Sulla trasformazione di Laplace

(Conferenza tenuta al Seminario Matematico e Fisico di Torino l'11-4-35)

1. Sarebbe oggi fuori luogo, parlando di Geometria, soffermarsi lungamente ad illustrare l'importanza del concetto di *trasformazione geometrica.* Invero, si tratti di congruenze o di omografie, di trasformazioni birazionali o di trasformazioni solo continue; tutti sono convinti dell'utilità, anzi della necessità della loro considerazione, senza la quale non sarebbe nemmeno possibile una classificazione razionale dei vari fatti geometrici, e verrebbe meno una delle principali linee direttive dello sviluppo di questo ramo della Scienza nell'ultimo mezzo secolo. In un campo molto più modesto: ogni studente di uno dei nostri primi bienni che abbia per es. da risolvere un problemino in cui entri un'ellisse o un'iperbole, sa (o dovrebbe sapere) che, con un'opportuna omologia, può ridurlo ad un altro in cui, in luogo della conica, entra il più familiare e bonario cerchio, e può tentarne la risoluzione per questa via.

Considerazioni analoghe hanno invece stentato ad affermarsi in Analisi: nello « spazio delle funzioni », forse perchè, volendo anche qui continuare a servirsi del linguaggio geometrico, il che offre indubbiamente dei grandi vantaggi, si è costretti a ricorrere ad iperspazi ad infinite dimensioni (spazio *Hilbertiano* e simili), che a molti — non escluso chi parla — non sono estremamente simpatici. Comunque — libero ciascuno di concepire, se gli piace, una funzione come un « punto » di uno spazio astratto — sta il fatto che il concetto di *trasformazione funzionale*, cioè dell'operazione $\mathfrak{T}$ che da una certa *funzione-oggetto* $F(t)$ conduce ad una certa *funzione-risultato* $f(s)$:

$$f = \mathfrak{T}[F],$$

è un concetto che non presenta in sè difficoltà molto maggiori di quello dell'ordinario concetto di funzione, specie poi se non si trascura di illustrarlo con alcuni semplici esempi quali i seguenti:

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)F(t)dt), \quad f(s)=\int_a^b A\{s,\ t,\ F(t)\}\,dt,$$

$$f(s)=\int_{a'}^{b'}\int_{a''}^{b''} K(s,\ t',\ t'')F(t')F(t'')dt'dt'', \quad \text{ecc.},$$

dove K, A, ecc. sono funzioni *fisse* assegnate.

Una trasformazione siffatta muta un certo spazio funzionale: quello delle funzioni F cui è applicabile (*primo* spazio o spazio *superiore*) in un altro spazio funzionale: quello delle corrispondenti funzioni f (*secondo* spazio e spazio *inferiore*) e, conseguentemente, ogni relazione fra funzioni F in una relazione fra le corrispondenti funzioni f e ogni problema sulle F in un problema sulle f. Se la relazione fra le f è nuova o il problema sulle f più semplice di quello primitivo sulle F (o viceversa), l'utilità della trasformazione è di per se evidente.

2. Così come fra le trasformazioni geometriche le più semplici sono le *lineari* (proiettività, omografie, ecc.), anche fra le trasformazioni funzionali le più semplici sono le lineari, vale a dire quelli godenti della proprietà fondamentale espressa dalla formula

$$\mathfrak{T}[F_1+F_2]=\mathfrak{T}[F_1]+\mathfrak{T}[F_2].$$

Queste trasformazioni s'identificano sostanzialmente con quelle cui si riferisce il primo degli esempi di più sopra [1], e cioè con quelle definite da una formula del tipo

$$f(s)=\int_a^b K(s,\ t)F(t)dt.$$

Fra esse sono state finora specialmente studiate, e hanno

[1] F. Riesz: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* [C. R. Paris, **149** (1909) pag. 974]. V. anche R. Caccioppoli: *Sopra i funzionali distributivi.* [« Boll. U. M. I. », 5 (1926), pagg. 128-130].

ricevuto nomi speciali, quelle relative ai segnenti valori di K, a e b:

Nome della trasformazione	Simbolo	$K(s, t)$	a	b
LAPLACE	$\mathfrak{L}$	e^{-st}	0	∞
FOURIER	$\mathfrak{F}$	e^{-ist}	$-\infty$	∞
MELLIN.	$\mathfrak{M}$	t^{s-1}	0	∞
STIELTJES	$\mathfrak{S}$	$(s+t)^{-1}$	0	∞

Le trasformazioni di LAPLACE e di STIELTJES vengono spesso considerate anche con gli integrali estesi da $-\infty$ a $+\infty$; esse diconsi allora *bilatere* e soglion denotarsi coi simboli $\mathfrak{L}_{\text{II}}$ e $\mathfrak{S}_{\text{II}}$ rispettivamente.

