Oscar Chisini ed il Suo insegnamento

Riguardo ad Oscar Chisini ed al Suo insegnamento non potrò certo dire nulla che non coincida con quanto è stato e sarà detto, assai meglio che da me, da altri, e in particolare da coloro che ebbero maggiore possibilità di approfittarne per una più lunga durata di contatti e una più stretta affinità di campi di ricerca. Ma forse proprio il fatto di trovarmi in situazione opposta consente a questi brevi cenni e ricordi di aggiungere qualche nota che, per quanto marginale, potrà giovare a integrare e confermare, anzichè solo a ripetere, ciò che tutti diranno.

Come esperienza diretta, posso dire solo dell'influsso avuto dall'unica occasione che ebbi di seguire un Suo corso. Come argomento particolare, concernente una Sua idea attinente ad un campo di mio specifico interesse, intendo illustrare l'importanza concettuale e pratica della nozione di *media* secondo quella che è ormai nota come l'impostazione (e la definizione) del Chisini.

Fu nell'ultimo anno prima della laurea che seguii il corso di Geometria superiore di Chisini. Precisamente, fu nel 1926-27, anno in cui passai al IV anno di Matematica dopo assolto il III anno al Politecnico di Milano; proprio allora era sorta l'Università di Milano, e avevo constatato che ivi si potevano incontrare molte belle cose di matematica oltre quelle cui ci si fermava in Ingegneria. E, proprio allora, Chisini era stato chiamato a Milano.

Molte cose mi colpirono subito, nella personalità e nella *forma mentis* del Chisini. In certo senso — come cercherò di spiegare — potrei dire di esserne stato colto « in contropiede », ossia mediante osservazioni e visioni che, anzichè inserirsi nell'ordine di idee e di preferenze che mi ero formato, tendeva a metterlo in crisi obbligando a riflessioni inattese. Al Politecnico avevo trovato entusiasmante l'Analisi con le sue applicazioni alla Meccanica, alla Fisica, alla Scienza delle costruzioni, all'Elettrotecnica. La Geometria mi era apparsa dapprima come una noiosa continuazione della noiosa geometria analitica liceale, e poi, quando capii il significato di molte cose che c'erano sotto (e che si rivelavano importanti anche per applicazioni nei campi predetti), mi rammaricai che non mi fossero state spiegate nel modo in cui mi apparvero evidenti e belle non appena mi capitò per caso tra le mani una trattazione intrinseca (calcolo vettoriale-omografico, secondo la scuola di Peano).

Dal modo di ragionare di Chisini imparai a rendermi conto che vi sono molti modi di semplificare le cose, di rappresentarle in forma adatta per considerazioni sintetiche, di rigirarle fino a trovare la prospettiva che le rende ovvie, così da realizzare la Sua massima secondo cui il compito della matematica è quello di « evitare di fare i conti ». Si trattava di un modo di « semplificare » diverso da quello della razionalizzazione logico-formale che per primo mi aveva colpito, ma la sensazione di disagio di fronte a questo contrasto di sollecitazioni scomparve gradualmente dando luogo alla convinzione che tutti i modi di semplificare e rendere intuitive le cose potevano e dovevano venir usati, sommandosi e integrandosi e conciliandosi, anzichè venir contrapposti. L'antitesi tra le posizioni di Peano e di Enriques mi appariva così sanabile, ed anzi inesistente, pur di correggere alcune inutili rigidità da una parte ed alcune strane incomprensioni dall'altra.

Al di là di quella contrapposizione (forse ormai ridotta ad evanescente rimembranza storica), sopravvivono comunque delle differenze, altrettanto infondate, tra il modo di vedere una stessa cosa da parte di « analisti » e di « geometri »; l'atteggiamento di Chisini (per quanto ebbi occasione di conoscerlo: non pretendo dire che ne so gran che) mi sembra un utile punto di riferimento e oggetto di ripensamento per superare siffatte differenze di prospettiva. Per esemplificare, una tra le affermazioni di Chisini che mi avevano colpito fu quella che « il punto $z = \infty$ è un punto come tutti gli altri » (sulla sfera complessa); quale contrasto con altre formulazioni in cui a tale punto si dà una posizione a parte, e i punti ove una funzione assume il valore $f(z) = \infty$ si considerano singolari (poli) oppure si pensava addirittura che tali punti scandalosi andassero estirpati asportandone tutto un intorno e — forse — disinfettando accuratamente i bordi del taglio a scanso di contagi o malefizi. Non sarebbe meglio adottare il punto di vista di Chisini al riguardo, salvo quando la natura del problema richieda la convenzione opposta? Perchè non dire ad es. (sia riferendosi al piano complesso inteso come sfera, sia, per z reale, alla retta reale intesa come cerchio) che $w = 1/z$ è una funzione continua (ma non « continua e limitata », dizione che significherebbe « continua nel senso restrittivo usuale »)? Perchè non dire ad es. che qualcosa « tende ad ∞ da sinistra » (o da destra) anzichè dire a « $+\infty$ » (o a « $-\infty$ ») come se si trattase di due punti distinti (e non di scritture convenzionali analoghe a « $+0$ » e « -0 ») [1]?

