Un problema aritmetico su una classe di tetraedri che ammettono una sfera tangente agli spigoli

Vogliamo costruire, con considerazioni del tutto elementari, una classe di tetraedri con spigoli, aree di due facce, volume espressi da numeri razionali e che ammettono una sfera tangente alla rete dei sei spigoli (1).

a) Sia $ABCD$ un tetraedro T in cui le facce ABC, ABD sono due triangoli isosceli aventi per base comune AB, e sia (v. Fig.):

$$\overline{AB}=2, \quad \overline{AC}=\overline{BC}=1+u, \quad \overline{AD}=\overline{BD}=1+v, \tag{1}$$

con u e v razionali positivi.

Supponiamo anche che sia

$$\overline{CD}=u+v, \tag{2}$$

talchè il teatraedro T avendo la somma delle lunghezze di due spigoli opposti costante è un tetraedro che ammette una sfera tangente alla rete dei suoi spigoli.

Se M è il punto medio di AB, il piano DMC è un piano di

---

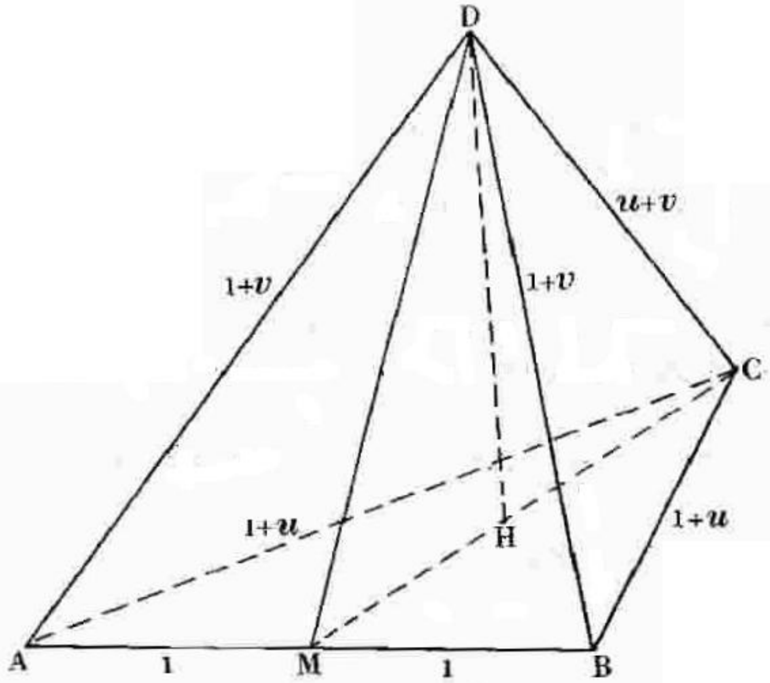
(1) Per i tetraedri che ammettono una sfera tangente ai sei spigoli cfr.: *a*) G. Biggiogero, *Sfera inscritta nella rete degli spigoli*, in « Geometria del tetraedro », Enciclopedia delle Mat. Elementari di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, vol. II, p. 1 (1937), 240; *b*) P. Gouderc-A. Balliccioni, *Premier livre du tétraèdre* (1935), 88.

Avvertiamo che la locuzione « tetraedri razionali » si riferisce ai tetraedri che abbiano spigoli, aree delle quattro facce e volume espressi da numeri razionali [Cfr. per la bibliografia L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II, (New York, 1934), 221-224]. Noi, in questa Nota, limitiamo la razionalità ai sei spigoli, al volume e alle aree di due fra le quattro facce.

simmetria ortogonale per T e si ha

$$\overline{MC} = \sqrt{u(u+2)}, \quad \overline{MD} = \sqrt{v(v+2)}, \tag{3}$$

e se $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ sono misurati da numeri razionali la faccia ABC e la faccia ABD hanno area razionale.



