Sul principio di Plücker-Clebsch

Esponiamo qui, senza indugiarci sui presupposti della teoria della eliminazione [1], la dimostrazione del principio di PLUECKER-CLEBSCH secondo la via indicata nel vol. I delle nostre *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, che ha formato oggetto di una critica recente [2]. Pur tralasciando ogni polemica, ci soffermiamo ad illustrare alcune circostanze relative alla dimostrazione stessa, sicchè il suo effettivo valore risulterà chiaro anche ai non specialisti.

Il Principio di PLUECKER-CLEBSCH riguarda il *criterio di compatibilità dei sistemi di* n *equazioni con* n *incognite, contenenti* un certo numero di *parametri*: se il sistema è generalmente incompatibile, non può divenire compatibile per valori particolari dei parametri, senza divenire indeterminato; quindi: se è compatibile e determinato per valori particolari dei parametri esso è ancora compatibile per valori generici.

Questo criterio vuolsi qui stabilire, conforme allo sviluppo storico, facendolo dipendere dal *principio del computo delle costanti*; cioè dal teorema d'invarianza delle dimensioni d'una varietà algebrica, rispetto ai cambiamenti delle coordinate algebriche dei suoi punti [3].

1. Incominciamo dal caso che si presenta a PLUECKER nel problema classico delle *forme canoniche*. Sono date n equazioni

(1) Quali sono stabiliti, per es., nei lemmi I e II delle *Lezioni di Analisi* del SEVERI, pag. 410.

(2) F. SEVERI in « Bollettino di Matematica », giugno, 1935.

(3) *Lezioni*, L. I, 423, 25, vol. I. pagg. 139, 143.

nelle x, della forma

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1(x_1 x_2 \dots x_n) \\ y_2 = \psi_2(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n(x_1 x_2 \dots x_n), \end{cases}$$

dove le ψ designano funzioni razionali che, mettendo in evidenza i polinomi che ne costituiscono numeratore e denominatore, possiamo scrivere

$$\psi_i = \frac{f_i}{g_i}$$

onde le equazioni (1), *rese intere*, assumono la forma

$$(1') \qquad y_i g_i(x_1 \dots x_n) - f_i(x_1 \dots x_n) = 0.$$

Se le equazioni (1) sono incompatibili per valori generici delle y, vuol dire che esse — al variare delle x — rappresentano, entro lo spazio (y), una varietà algebrica V, che non invade l'intero spazio (y) e perciò è irriducibile con meno di n dimensioni, ovvero composta di parti ciascuna delle quali ha meno di n dimensioni. L'asserzione si riconduce a una delle definizioni generali delle varietà algebriche.

Ora, poichè le (1) fanno corrispondere razionalmente ad un punto (x) generico *un* (y), la varietà V definita in corrispondenza a valori generici delle x, è certo irriducibile, e questa V è la varietà totale quando ci si riferisca alle equazioni (1) e si intenda (come d'abitudine) di attribuire alle y, che appaiano indeterminate in corrispondenza ad eventuali x, i relativi valori limiti.

Ma quando ci si riferisca alle equazioni (1'), cioè si intenda di lasciare le eventuali indeterminazioni di qualche y, non è più detto che la V esaurisca la varietà totale che viene rappresentata dalle (1') per valori generali e singolari delle x, giacchè la corrispondenza (xy) può contenere qualche *fattore degenere* (rispetto allo spazio (x)), cui risponderà una varietà *singolare* V' descritta dal punto (y), da aggiungersi a V.

Per chiarire meglio la cosa si assumano *a priori* le funzioni razionali fratte ψ come quozienti di polinomi di un medesimo ordine r, ed anzi con un medesimo denominatore

$$f_0 = g_1 = g_2 = \dots = g_n$$

cioè sotto la forma

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1 = \dfrac{f_1(x_1 \dots x_n)}{f_0(x_1 \dots x_n)} \\ y_2 = \psi_2 = \dfrac{f_1(x_1 \dots x_n)}{f_2(x_1 \dots x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n = \dfrac{f_n(x_1 \dots x_n)}{f_0(x_1 \dots x_n)}. \end{cases}$$

dove le f designano polinomi di grado r. Allora la varietà rappresentata dalle x sarà costituita *in generale* dalla sola varietà irriducibile V ad n o meno dimensioni (e, nel primo caso, riempiente tutto lo spazio (y)); l'eccezione (la presenza di fattori degeneri della corrispondenza) che dà luogo a varietà singolari V', risponde all'ipotesi che i polinomi $f_i(x_1 \dots x_n)$ abbiano qualche zero comune, cioè che le $n+1$ ipersuperficie $f=0$ dello spazio (x) ad n dimensioni abbiano a comune un punto o una varietà di punti (comunque composta).

