Sul teorema di l'Hospital

Vi è ancora, da parte di molti Maestri, una certa riluttanza a introdurre nell'insegnamento elementare dell'Analisi infinitesimale il concetto di *minimo* e *massimo limite*, ritenendolo difficilmente assimilabile da parte dei discenti, ed io che ne ho fatto coraggiosamente l'introduzione [1] ne ho avuto critiche di tutti i tenori. Se guardo però ai risultati che ho potuto accertare nei non pochi miei anni d'insegnamento del Calcolo devo riconoscere che ho fatto bene a rimaner sordo a quelle critiche. E mi sono convinto che il discente capace di impadronirsi dell'ordinario concetto di limite è egualmente capace di impadronirsi di quello, *più elementare*, di minimo e massimo limite. Iniziare il corso di Analisi infinitesimale con un teorema di questo genere:

La più generale variabile ordinata ha sempre un ben determinato minimo limite ed un ben determinato massimo limite,

non può non conquistare a quel corso tutte quelle menti che abbiano una qualsiasi attitudine agli studi infinitesimali. È ciò che ho sempre sperimentato.

Ma vi è poi la circostanza che il fare uso sistematicamente del minimo e del massimo limite conferisce alle dimostrazioni una grandissima semplicità e consente l'enunçiazione di molti teoremi fondamentali in una forma assolutamente generale, di grande fecondità nelle applicazioni.

Nelle citate mie Lezioni ho fatto largo uso del minimo e massimo limite, ma vado riconoscendo che avrei potuto e

---

(1) Cfr. le mie *Lezioni di Analisi infinitesimale* [Circolo matematico di Catania, Catania (R. Università), 1923], n° 5.

dovuto farne anche un uso più largo, con vantaggio della semplicità e della generalità.

Nelle righe che seguono mi permetto di rilevare, a conferma di ciò, la generalità dell'enunciato e l'elegante semplicità della dimostrazione che — quando si faccia uso del minimo e massimo limite — riceve il teorema di l'HOSPITAL, anche nel caso che le due funzioni del cui quoziente si cerca il limite in un punto, siano in tal punto entrambe infinitamente grandi [1].

Nuovo enunciato del teorema di l'Hospital. - *Nell'insieme* A_0 *dell'asse* x, *ottenuto dall'intervallo* (a', a") *privandolo del punto* x, *siano definite le due funzioni reali* f(x) *e* g(x), *derivabili in ogni punto, riuscendo sempre* $g'(x) \neq 0$. *Allora, se le due funzioni sono in* x_0 *entrambe infinitesime oppure entrambe infinitamente grandi, si ha:*

$$(1) \qquad \lim_{x\to x_0}{}' \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqq \lim_{x\to x_0}{}' \frac{f(x)}{g(x)} \leqq \lim_{x\to x_0}{}'' \frac{f(x)}{g(x)} \leqq \lim_{x\to x_0}{}'' \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potendo i limiti essere finiti o infiniti.

Dimostrazione. - Poichè, comunque si definisca una funzione $F(x)$ in A_0, è sempre, per $x \to x_0$, $\lim''[-F(x)] = -\lim' F(x)$, possiamo limitarci a dimostrare, per esempio, l'ultima fra le disuguaglianze (1), e ciò occorre fare soltanto quando sia $\lim''(f'/g') < +\infty$. Considereremo il caso (che con la trattazione ordinaria riesce il meno semplice) in cui f e g sono entrambe infinitamente grandi per $x \to x_0$. Dobbiamo dunque dimostrare che, comunque si scelga la quantità λ, se

$$\lambda > \lim''(f'/g'), \quad \text{riesce} \quad \lambda \geqq \lim''(f/g).$$

Sia I un intorno di x_0 su A_0, nel quale riesca

$$f'/g' < \lambda, \quad f \cdot g \neq 0,$$

e fissiamovi arbitrariamente due punti x_1 e x_2, il primo a sinistra di x_0 (se esistono punti in I a sinistra di x_0) ed il secondo a destra (se esistono punti a destra di x_0); in virtù

[1] Alla completa trattazione di questo caso si suole rinunziare in lezione, per la sua delicatezza nella consueta forma.

del teorema di CAUCHY, si ha in I, secondochè il punto x è a sinistra o a destra di x_0,

$$\frac{f(x)-f(x_i)}{g(x)-g(x_i)}<\lambda,$$

con $i=1$ nel primo caso e $i=2$ nel secondo. Si ha cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-f(x_i)/f(x)}{1-g(x_i)/g(x)}<\lambda,$$

donde, passando al limite per $x \to x_0$, segue senz'altro $\lim''(f/g) \leqq \lambda$.

Osservazione. - Dalle (1), per $\lim'(f'/g') = \lim''(f'/g')$, segue il consueto teorema di l'HOSPITAL, potendo, indifferentemente il rapporto f'/g' convergere o divergere, ed inoltre che;

Se il rapporto f/g *delle funzioni non è nelle vicinanze del punto* x_0 *superiormente limitato (inferiormente limitato) tale è pure il rapporto* f'/g' *delle derivate.*

Napoli, R. Università.

MAURO PICONE