Si osservi inoltre che se il triangolo CMD ha area S razionale, la sua altezza $\overline{HD}$ relativa al lato MC è razionale ed essendo

$$3 \text{ vol } T = (ar\, ABC)\overline{HD}$$

anche il volume del tetraedro T è razionale.

Perchè MC, MD siano razionali è necessario e basta che sia

$$u+2 = a^2 u, \quad v+2 = b^2 v \tag{4}$$

con a e b razionali, perciò

$$\boxed{u = \frac{2}{a^2-1} \quad , \quad v = \frac{2}{b^2-1}} \tag{5}$$

con a e b razionali, e senza alterare le generalità supporremo

$$a>1, \quad b>1, \quad a \geq b. \tag{6}$$

Si ha $\overline{MC}=au$, $\overline{MD}=bv$, $\overline{CD}=u+v$, perciò il semiperimetro del triangolo CMD vale

$$\frac{a+1}{2}u+\frac{b+1}{2}v=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$$

talchè per l'area S si ha

$$S^2=\frac{(a+b-2)(a-b+2)(-a+b+2)(a+b+2)}{(a^2-1)^2(b^2-1)^2} \tag{7}$$

e da questa segue che a e b debbono soddisfare la disuguaglianza

$$b+2>a. \tag{8}$$

Posto

$$\boxed{a=r+s, \quad b=r-s} \tag{9}$$

le (6) e (8) dànno

$$r>s+1, \quad 1>s\geq 0, \tag{10}$$

e la (7) diventa

$$S^2=\frac{2^4(r^2-1)(1-s^2)}{(a^2-1)^2(b^2-1)^2}. \tag{11}$$

Perchè S risulti razionale è necessario e basta che risulti

$$r+1=(1+s)k\alpha^2, \quad r-1=(1-s)k \tag{12}$$

con k e α razionali positivi.

Dal sistema (12) si ricava

$$\boxed{r=\frac{2k\alpha^2+(\alpha^2-1)}{1+\alpha^2}, \quad s=\frac{2-k(\alpha^2-1)}{k(1+\alpha^2)}}. \tag{13}$$

Avendosi $1-s=\dfrac{2(k\alpha^2-1)}{k(1+\alpha^2)}$ la seconda delle (10) dà:

$$\frac{2+k}{k}\geq\alpha^2>\frac{1}{k}\,; \tag{14}$$

avendosi anche $1+s=\dfrac{2(1+k)}{k(1+\alpha^2)}$ la prima delle (10) dà

$$\alpha^2>\frac{2+3k}{k(1+2k)}=\frac{2}{k}-\frac{1}{1+2k}>\frac{1}{k}$$

e combinando con le (14) abbiamo che *se k ed α sono numeri razionali positivi che soddisfano le disuguaglianze*

$$\boxed{\frac{2}{k}+1\geq\alpha^2>\frac{2}{k}-\frac{1}{1+2k}} \tag{15}$$

i numeri razionali r ed s, dati dalle (13), *hanno la proprietà voluta.*

Dalle (9) e (13) risulta poi che *nelle* (5) *per a e b bisogna prendere i valori*

$$\boxed{a=\frac{2(k^2\alpha^2+1)}{k(1+\alpha^2)}\,,\quad b=\frac{2(k+1)(k\alpha^2-1)}{k(1+\alpha^2)}} \tag{16}$$

b) Ad es. prendendo $k=2$, $\alpha=1$, si trova $a=\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$, $u=\dfrac{8}{21}$, $v=\dfrac{8}{5}$; prendendo $k=\dfrac{7}{6}$, $\alpha=\dfrac{3}{2}$, si trova $a=\dfrac{15}{7}$, $b=\dfrac{13}{7}$, $u=\dfrac{7^2}{2^8\cdot 11}$, $v=\dfrac{7^2}{2^2\cdot 3\cdot 5}$; prendendo $k=\dfrac{2}{3}$, $\alpha=2$ si trova $a=b=$ $=\dfrac{5}{3}$, $u=v=\dfrac{9}{8}$.

G. SANSONE