Conviene avvertire però che le formule (2) non danno esattamente tutti i casi che si presentano nell'esame delle (1), perchè quando si vogliano ridurre le ψ ad un comune denominatore, passando dalle (1) alle (2), si introduce talvolta un fattore degenere della corrispondenza (xy) che non figurava nelle (1), e che deve esser tolto se si vogliono considerare le (2) come un *tipo generale* equivalente alle (1). Incontriamo effettivamente questo caso se, nelle (2), alcuni polinomi, diciamo $f_0\, f_1 \dots f_i$, siano divisibili per uno stesso polinomio $\theta(x)$:

$$f_0 = \theta\varphi_0, \quad f_1 = \theta\varphi_1 \dots f_i = \theta\varphi_i.$$

Allora, scrivendo in luogo delle (2) le formule

$$(2')\qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_0} \\ y_2 = \dfrac{\varphi_2}{\varphi_0} \\ \dots\dots \\ y_i = \dfrac{\varphi_i}{\varphi_0} \\ y_{i+1} = \dfrac{f_{i+1}}{\theta\varphi_0} \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \dfrac{f_n}{\theta\varphi_0}, \end{cases}$$

si viene a prescindere da un fattore degenere della corrispondenza (2), per cui alla varietà intersezione di

$$\theta(x) = 0, \quad f_{i+1} = 0, \dots f_n = 0, \tag{3}$$

risponde l'intero spazio (y) (valori delle y tutti indeterminati). Resta tuttavia nella corrispondenza (2') un altro fattore degenere per cui alla varietà (3) risponde una certa varietà cilindrica rappresentata dalle i equazioni

$$y_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad y_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \dots y_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_0},$$

varietà che avrà in generale $n - 1$ dimensioni.

A queste osservazioni aggiungiamo la seguente

Nota. - Suppongasi che dalla corrispondenza (xy) rappresentata dalle formule (1) si stacchi un fattore degenere cui risponda una varietà singolare V' da aggiungersi alla V descritta dal punto (y) omologo di un (x) generico; *sarebbe erroneo ritenere* che la V' debba far parte di V, e così che *la varietà totale descritta dal punto* (y) sia sempre *irriducibile*; infatti, designando con W' la varietà singolare dei punti dello spazio (x) cui risponde V' in (y), si faccia tendere un punto generico del primo spazio a un punto di W', allora il punto (y) che gli corrisponde tenderà in generale ad un punto comune a V e a V', ma *non* ad un punto qualunque di V'.

Esempio. - Scriviamo

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{(x_1 - a)(x_2 - b)}{(x_1 - a)(x_2 - b)} \\ y_2 = (x_1 - a)(x_2 - b). \end{cases}$$

Allora al punto generico (x) risponde nel piano (y) un punto che descrive la retta $y_1 = 1$ (che è la nostra varietà V); invece ai punti della coppia di rette $(x_1 - a)(x_2 - b) = 0$, risponde la retta $y_2 = 0$ (che è la nostra varietà V').

2. Le osservazioni fatte, sebbene non tutte strettamente necessarie per la dimostrazione che abbiamo in vista, hanno tuttavia un valore esplicativo e chiarificatore per lo studioso che imprende a riflettere sull'argomento.

Passiamo ora alla dimostrazione di cui si tratta, riferendoci alle equazioni (1).

Queste equazioni, si è detto, se per valori generici dei parametri y riescono incompatibili, rappresentano nello spazio (y) ad n dimensioni, una varietà irriducibile V ad $n-1$ o meno dimensioni, descritta dal punto che risponde ad un (x) generico; si possono aggiungere a V altre varietà singolari (V', V''...) nascenti da fattori degeneri della corrispondenza (xy), ma — nella nostra ipotesi — anche queste varietà dovranno avere $n-1$ o meno dimensioni.

