LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

Aritmetica.

12. Non si deve definire il numero intero; invece si definiscono generalmente le operazioni sui numeri interi; credo che gli allievi imparino queste definizioni a mente e non vi annettano senso alcuno. Ciò dipende da due ragioni: prima di tutto vengono insegnate loro troppo presto, mentre l'intelletto loro non ne prova ancora bisogno alcuno; in secondo luogo tali definizioni non sono soddisfacenti dal punto di vista logico. Quanto all'addizione non se ne potrebbe trovare una buona, semplicissimamente perchè occorre fermarsi ed è impossibile definir tutto. Non è definir l'addizione dire che consiste in aggiungere. L'unica cosa fattibile consiste nel partire da un certo numero d'esempî concreti e dire: l'operazione che abbiamo fatta si chiama addizione.

Quanto alla sottrazione è un'altra cosa; si può definirla logicamente come l'operazione inversa dell'addizione; ma occorre cominciare di là? Anche lì bisogna principiare con esempî, mostrare sopra esempî la reciprocità delle due operazioni; la definizione sarà così preparata e giustificata.

È lo stesso anche per la moltiplicazione; si prenderà un problema speciale; si mostrerà che si può risolverlo addizionando fra loro molti numeri eguali; si dimostrerà poi che si arriva più facilmente al risultato con una moltiplicazione, operazione che gli allievi sanno già fare per pratica, e la definizione logica ne conseguirà naturalmente.

Si definirà la divisione come operazione inversa della moltiplicazione; ma si principierà con un esempio tolto dalla nozione familiare dello spartire, e si dimostrerà con quest'esempio che la moltiplicazione riproduce il dividendo.

13. Ho già parlato delle frazioni; ho detto che si comincia colla torta, e si fa bene; è proprio di lì che si deve principiare. Poco dopo si spingerà l'astrazione più oltre, e si introdurrà la grandezza continua che ha per prototipo la lunghezza; occorre mostrare (dico mostrare, mostrare agli occhi e, beninteso, non dimostrare) che è divisibile all'infinito, ed il resto andrà da sè. Quanto alle definizioni più sottili, a quelle puramente aritmetiche, bisogna abbandonarle all'insegnamento superiore, se si vuole occuparsene.

Rimangono le operazioni sulle frazioni. Non vi è difficoltà che per la moltiplicazione. È meglio esporre prima la teoria delle proporzioni; è solo da essa che potrà nascere una definizione logica; ma per fare accettare le definizioni che si incontrano al principio di questa teoria, bisogna prepararle con frequenti esempi, tolti ai problemi classici della regola del tre, in cui si avrà cura d'introdurre alcuni dati frazionari. Non si temerà neppure di familiarizzare gli studenti colla nozione delle proporzioni mediante le immagini geometriche, sia rivolgendosi alle loro rimembranze, se hanno già fatto studi geometrici, sia ricorrendo all'intuizione diretta, se non ne hanno fatti, cosa d'altronde che ve li preparerà. Aggiungerò, finalmente, che dopo definita la moltiplicazione delle frazioni, bisogna giustificare tale definizione dimostrando com'essa sia commutativa, associativa e distributiva, e facendo bene osservare all'uditorio che si fa questa constatazione per giustificare la definizione.

14. Per definire il numero incommensurabile, bisogna nuovamente prender le mosse dalla nozione di grandezza continua, e, tra queste grandezze, scegliere un esempio, che può essere solo la lunghezza. Proveremo che certe lunghezze possono esprimersi mediante numeri commensurabili; che altre nol possono, ma sono legate alle prime da relazioni d'inegnaglianza. Sapete come tali ineguaglianze permettono di definire i rapporti incommensurabili di modo che si sarà con tutta naturalezza condotti alla definizione del numero incommensurabile. Sarà bene scegliere un esempio, in cui l'impossibilità di scegliere una comune misura possa dimostrarsi facilmente, tale l'esempio classico di $\sqrt{2}$.

Per le operazioni sui numeri incommensurabili bisogna giustificarne in due modi le definizioni; prima dal punto di vista logico, dimostrando che soddisfanno le stesse regole di quelle de' numeri interi; eppoi con imagini concrete, che si potranno prendere dalla geometria. Non sono difficili a trovarsi. Nel libro di Hilbert si trova un intero capitolo che è una vera aritmetica illustrata. Ho fatto dianzi le mie riserve su detto libro, ma vi è da prendervi molto. Del resto, poichè il numero incommensurabile non dev'esser definito che a studenti già progrediti negli studi, essi comprenderanno subito queste imagini.