Per esprimere in forma generica e generale l'utilizzazione che mi piacerebbe veder fatta di idee « tipo Chisini », direi che esse consentirebbero di unificare opportunamente le vedute e i linguaggi di analisti e geometri, introducendo una elasticità di varianti di dettaglio che faccia apparire come tali quelle che irrigidimenti preconcetti fanno apparire invece come differenze fondamentali.

Sul concetto di media.

Parlare del contributo dato da Chisini al chiarimento di tale concetto è cosa importante per diversi motivi. Lo è perchè si è trattato effettivamente di un contributo essenziale; lo è perchè potrebbe sfuggire all'attenzione di chi non avesse presente se non il campo specifico di ricerca del Chisini; lo è forse ancor più, in un senso di più largo significato culturale, perchè mostra il valore di una qualità che tutti i matematici dovrebbero avere ma che in pochi forse raggiunge il grado di vivezza riscontrabile in Chisini. È la qualità di riflettere criticamente su ogni questione che si presenti anche incidentalmente, anche se di per sè estranea ad argomenti di diretto interesse.

L'occasione che indusse Chisini a riflettere sul concetto di media, e a darne la più appropriata interpretazione e definizione, è stata semplicemente (come ricordo di avergli sentito dire) la Sua partecipazione a commissioni di esami di licenza per non so quale tipo di scuola secondaria (forse Istituti tecnici), esami nei quali gli studenti dovevano saper dire qualcosa sulle medie.

Avrà ascoltato, ripetute più volte più o meno bene da chissà quanti studenti, le solite definizioni di particolari medie (aritmetica, geometrica, ecc.) o pseudodefinizioni generiche come « valore intermedio fra i valori dati », e, anzichè limitarsi ad annoiarsi di fronte

---

[1] Così mi son provato a fare in *Matematica logico-intuitiva* (Trieste, 1944; 3ª ed. Cremonese, Roma, 1959); cfr. pp. 124-133 (n. 46: *Lacune rivelate da talune considerazioni sul campo reale*). Anche altri punti vi si ispirano a riflessioni suggerite da idee di Chisini.

a tali insulsaggini, riflettè se e come si potesse trovare un senso cui rispondessero. E diede la risposta perfettamente adeguata, cioè quella che mette in evidenza non le eventuali particolarità formali bensì la *ragion d'essere* e lo *scopo* di una nozione.

Egli stesso spiega così, iniziando il Suo articolo (2), i motivi che lo hanno indotto a scriverlo (e, prima, ad esporne i concetti in una conferenza).

Il concetto di media non sembra abbia attirato l'attenzione dei matematici e degli statistici come forse avrebbe meritato. Definire, come molti fanno seguendo CAUCHY, *« media fra più quantità date una nuova quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate » non significa press'a poco nulla; e definire le singole specie di medie che si incontrano abitualmente (aritmetica, geometrica, armonica, ecc.) è opera bensì esatta, ma puramente formale ed antifilosofica, che può servire, e male, solo per un uso empirico. Eppure il concetto di media è così semplice e così perspicuo che basta fissarvi un poco l'attenzione per ritrovarne la vera natura e la conseguente definizione matematica, come il lettore vedrà subito dalle brevi considerazioni che seguono. Le quali considerazioni ho avuto occasione di svolgere incidentalmente, in una conferenza alla Sezione Milanese di Mathesis*: « Quello che vorremmo insegnare: la veduta matematica delle questioni ». *E non le avrei qui pubblicate, tanto esse sono ovvie, se a ciò non mi avesse indotto la strana circostanza che molte persone interpellate (fra le quali docenti valorosi e scienziati illustri) hanno tutte mostrato di considerare queste osservazioni come effettivamente interessanti.*

Quali riflessioni possono condurre a individuare tale scopo e ragion d'essere? Più o meno quelle che seguono (e in cui includeremo la definizione del Chisini) (3).

L'uso di ragionare su « medie » è molto diffuso ovunque, nel-

---

(2) OSCAR CHISINI, *Sul concetto di media*, in « Periodico di Matematiche » (1929); argomento ripreso in un articolo dallo stesso titolo di B. DE FINETTI, in « Giorn. Ist. Ital. Attuari » (1931). Per una trattazione un po' più ampia del presente argomento si può vedere B. DE FINETTI, *Lezioni di Matematica attuariale*, ed. Ricerche, Roma, 1957.

