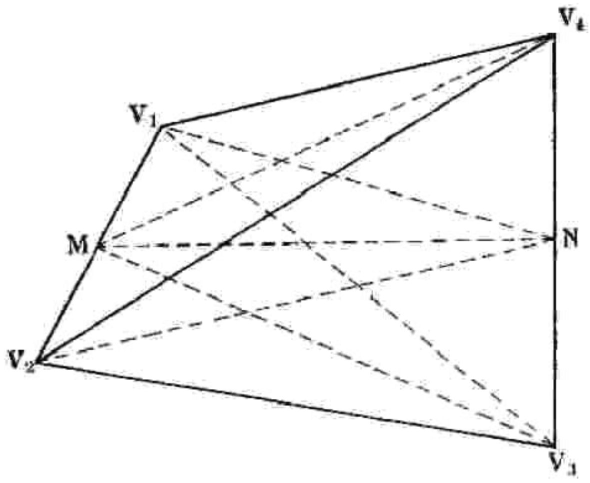

Fig. 9

5. CASO DI TRE SFERE DI UGUAL RAGGIO (PIRAMIDE REGOLARE TRIANGOLARE).

a) In base alle considerazioni svolte in principio del n. 4 se per il tetraedro T è risolubile il problema delle quattro sfere con tre fra esse di ugual raggio è necessario che il tetraedro T sia una piramide regolare triangolare.

Inversamente è facile vedere che *per una piramide regolare triangolare il problema delle quattro sfere tangenti è sempre possibile ed ha una sola soluzione.*

Sia $\overline{V_1V_2}=\overline{V_2V_3}=\overline{V_3V_1}$, $\overline{V_1V_4}=\overline{V_2V_4}=\overline{V_3V_4}$.

Costruite secondo il n. 4, a) le due sfere tangenti esternamente Σ_1, Σ_2 (di ugual raggio), per simmetria, anche la sfera Σ_3 con lo stesso raggio, inscritta al triedro di vertice V_3, è tangente esternamente a Σ_1 e Σ_2.

Una sfera $\Sigma'(\rho)$ inscritta al triedro di vertice V_4 e di raggio ρ sufficientemente piccolo è esterna a Σ_1, Σ_2, Σ_3 e ragionando come in 3, b) crescendo ρ, appena la sfera $\Sigma'(\rho)$ tocca esternamente una di queste sfere, per ragioni di simmetria tocca esternamente le altre due.

Volendo passare alle formule nella piramide regolare T di base $V_1V_2V_3$ e di vertice V_4 sia la sua altezza $V_4H=h$, e detto M il punto medio di V_1V_2 sia $M\widehat{V_4}H=\tau$, cioè il cono inscritto al triedro di vertice V_4 abbia l'angolo conico τ, (v. fig. 10).

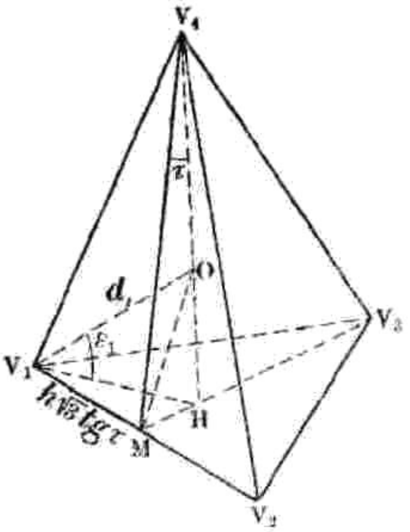

Fig. 10

Le tre sfere inscritte nei triedri di vertici V_1, V_2, V_3 sono di ugual raggio $r(r_1=r_2=r_3=r)$; considerando ad es. quella inscritta al triedro di vertice V_1 essa è anche inscritta al tetraedro T' di vertici $V_1V_3V_4M$.

Si ha

$$\sup(V_1MV_3)=\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2\,\mathrm{tg}^2\,\tau,\quad \sup(V_1V_3V_4)=h^2\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{tg}\,\tau}{\cos\tau},$$

$$\sup(V_1MV_4)=\frac{1}{2}h^2\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{tg}\,\tau}{\cos\tau}\ ,\quad \sup(MV_3V_4)=\frac{3}{2}h^2\,\mathrm{tg}\,\tau,$$

perciò la superficie totale S di T' è data da

$$S=\frac{3h^2\,\mathrm{tg}\,\tau}{2\cos\tau}\,[\sqrt{3}+\cos\tau+\sqrt{3}\sin\tau].$$

Per il volume v di T' si ha $v=(\sqrt{3}/2)h^3\,\mathrm{tg}^2\,\tau$ ed avendosi $Sr=3v$ ne viene

$$r=r_1=r_2=r_3=\frac{h\sqrt{3}\sin\tau}{\sqrt{3}+\cos\tau+\sqrt{3}\sin\tau}. \tag{15}$$

Si osservi che il raggio R della sfera inscritta a T vale

$$R=\overline{OH}=h\,\frac{\sin\tau}{1+\sin\tau} \tag{16}$$

e si possono quindi determinare $\overline{OV_1}=d_1$, $\overline{OV_4}=d_4$ e così pure il seno e il coseno di $O\widehat{V_1}H=\varepsilon_1$ in funzione di h e τ.

Avendosi $\varepsilon_4=\tau$ per il calcolo di r_4 basterà prendere la radice minore dell'equazione (5) corrispondente ad $i=1$, $k=4$.

All'altra radice r_4^* della stessa equazione corrisponde una sfera Σ_4^* tangente alle tre sfere Σ_1, Σ_2, Σ_3, inscritta nel triedro di vertice V_4, e da parte opposta di Σ_4 rispetto a Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b) Consideriamo infine il caso che T sia il tetraedro regolare di lato l.

Se α è la misura dei diedri di T ed f l'area di una faccia, proiettando ortogonalmente le tre facce di vertice comune V_4 sulla faccia $V_1V_2V_3$ si ha $3f\cos\alpha=f$, $\cos\alpha=1/3$ e perciò $\cos\tau=\sin\alpha=2\sqrt{2}/3$. Essendo $l=2h\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\tau$ ne viene $h=l\sqrt{2/3}$ e la (15) fornisce la formula

$$r=r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{l}{2(\sqrt{6}+1)}, \tag{17}$$

e per il raggio R della sfera inscritta la (16) dà:

$$R=\frac{l}{2\sqrt{6}}. \tag{18}$$

G. SANSONE