15. Passiamo ai numeri negativi; occorrono qui maggiori precauzioni. Si moltiplicheranno prima gli esempi di grandezze suscettibili di cambiamenti di segno, come i segmenti, gli angoli, il tempo, la temperatura, e si faranno su tali esempi gli esercizi di addizione e sottrazione. Il termometro è a 4 gradi sotto zero, aumenta o cala di 6 gradi, che diviene la temperatura? ecc. Così preparata, la definizione dei numeri negativi, quella della loro addizione e sottrazione sarà facilmente accettata. Quella della moltiplicazione si riduce in ultima analisi alla regola dei segni; tale regola sarà compresa, se la giustificate in due modi: 1° logicamente, dimostrando che soddisfa alla legge commutativa e distributiva; 2° con esempi concreti; e di simili esempi ne vorrei due specie: prima esempi geometrici presi nella teoria delle proporzioni e della similitudine, e che saranno il seguito di quelli già visti a proposito degli incommensurabili; eppoi esempi tolti ai movimenti uniformi: sono i più atti a dare una ragione concreta della regola dei segni.

Si vede quale parte fanno in tutto questo le imagini geometriche; e questa parte è giustificata dalla filosofia e dalla storia della scienza. Se l'aritmetica fosse rimasta pura da ogni mescolanza colla geometria, non avrebbe conosciuto che il numero intero; è stato per adattarsi ai bisogni della geometria che ha inventato altre cose.

Geometria.

16. In geometria si incontra prima di tutto la nozione di linea retta. È possibile definire la linea retta? La definizione conosciuta, il cammino più corto da un punto all'altro non mi soddisfa affatto. Partirei puramente dalla *riga*, e mostrerei prima all'allievo come si possa verificare una riga col rovesciamento; questa verificazione è la vera definizione della linea retta; la linea retta è un asse di rotazione. Gli si insegnerebbe poi a verificare la riga con uno scorrimento, e si otterrebbe una delle più importanti proprietà della linea retta. Quanto a quell'altra proprietà d'essere il cammino più corto da un punto all'altro, è un teorema che può venir dimostrato apodditticamente, ma la dimostrazione e troppo delicata per poter trovare posto nell'insegnamento secondario. È meglio insegnare che una riga precedentemente verificata si applica sopra un filo teso. Non occorre temere, in presenza di analoghe difficoltà, di moltiplicare gli assiomi, giustificandoli con esperienze grossolane.

Di questi assiomi, bisogna pure ammetterne, e se ne ammettiamo un po' più di quanto sia strettamente necessario, il male non è troppo grande; l'essenziale è di imparare a ragionare giustamente sugli assiomi una volta ammessi. Lo zio Sarcey, cui piaceva ripetersi, diceva spesso che al teatro lo spettatore accetta volentieri tutti i postulati che gli vengono imposti sul principio, ma che una volta alzato il sipario, diviene intransigente quanto alla logica. Ebbene, è lo stesso per le matematiche.

Per il circolo, si può partir dal compasso; gli allievi riconosceranno immediatamente la curva tracciata; si farà poi osservar loro che la distanza tra i due punti dello strumento rimane costante, che una di queste punte è fissa e l'altra mobile, e si sarà così naturalmente condotti alla definizione logica.

La definizione del piano implica un assioma, e non bisogna dissimularlo. Si prenda una tavola da disegno e si faccia osservare che una riga mobile si applica costantemente su detta tavola, e ciò conservando due gradi di libertà. Si potrebbe comparare col cilindro e il cono, superficie sulle quali non si potrebbe applicare una retta altro che lasciandole un solo grado di libertà; poi si prenderebbero tre tavole da disegno; si mostrerebbe prima che possono scorrere rimanendo applicate l'una sull'altra, e ciò con tre gradi di libertà; e finalmente per distinguere il piano dalla sfera, che due di queste tavole, applicabili sopra una terza, sono applicabili l'una sull'altra.

Vi meraviglierete forse di questo continuo uso di strumenti mobili; non è questo un volgare artificio, ed è molto più filosofico di quanto sulle prime si crederebbe. Cos'è la geometria pel filosofo? È lo studio di un gruppo, e di qual gruppo? di quello de' movimenti dei corpi solidi. Come allora definire questo gruppo senza far muovere alcuni corpi solidi?