(3) Le pagine che seguono utilizzano, con vari adattamenti, parte della trattazione svolta sull'argomento nel volume: B. DE FINETTI e F. EMANUELLI, *Economia delle assicurazioni*, Vol. XVI del « Trattato Italiano di Economia », UTET, Torino, 1957 (e precisamente da pp. 69-73, 75-76, 92-93; parte I, di B. de Finetti, « L'incertezza nell'economia »).

l'ambito di considerazioni statistiche come nel linguaggio comune, e in relazione ad ogni tipo di argomenti.

Il modo di ragionare su medie appare ovvio e intuitivo, ma si tratta spesso di un'« ovvietà » pericolosa, che induce facilmente in fraintendimenti ed errori.

Ciò ha importanza per tutti, ma in particolare per chi s'interessa a questioni nel campo economico, dove siffatti fraintendimenti ed errori sono particolarmente pericolosi. Gioverà pertanto richiamare l'attenzione sulle avvertenze da tener presenti affinchè dei ragionamenti fatti mediante l'uso di « medie » risultino *corretti*, e a permettere di riconoscere il punto debole in ragionamenti fallaci.

Il concetto informatore di tutti i ragionamenti su medie è in fondo unico e molto semplice: *si può ragionare su una collettività* (di individui, di oggetti, di eventi, ...) *come se le grandezze che interessano, anzichè variare da individuo a individuo, avessero per tutti il medesimo valore: il valore « medio »*.

È vera o non è vera questa « proprietà », questa « virtù universale », delle medie? Ecco: il guaio è proprio (come sopra) nella stessa formulazione di una simile domanda, formulazione che direi « metafisica » se fosse lecito usare tale termine in senso spregiativo. Non esistono per le medie (nè, ch'io sappia, per nient'altro) delle « proprietà » o « virtù » magiche o miracolistiche. Quel « concetto » esprime soltanto una circostanza banale (e appunto per ciò significativa e utile): quella proprietà è vera se e soltanto se definiamo la « media » (caso per caso) in modo che risulti vera, ed è utile perchè in molti casi risulta facile e pratico riconoscere il tipo di media rispondente al problema e eseguirne il calcolo.

La definizione di media del Chisini ha appunto la caratteristica delle definizioni demistificatrici: di quelle cioè che, anzichè « definire » una nozione in modo pretesamente concettuale o meramente formale e volere poi che serva a qualche cosa, assumono come punto di partenza lo scopo a cui serve (eliminando fin dalla radice il pullulare di pseudo-problemi). Precisamente, il Chisini non definisce la « media » in astratto o le singole forme di « media », ma definisce *in senso relativo, e perciò stesso nel senso più generale, la media agli effetti di un certo problema* come quel valore comune che rende valido, agli effetti di quel problema, il ragionamento fatto « come se » esso fosse il valore assunto per ciascuno degli individui della collettività considerata.

La traduzione in forma matematica è immediata e facile a comprendersi e utilizzarsi: *Si dice che x è la media di n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ agli effetti di un problema in cui interessa una loro funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se essa ha lo stesso valore che se tutti gli x_h avessero il memedesimo valore x: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x, x, \dots, x)$.*

Spesso la funzione che interessa è la più semplice di tutte, e cioè la somma: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$; in questi casi, *ma soltanto* in questi casi, la media idonea è la media aritmetica: $x = (x_1 + x_2 + + x_n)/n$. Essa dà p. es. il reddito medio (che si avrebbe dividendo in parti uguali il reddito totale: somma invariata), e, nel medesimo senso, il numero medio di persone per famiglia, ecc.

Spesso la media che risponde a un problema è la media *armonica*; essa è il reciproco della media aritmetica dei reciproci, cioè $x = n/(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)$, che risponde alla funzione $f =$ « denominatore della precedente formula », e dà sempre risultato inferiore alla media aritmetica (supponendo le x_h tutte positive). Se sappiamo che un Kg di zucchero viene consumato da 1/4 di famiglie in 1 giorno, da 1/4 in 2, da 1/4 in 3, da 1/4 in 4, e si concludesse che in media dura giorni $2^1/_2$ e il consumo medio è 0,40 Kg, si commetterebbe un errore sensibile: infatti la media dei consumi (1, 1/2=0,50, 1/3= =0,33, 1/4=0,25) è 2,08/4=0,52 Kg cosicchè la nostra stima sarebbe errata del 23% in meno.