Prescindiamo dapprima dall'esistenza delle varietà singolari V', V''..., supponendo dunque che la nostra corrispondenza (xy) sia irriducibile.

Valutiamo la *dimensione di questa corrispondenza*, cioè la dimensione della varietà delle coppie di punti omologhi, ossia dei punti dello spazio $(x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n)$ che ne porge la rappresentazione (secondo C. Segre). Siccome ad un punto generico dello spazio (x) ad n dimensioni corrisponde *un* (y), *la dimensione* anzidetta vale n. D'altra parte valutiamo la stessa dimensione a partire dalla varietà V dello spazio (y); ad un punto di questa varietà, ad $r \leq n-1$ dimensioni, corrisponderanno ∞^s punti (x), e la dimensione della corrispondenza sarà $r+s$, onde

$$n = r + s,$$

e quindi

$$s \geq 1,$$

cioè « le equazioni (1) nelle x, che si suppongono generalmente incompatibili, diventando compatibili in corrispondenza ad un punto (y) di V, diventano indeterminate ».

Nell'ipotesi in cui ci siano messi, cioè della irriducibilità della corrispondenza (xy) rappresentata dalle (1), l'asserzione viene giustificata, non solo per il punto (y) di V che corrisponde ad un (x) generico, bensì anche per ogni (y) particolare: giacchè facendo tendere (y) ad un particolare $(\bar{y})$, la varietà ∞^s dei punti omologhi (x), tenderà ad una varietà limite, della stessa dimensione almeno, che non può cadere tutta nell'iperpiano all'infinito dello spazio (x), se possiede qualche punto al finito, come è richiesto dall'ipotesi che il sistema (1) sia compatibile per $y = \bar{y}$.

A priori non è più così quando la corrispondenza (xy) sia riducibile contenendo un fattore degenere, per cui ad una certa varietà W' di (x) risponda una varietà singolare V': allora, a prima vista, si può affermare soltanto che « le equazioni (1), diventando compatibili per valori delle y rispondenti ad un (x) generico, diventano necessariamente indeterminate ».

Il *principio ristretto* così stabilito è *già significativo*: è quello che occorre di fatto nelle consuete applicazioni al problema delle forme canoniche di Pluecker, sviluppate nel seguito delle nostre *Lezioni*. Tuttavia dopo aver porto la dimostrazione di codesto principio ristretto, noi abbiamo enunciato senz'altra spiegazione il principio « per valori particolari delle y », togliendo dunque ogni limitazione. Si può giustificare questo passaggio?

La giustificazione sta in ciò che: per ogni fattore degenere che venga a comparire nella corrispondenza (xy) si può ripetere lo stesso ragionamento fatto per la corrispondenza tra lo spazio (x) e la varietà V.

Consideriamo la corrispondenza che figura come fattore degenere nella (1) fra le varietà singolari W' di (x) e V' di (y): per ipotesi V' ha una dimensione $r < n$, mentre (come spiegheremo) la corrispondenza di cui si tratta ha sempre la dimensione n (almeno); si deduce che un punto di V' nasce da ∞^s punti di W', essendo

$$r + s \geq n$$

ed

$$s \geq 1.$$

Ma perchè si è ammesso che le corrispondenze staccantisi come fattori degeneri dalla (1) conservino sempre la dimensione n, ovvero abbiano una dimensione maggiore?

Ciò appare evidente per chi consideri la corrispondenza (xy) da cui si stacchino fattori degeneri come *particolarizzazione* della corrispondenza irriducibile (cfr. § 1): la varietà - corrispondenza di dimensione n, venendo a spezzarsi, risulterà sempre composta di parti della stessa dimensione o di dimensione maggiore.