17. Dobbiamo conservare la definizione classica delle parallele e dire che si chiamano così due rette che, poste sul medesimo piano, non si incontrano per quanto si prolunghino? No, perchè tale definizione è negativa, perchè non può esser verificata coll'esperienza e non potrebbe quindi venir considerata come un dato immediato dell'intuizione. No, specialmente perchè è totalmente estranea alla nozione di gruppo, alla considerazione del movimento de' corpi solidi, che è, come ho detto, la vera fonte della geometria. Non sarebbe meglio definir prima la traslazione rettilinea di una figura invariabile, come un movimento in cui tutti i punti di quella figura hanno traiettorie rettilinee; mostrare che una traslazione simile è possibile, facendo scorrere una squadra sopra una riga? Da tal constatazione sperimentale, elevata ad assioma, sarebbe facile fare uscire la nozione di parallele e lo stesso postulato d'Euclide.

Quanto al libro terzo, non esiterei nel dare all'ometetia la precedenza sulla similitudine, e nel considerare quasi sul principio la trasformazione omotetica in tutta la sua generalità. Nell'esposizione delle teorie geometriche, bisogna evitare che i teoremi sembrino come isolati gli uni dagli altri e mostrar bene il filo che li unisce. Ora, ogni libro della geometria è lo studio di un gruppo di trasformazioni; i teoremi non si succedono a caso; si susseguono in ordine sempre eguale; se mi permettete di usare un linguaggio ben differente da quel che occorrerebbe nell'insegnamento, bisogna sempre determinare la struttura del gruppo ed i suoi invarianti. È quindi questo gruppo il legame apparente o nascosto di tutti i teoremi di un medesimo libro; senza pronunziare la grande parola gruppo, è facile lasciarla intravedere. Nei libri precedenti, considerammo solo il gruppo degli spostamenti di un corpo solido. Nel terzo si considera il gruppo delle omotetie e quello delle similitudini; è meglio principiar dal primo che è il più semplice. L'uso del pantografo darà un esempio concreto di trasformazione omotetica, che penetrerà facilmente nello spirito dei giovani e vi resterà.

Ho detto che la massima parte delle definizioni matematiche sono vere costruzioni. Quindi non è meglio far prima la costruzione, eseguirla davanti agli allievi, o meglio ancora farla loro costruire in modo da preparare la definizione?

18. Si deve ora parlare dei volumi e delle superfici? È troppo presto, poichè per comprendere la definizione logica, bisogna sapere il calcolo integrale; non è però troppo presto poichè giungiamo al quarto libro.

Che fare allora? bisogna fare come abbiamo sempre fatto fin qui; bisogna astenersi da ogni definizione del volume e della superficie; i ragazzi credono sapere cos'è, e non chiedono nulla. Ci si contenterà d'enunciare sotto forma d'assiomi queste due proposizioni che sono in realtà una vera definizione: che due aree, composte di parti uguali ciascuna a ciascuna, hanno ugual superficie; che la superficie di una parte di un'area è più piccola della superficie dell'area totale. E lo stesso è dei volumi.

Calcolo differenziale.

19. Vi sono due modi di iniziare lo studio del calcolo differenziale, quello di Lagrange, che è in fondo quello di Newton, e quello di Leibniz. Occorre, beninteso, conoscer l'uno e l'altro, ma da quale bisogna principiare, e quando convien parlare per la prima volta dell'uno o dell'altro? Su questo punto si è molto variato; ai miei tempi l'insegnamento secondario conosceva solo le derivate, e non si parlava di differenziali che alla Scuola Politecnica. Dopo, seguendo le fluttuazioni dei programmi della Scuola Politecnica, la notazione differenziale ha invaso le classi speciali; ne è stata poi bandita, e finalmente ne ha, or non è molto, ripreso possesso. Bisogna senza dubbio aspettarsi nuovi flussi e riflussi. Ma quali che siano queste variazioni, vi sono alcuni principî ai quali dobbiamo serbarci fedeli.

Si è spesso sedotti dall'alto senso filosofico della notazione differenziale, che ricorda continuamente la definizione, il significato profondo dei simboli che si devono adoperare. Ahimè! li ricorda troppo, e meglio sarebbe ricordarli meno che rammentarli imperfettamente, ed esporci quindi all'errore. Tali errori non si eviteranno che cercando di dimenticare il primitivo significato dei simboli. Così quando ho una funzione z di x e di y, x ed y essendo esse stesse funzioni di u e di v, scrivo:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv$$

e, in questa formula, ha cinque volte il simbolo dz ed ogni volta con un significato diverso. So bene che si possono adoperare d rotondi, ma che palliativo insufficiente! non occorrerebbero due forme di d; ce ne vorrebbero cinque, ce ne vorrebbero dieci.