Spesso occorre invece la media *geometrica*; essa è la radice (n^{ma}) del prodotto (di n termini), ossia (come apparirà più espressivo) il numero il cui logaritmo è la media aritmetica dei logaritmi; in formule:

$$x = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \exp\left[(\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n)/n\right],$$

che risponde alla funzione f=prodotto (oppure: f=somma dei logaritmi). Così ad es. si calcola il fattore medio di accrescimento (di una popolazione, della produzione, del reddito, ecc.), in n anni successivi volendo avere quel fattore che, rimanendo costante per tutti gli anni, avrebbe dato il medesimo accrescimento complessivo. La media aritmetica darebbe un risultato errato per eccesso: p. es. $1{,}10 \times 1{,}80 = 1{,}98$ equivale a un accrescimento medio di 1,40 ($1{,}40 \times 1{,}40 = 1{,}96$) mentre la media aritmetica darebbe 1,45 (cui corrisponderebbe, su 2 anni, un fattore di accrescimento di 2,10).

La media geometrica è anche quella da usare nel caso di stime: p. es. per tener conto delle stime di una distanza, o di un peso, o di una durata, fatta da diverse persone, ammettendo (come di fatto appare presumibile e avviene) che siano a un dipresso ugualmente probabili errori in più o in meno *percentualmente uguali* (p. es. del doppio o della metà: non certo del doppio o dando per stima *zero*). Ciò è stato notato da Galileo, è prassi comune (sebbene in forma empirica) presso gli artiglieri, è rammentato in occasione di stime da sondaggi. Ad es., anche nel caso precedente (del consumo di zucchero), se i dati di partenza fossero dati da risposte a sondaggi sarebbe presumibile un errore prevalentemente in eccesso (e allora la sottoestimazione data dall'eventuale impiego errato della media aritmetica sarebbe in parte compensata).

E si potrebbe (e sarebbe istruttivo) moltiplicare gli esempi ed i tipi di medie; basti dire (non potendoci qui dilungare eccessivamente) che lo spirito delle conclusioni è sempre questo stesso, e che chiunque faccia ragionamenti su medie o voglia giudicare di ragionamenti altrui dovrebbe riflettere su tali questioni e approfondirne lo studio.

Considerazioni analoghe potrebbero esser fatte, e sarebbe utile fare, per tutti gli altri concetti statistici (indici, rapporti, ecc.): in ogni caso occorre sapere qual è lo scopo che un concetto dovrebbe avere in determinate applicazioni, e se e fino a che punto e sotto quali condizioni vi risponde, e via dicendo. Sempre tenendo presente che non si deve applicarlo attribuendovi un significato metafisico aprioristico nè immaginando che la sua definizione matematica costituisca di per sè una giustificazione valida per attribuirvi significatività per riguardo a qualunque problema.

Importanza pratica del concetto informatore.

È istruttivo a tale riguardo riferirsi a qualche semplice esempio di problemi di « ricerca operativa », come quello, ben noto « del *giornalaio* »: si tratta di stabilire quanti giornali deve comperare, in base a una sua stima della probabilità di venderne un numero più o meno grande di copie, h, dati il prezzo di acquisto a (che si suppone sia una sua perdita per le copie invendute) e quello di vendita v. La risposta è che deve comprarne un numero n tale che la probabilità da lui attribuita alla vendita di un numero di copie superiore ad n sia pari al rapporto a/v tra i due prezzi. In linguaggio statistico, tale valore n si dice « valore di posizione » o « quantile » della distribuzione di probabilità corrispondente alla frazione a/v. Ossia: il valore n deve dividere la distribuzione in modo che la probabilità (o, se si preferisce pensare così, la « massa ») alla sinistra di n sia $1-a/v$ e quella a destra sia a/v.

L'interesse della conclusione non sta nella soluzione di tale problema o in altre questioni ad esso connesse. Ma — almeno per riguardo alle considerazioni attinenti alla definizione di media di Chisini — ribadisce l'avvertenza di come sarebbe erroneo basarsi su idee generiche circa le virtù delle medie o la virtù di chi si basa saggiamente sulle medie, o su altra qualunque idea preconcetta del genere. Occorre penetrare nella natura del singolo problema ed esaminarlo; può darsi che la cosa più vantaggiosa in molti casi sia basarsi sulla media (aritmetica, cioè sulla previsione di h, od altra), ma per motivi particolari dipendenti dal singolo caso. Invece qui si ha un quantile, e non un quantile scelto in modo fisso (p. es., la mediana, il valore che divide a metà la distribuzione, e che per ovvi motivi di simmetria è il più frequentemente considerato); la mediana risponde al problema se e soltanto se il prezzo di vendita ν è doppio di quello d'acquisto, a. La risposta dipende da tutti gli elementi, da tutto ciò che ha importanza praticamente, e cioè il quantile è quello determinato dal rapporto dei prezzi: non in base a preferenze metafisiche o convenzionali od estetiche per cose più o meno belle o celebri o graziose.

B. de Finetti