In conclusione: *il passaggio dal principio di Plücker-Clebsch ristretto al più largo, suppone soltanto di ripetere il ragionamento dimostrativo, passando da un caso relativamente generale ad una sua particolarizzazione.*

3. *Dimostrazione del principio di Plücker-Clebsch nel caso più generale.*

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato sistemi di equazioni della forma $y_i = \psi_i(x)$. Nelle nostre *Lezioni* (vol. I, pag. 152) abbiamo detto senz'altra spiegazione che il ragionamento si estende, e che il principio del computo delle costanti può essere adoperatò quale criterio di compatibilità dei sistemi d'equazioni algebriche, come la *forma geometrica più generale del principio di Plücker-Clebsch.*

Implicitamente affermiamo così l'identità sostanziale di due principii, che è facile giustificare. Invero, il ragionamento del precedente paragrafo, che si basa sul calcolo delle dimensioni d'una corrispondenza (xy) ci dà, come estensione immediata:

Se fra due varietà algebriche irriducibili V_r *e* W_s, *di dimensioni rispettive* r *ed* s, *intercede una corrispondenza irriducibile di dimensione* n, *quando sia* $\mathrm{n} > \mathrm{r}$ *ad ogni punto di* V_r *corrisponderà un insieme di* ∞^{p} *punti, dove* $\mathrm{p} = \mathrm{n} - \mathrm{r} \geq 1$.

È questo il principio del computo delle costanti, che traduciamo nelle *Lezioni* dandogli la forma che si adopera il più spesso nelle applicazioni, come « principio di reciprocità », cioè dicendo che: se ad un punto generico di W_s corrispondono ∞^q punti di V_r essendo $s + q > r$, ad ogni punto di V_r risponderanno ∞^p punti di W_s, dove $p = s + q - r \geq 1$.

Procediamo a dedurre il principio algebrico di Pluecker-Clebsch sopra enunciato.

Si abbiano le n equazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1(y_1\, y_2 \dots y_n\, x_1\, x_2 \dots x_n) = 0 \\ f_2(y_1\, y_2 \dots y_n\, x_1\, x_2 \dots x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(y_1\, y_2 \dots y_n\, x_1\, x_2 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

dove le f designano dei polinomi. Esse possono interpretarsi come equazioni d'una corrispondenza (xy) fra i due spazi ad n dimensioni (x) e (y) o fra varietà, a meno di n dimensioni, appartenenti a codesti spazi. Certo non si pretenderà che questa corrispondenza sia irriducibile (tanto varrebbe ritenere che debba essere sempre irriducibile una qualsiasi varietà intersezione di n ipersuperficie in S_{2n}!), ma essa risulterà — in ogni caso — composta da un certo numero di corrispondenze irreducibili.

Ora se le equazioni (4) nelle x, sono incompatibili per valori generici dei parametri y, vuol dire che una qualunque delle varietà dello spazio (x) cui rispondono punti (y) a distanza finita è una V_r di dimensione $r < n$, mentre la varietà corrispondente W_s avrà una dimensione $s \leq n$. D'altra parte la corrispondenza di cui si tratta, che compare come fattore nella (xy) definita dalle equazioni (4) (varietà intersezione completa di n ipersuperficie di S_{2n}) ha in generale, ed almeno, la dimensione n.

Si deduce che ad un punto di V_r rispondono ∞^p punti di W_s, con $p \geq n - r \geq 1$.

Se la varietà formata da questi ∞^p punti non cade interamente nell'iperpiano all'infinito dello spazio (x), la qual cosa esprime la compatibilità delle equazioni per i dati y, essa ha una parte della stessa dimensione, o in ogni caso di dimensione maggiore od uguale a $n - r$, che giace al finito: *le equazioni* (4) *nelle* x, *generalmente incompatibili, diventando compatibili per valori particolari delle* y (corrispondenti alla circostanza che il punto (y) cada su V_r) *diventano indeterminate.*

Aggiungasi che non daranno luogo ad eccezione i punti comuni a due varietà V_r e V_t' su cui operino fattori distinti, π e π', della corrispondenza (xy); invero se ad un tale punto (y) rispondono equazioni (4) compatibili nelle x, vuol dire che ad (y) corrisponderanno per effetto di π e π' due varietà rispettivamente di $n - r$ (≥ 1) ed $n - t$ (≥ 1) dimensioni, e di queste (se per quei valori delle x le $f = 0$ sono compatibili) una almeno dovrà trovarsi a distanza finita.

FEDERIGO ENRIQUES – OSCAR CHISINI