E sarebbe ben peggio facendo intervenire i differenziali e le derivate d'ordine superiore.

Sì, certamente, ci si abitua a tali agguati e si giunge ad evitarli, ma perchè? A condizione di dimenticare l'origine di questa notazione, di non più ricordarsi che $\frac{d^2z}{dx^2}$ è il quoziente di un certo d^2z per un certo dx^2; ma di considerare questa frazione come un *blocco*, come la seconda derivata di z rapporto ad x, alla condizione insomma di *pensare in derivate*.

Chi pensa in derivate può adoperare la notazione di Leibniz senza pericolo; se trova in due termini di una medesima formula lo stesso simbolo d^2z con due significati differenti, ciò non ha maggiori inconvenienti che il trovare una medesima lettera a in due parole della stessa frase senza rapporto alcuno tra loro, poichè d^2z non è per lui un individuo, ma una porzione d'individuo.

Bisogna certo conoscere la notazione differenziale; bisogna sapere adoperare quel linguaggio ch'è di tutti, così come si deve sapere il tedesco, sebbene questa lingua abbia regole di costruzione ridicole ed un alfabeto senza senso comune, perchè è parlata da 60,000,000 di uomini tra' quali molti dotti.

Ma questa scienza è pericolosa e non bisogna adoperarla, finchè non si è imparato a pensare in derivate; senza di ciò non si saprebbe mai fare senza errori il più semplice cambiamento di variabili.

Per abituarvi gli allievi bisogna sul principio adoperare esclusivamente la notazione di Lagrange e non parlar loro di differenziali, finchè non faranno imperturbabilmente i cambiamenti di variabili. Si definirà quindi prima di tutto la derivata; vorrei che questa definizione fosse preparata da esempi concreti. Ve ne sono due, quello delle tangenti e quello della velocità; e non sono da disdegnarsi, poichè il primo è stato il punto di partenza di Fermat e di Roberval ed il secondo quello di Newton.

Si ricondurranno questi due esempi l'uno all'altro tracciando la curva degli spazi in funzione del tempo. Credo che la definizione classica sembrerà più chiara, se arriva solo dopo questi esempi.

Vi è però un caso in cui la notazione differenziale riprende tutti i suoi vantaggi, in cui i suoi inconvenienti scompaiono e non si può negarle un alto valore filosofico ed educativo. È quello in cui non si considerano che differenziali di prim' ordine, a patto di non farne che uso giudizioso. Si imparerà così a ragionare correttamente sugl' infinitamente piccoli, ci si famigliarizzerà colla teoria dei piccoli errori, tanto importanti in fisica, intenderemo come piccole variazioni di dati possano influire sul risultato; e di questo anche i fisici non si lagneranno.

Avendo così apprese le derivate, partendo dall'esempio concreto della velocità, sapendole già calcolare ed adoperare, l'allievo inizierà lo studio dei differenziali del prim'ordine ed imparerà a servirsene, ma ad un'espressa condizione.

Il professore non scriverà mai:

$$df = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy,$$

ma sempre

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy.$$

Ci si asterrà sempre dal parlare dei differenziali secondi nei licei. Ho detto assolutamente; ahimè, se sono nei programmi, bisognerà rassegnarcisi, ma si relegheranno alla fine del corso, allorquando la formazione dello studente sarà compiuta, e d'altronde si definiranno servendoci unicamente dello sviluppo di Taylor.

Calcolo integrale.

20. Dopo quanto precede, è quasi superfluo dire come va definito l'integrale; è ben evidente che va definito come superficie.

I nostri padri inscrivevano in un'area piana una serie di rettangoli ed ottenevano come limite della somma di questi rettangoli un integrale rappresentante quest'area piana. Infatti, dicevano, la differenza tra la superficie cercata e la somma tende verso zero: poichè si può renderla più piccola di ogni quantità data. Facevano questo ragionamento senza scrupolo, perchè credevano sapere cosa fosse una superficie. Noi, invece, non restiamo più soddisfatti da questo ragionamento, perchè sappiamo che simili cose non si sanno nascendo, che non si può sapere cosa sia una superficie altro che conoscendo il calcolo integrale.

