Varietà e Questioni proposte

Sull'interpolazione nell'uso delle tavole dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche.

Quando si cerca il logaritmo d' un numero che non figura nelle nostre tavole, per esempio il logaritmo del numero 56475,6 (compreso fra i due numeri 56475 e 56476 appartenenti alle dette tavole), si ricorre ad una interpolazione aggiungendo al log 56475 il numero $0{,}6 \times (\log 56476 - \log 56475)$. Questo calcolo sarebbe esatto se i logaritmi crescessero proporzionalmente ai numeri, ma — trattandosi di piccoli accrescimenti — si giustifica in via approssimata mediante la formula del calcolo differenziale che, per h infinitesimo, dà in generale, a meno d' infinitesimi d'ordine superiore,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x).$$

Infatti, questa formula vale per qualunque funzione $f(x)$ che ammetta una *derivata* f' *finita e diversa da zero*; e ciò accade *sempre* per la derivata dalla funzione esponenziale, essendo

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \neq 0$$

per qualunque valore finito di x.

Ora il medesimo procedimento d' interpolazione si può adoperare in generale per riguardo a tavole di altre funzioni, per esempio di funzioni trigonometriche (suppongo di riferirmi a tavole che portino direttamente i valori di sen x, cos x ecc., e non dei loro logaritmi); ma bisogna stare attenti alle *eccezioni* che si possono presentare, in corrispondenza a valori particolari di x per cui la derivata della funzione diventi zero o infinita.

Si tratti per esempio di una *tavola di coseni*. Si ha

$$\frac{d \cos x}{dx} = - \operatorname{sen} x,$$

e quindi, per $x = 0$,

$$\left(\frac{d \cos x}{dx}\right)_0 = 0.$$

Pertanto l'interpolazione basata sul supposto che i piccoli incrementi di $\cos x$ siano proporzionali agli incrementi di x, riesce fortemente inesatta per i valori vicini ad $x = 0$; e occorrendo il coseno d'un numero molto piccolo, conviene calcolarlo in base alla formula

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ [1]}.$$

È facile riconoscere l'errore che si commette, supponendo per esempio che — per ε abbastanza piccolo — siano dati $\cos \varepsilon$ e $\cos 2\varepsilon$, ove si prenda

$$\cos \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \cos \varepsilon = \frac{\cos 2\varepsilon - \cos \varepsilon}{2}.$$

Invero, se ci poniamo nell'ordine d'approssimazione in cui sia lecito trascurare i termini di 4° grado in ε (ma non quelli di 2° grado), avremo

$$\cos\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \cos \varepsilon = - \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2 \cos \varepsilon}{8} = - \frac{5\varepsilon^2}{8},$$

mentre

$$\frac{\cos 2\varepsilon - \cos \varepsilon}{2} = - \frac{3\varepsilon^2}{4}!$$

Queste osservazioni si estendono ad altri casi: p. es. ai valori di $\operatorname{sen} x$ nell'intorno di $x = \frac{\pi}{2}$ ecc.; ma lasciamo al lettore di rendersene conto.

Le considerazioni elementari che abbiamo voluto ricordare all'attenzione dei docenti di matematiche, debbono esser presenti

---

[1] È appena necessario ricordare gli sviluppi di Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

anche ai fisici. Quando essi ammettono in generale che certe variazioni fenomeniche, concepite come *cause*, siano *proporzionali agli effetti*, non fanno in realtà che applicare la formula dell'incremento funzionale: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)$. E debbono guardare se, per avventura, la funzione f che esprime la dipendenza causale non abbia, nel punto che si considera, una derivata nulla o infinita (o mancante). Se in un punto x è $f'(x)=0$, per quel punto l'effetto appare fisso cioè indipendente da piccole variazioni della causa (si pensi agli equilibri stabili!); reciprocamente se $f'(x)=\infty$, si hanno *effetti grandi da cause piccolissime*, cioè *l'apparenza del caso*. Questa è appunto la geniale spiegazione del « caso » data da *Henri Poincairè*.

F. Enriques

Questioni proposte.

35. Se un tetraedro è autoconiugato rispetto ad una sfera, gode delle seguenti proprietà:

1° Le tre somme dei quadrati delle coppie di spigoli opposti sono eguali;

2° Se una faccia è un triangolo equilatero, il tetraedro è una piramide regolare;

3° Se tre spigoli concorrenti in un vertice sono eguali, il tetraedro è regolare;

4° Se tre spigoli consecutivi non situati in un piano sono eguali anche un quarto spigolo è eguale ad essi;

5° Se due spigoli consecutivi sono rispettivamente eguali agli opposti, sono anche eguali fra loro.

G. Lazzeri

36. Si consideri l'equazione

$$x+y+z<N \qquad (N \text{ intero e positivo})$$

e sia α, β, γ una terna di soluzioni intere e positive.

Trovare il numero totale delle terne di soluzioni nelle due ipotesi:

a) che i tre numeri α, β, γ siano diversi da zero;

b) che siano anche diversi fra loro.

A. Catania

37. Sommare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+(1-x)^n}{n^2} \qquad (0<x<1).$$

F. Tricomi