Ed allora per definire un integrale, prendiamo ogni precauzione; distinguiamo le funzioni continue e discontinue, quelle che hanno derivate, e quelle che non ne hanno. Tutto questo è a posto nell'insegnamento delle Facoltà; tutto questo sarebbe detestabile nei licei. L'allievo, qualsiasi definizione gli diate, non saprà mai cosa sia un integrale, se non gli è stato precedentemente insegnato. Tutte le sottigliezze lo lasceranno indifferente. Crede sapere che cosa sia una superficie e non comprenderà d'ignorarlo che quando avrà bene appreso il calcolo integrale; non è quindi interessante dirglielo nel momento in cui comincia lo studio di questo calcolo.

È allora semplicissimo ciò che rimane a fare; definire l'integrale come area compresa fra l'asse delle x, due ordinate e la curva, mostrare che quando una delle ordinate si sposta, la derivata di quest'area è precisamente l'ordinata stessa. È il ragionamento di Newton, così è nato il calcolo integrale, e, volenti o nolenti, bisogna ripassare per dove sono passati i padri nostri.

Si daranno alcuni esempi, scegliendo le aree che la geometria elementare permette di calcolare. Quanto ai volumi, i centri di gravità, le superficie curve, sarà facile ed utile mostrare come il calcolo dei medesimi si colleghi ad alcuni integrali, e costruire la curva la cui area varia come il volume o la superficie curva data.

Fatto questo, sarà stato fatto tutto quanto è utile nell'insegnamento secondario.

Meccanica.

21. Non ho bisogno di tornare sulla definizione del moto, o dell'accelerazione, o delle altre nozioni cinematiche; si riattaccheranno utilmente a quella delle derivate.

Insisterò invece sulle funzioni dinamiche di forza e di massa.

Una cosa mi colpisce: cioè quanto i giovani che hanno ricevuto l'insegnamento secondario siano lontani dall'applicare al mondo reale le leggi meccaniche state loro insegnate. Non solo ne sono incapaci; ma non vi pensano neppure. Per essi il mondo scientifico e quello reale sono separati da una paratia stagna. Non di rado si vede un signore ben messo, probabilmente baccelliere, seduto in una carrozza, imaginandosi di aiutarla a procedere spingendo sul davanti a dispetto del principio di azione e reazione.

Se cercassimo di analizzare lo stato d'animo dei nostri scolari, ciò ci stupirebbe meno; qual'è per essi la vera definizione della forza? Non quella che recitano, ma quella, che appiattata in un cantuccio del loro cervello, lo dirige tutto quanto di lì. Ecco questa definizione: le forze sono freccie colle quali si formano parallelogrammi. Tali freccie sono esseri immaginarî che non hanno rapporto alcuno con quanto esiste in natura. Ciò non accadrebbe, se si fossero mostrate loro forze reali prima di rappresentarle con freccie.

Come definire la forza? Buone definizioni logiche, non ne esistono; credo averlo sufficientemente dimostrato altrove. Vi è la definizione antropomorfica, la sensazione dell'effetto muscolare; quella è veramente troppo grossolana e non se ne può ricavare niente d'utile.

Ecco la via da seguirsi: occorre prima di tutto per far conoscere il genere forza, mostrare una dopo l'altra tutte le specie di tal genere; sono ben numerose e varie; vi è la pressione dei fluidi sulle pareti dei vasi che li racchiudono; la tensione dei fili, l'elasticità di una molla; il peso che influisce su tutte le molecole d'un corpo; l'attrito la respettiva reazione normale di due solidi a contatto.

Questa non è che definizione qualitativa; occorre imparare a misurare la forza. Perciò mostreremo prima che è possibile rimpiazzare una forza con un'altra senza turbare l'equilibrio; troveremo il primo esempio di questa sostituzione nella bilancia e nella doppia pesata di Borda. Mostreremo poi che un peso può venir rimpiazzato, non solo da un altro peso, ma da forze di nature differenti; il freno di Prony per esempio ci permette di rimpiazzare un peso con un attrito.

Da tutto questo si ricava la nozione dell'equivalenza di due forze.

Occorre definire la direzione d'una forza. Se una forza F è equivalente ad un'altra forza F', applicata al corpo considerato per mezzo di un filo teso, in modo che F possa venir rimpiazzata da F' senza turbare l'equilibrio, allora il punto di attacco del filo sarà per definizione il punto d'applicazione della forza F', e quello della equivalente forza F; la direzione del filo sarà la direzione della forza F' e quella della forza equivalente F.

Da ciò, passeremo al confronto della grandezza delle forze. Se una forza può rimpiazzarne altre due di ugual direzione, ciò dipende dall'essere uguale alla loro somma; dimostreremo per esempio che un peso di 20 grammi può rimpiazzarne due di 10 grammi.

Basta? Non ancora. Sappiamo ora comparare l'intensità di due forze, che hanno ugual direzione e punto d'applicazione; bisogna imparare a farlo quando le direzioni sono diverse. A tal uopo, immaginiamo un filo tenuto teso da un peso e passante sopra una puleggia; diremo che la tensione de' due pezzi di filo è la stessa e uguale al peso tensore.

Ecco la nostra definizione; essa ci permette di comparare due forze qualsiansi aventi la direzione stessa di questi due fili. Bisogna giustificarlo dimostrando come la tensione dell'ultimo tratto rimanga la stessa per un medesimo peso tensore, quali che siano il numero e la disposizione delle puleggie di rinvio. Bisogna poi completarla mostrando che ciò è vero soltanto se le puleggie non hanno attrito.

Quando ci si è resi padroni di tali definizioni, occorre far vedere come il punto d'applicazione, la direzione e l'intensità bastino a determinare una forza; come due forze, per le quali questi tre elementi sono gli stessi, siano *sempre* equivalenti e possano *sempre* venir rimpiazzate l'una dall'altra, sia nell'equilibrio, sia nel movimento, e ciò qualunque siano le altre forze messe in uso.

Bisogna far vedere che due forze concorrenti possono esser sempre rimpiazzate da una risultante unica; e che *tale risultante rimane la stessa*, sia il corpo in riposo o in movimento e quali che siano le altre forze che le vengono applicate.

Bisogna finalmente far vedere che le forze definite nel modo suddetto soddisfano il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione.

L'esperienza, la sola esperienza, può insegnare tutto questo.

Basterà citare alcune volgari esperienze, che gli allievi fanno ogni giorno senz'accorgersene, ed eseguire dinanzi a loro una piccola quantità d'esperienze semplici e bene scelte.

Quando avremo percorse tutte queste diverse vie, potremo rappresentar le forze con freccie, e vorrei ancora che, nello sviluppo dei ragionamenti, si tornasse quando a quando dal simbolo alla realtà. Non sarebbe per esempio difficile illustrare il parallelogramma delle forze mediante un apparecchio formato di tre fili, passanti su puleggie, tenuti tesi da pesi e rimanenti in equilibrio, essendo riuniti in un medesimo punto.

Conoscendo la forza è facile definire la massa; questa volta occorre prendere la definizione in prestito alla dinamica; non vi è modo di fare altrimenti, poichè lo scopo da raggiungere, è di far conoscere la differenza tra la massa ed il peso. Qui pure la definizione dev'essere preparata da esperienze; esiste infatti una macchina che sembra fatta proprio apposta per dimostrare che cosa sia la massa, la macchina di Atwood; si rammenterà del resto la legge della caduta de' corpi, si rammenterà che l'accelerazione del peso è la stessa pe' corpi pesanti e per quelli leggieri, e che varia colla latitudine, ecc.

22. Ora se mi dite che tutti i metodi che preconizzo sono da molto tempo applicati nei licei, me ne rallegrerò più che meravigliarmene; so che nell'insieme il nostro insegnamento matematico è buono; non desidero che sia buttato all'aria, anzi ne sarei desolato; desidero solo miglioramenti lentamente progressivi. Non bisogna che quest'insegnamento subisca brusche oscillazioni al soffio capriccioso di mode effimere. In simili tempeste soccomberebbe presto il suo alto valore educativo. Una buona e solida logica deve continuare a formarne la base. La definizione mediante l'esempio è sempre necessaria, ma deve preparare la definizione logica, non già sostituirla; deve almeno farla desiderare nei casi in cui la vera definizione logica non può essere data utilmente che nell'insegnamento superiore.

Avete ben compreso che quanto ho detto oggi non implica affatto l'abbandono di quanto ho scritto altrove. Ho spesso avuto occasione di criticare certe definizioni che oggi preconizzo. Quelle critiche sussistono intatte. Tali definizioni non possono essere che provvisorie. Ma per quelle bisogna passare.

POINCARÉ.