Fra queste quattro trasformazioni la più importante è quella di LAPLACE, cui le altre tre posson del resto ricondursi, sussistendo le uguaglianze simboliche, di ovvia interpretazione:

$$\{\mathfrak{F}[F(t)]\}_{s=s'} = \{\mathfrak{L}_{\text{II}}[F(t)]\}_{s=is'}, \quad \mathfrak{M}[F(t)] = \mathfrak{L}_{\text{II}}[F(e^{-t})], \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{L}^2.$$

3. La trasformazione di LAPLACE:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \equiv \mathfrak{L}[F(t)] \tag{1}$$

muta una funzione integrabile $F(t)$, analitica o no, definita sull'asse reale positivo e tale che l'integrale improprio che figura nella (1) converga almeno per un valore s_0 di s, in una *funzione analitica* $f(s)$ olomorfa almeno in tutto un semipiano $\mathfrak{R}(s) > c$, cioè nel semipiano *a destra* di una certa parallela all'asse immaginario.

La ragione fondamentale dell'importanza di questa trasformazione risiede nel suo comportamento nei riguardi della *derivazione*. Si hanno invero le due formule

$$f'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}tF(t)dt, \quad \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt - F(o)$$

che, simbolicamente scritte, diventano:

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}[F(t)] = \mathfrak{L}[-tF(t)], \quad \mathfrak{L}[F'(t)] = s\mathfrak{L}[F(t)] - F(o) \tag{2}$$

e che, più generalmente, nel caso di derivate d'un ordine n qualsiasi, assumono l'aspetto:

$$(3)\qquad \begin{gathered} \frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}[F(t)] = \mathfrak{L}[(-t)^n F(t)], \\ \mathfrak{L}[F^{(n)}(t)] = s^n\mathfrak{L}[F(t)] - \{F(o)s^{n-1} + F'(o)s^{n-2} + \ldots + F^{(n-1)}(o)\}. \end{gathered}$$

Pertanto *alla derivazione in uno dei due spazi* $\{\mathrm{f}\}$ *ed* $\{\mathrm{F}\}$ *corrisponde nell'altro, in sostanza, la moltiplicazione per la variabile indipendente,* epperò è possibile semplicare in modo essenziale problemi importantissimi col solo loro trasporto dall'uno all'altro degli accennati due spazi funzionali. Ad esempio, se il problema fosse quello dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare, ordinaria o alle derivate parziali, portante su di una funzione incognita Y della variabile t ed eventualmente anche di altre variabili $x_1, x_2, \ldots$; operando sull'equazione (i cui coefficienti supporremo, per semplicità, indipendenti da t) con la trasformazione di LAPLACE, essa si muterà in un'altra equazione nella trasformata y di Y, *in cui non figurerà più alcuna derivazione rispetto a* t. Un'equazione differenziale *ordinaria* si muterà dunque in tal modo in una equazione *algebrica* (in senso lato), un'equazione a derivate parziali con *due* variabili indipendenti in un'equazione differenziale *ordinaria*, ecc.

Come si vede la trasformazione di LAPLACE presta gli stessi servigi del *metodo simbolico di Heaviside* — tanto giustamente caro agli elettrotecnici — con dei vantaggi essenziali rispetto a quello, e cioè principalmente:

a) La eliminazione di ogni speciale *simbolismo* e sopratutto della difficoltà di imbattersi quasi ad ogni passo in simboli di cui non si conosce *a priori* il significato.

b) La possibilità di tener conto [attraverso ai termini in $F(o)$, $F'(o)$, ecc. del secondo membro della seconda delle (3)] delle condizioni iniziali, cioè — nel caso particolarmente interessante dell'Elettrotecnica — dei cosidetti *fenomeni transitorii.*

c) La possibilità di poter talvolta considerare anche equazioni a coefficienti dipendenti da t.

d) La facilità di delimitare esattamente il campo di validità dei risultati ottenuti.

Per tali ragioni convengo perfettamente col DOETSCH [1] nel ritenere ormai superfluo il metodo simbolico di HEAVISIDE, perchè tutto quello che questo può dare e altro ancora può anche ottenersi, per via altrettanto semplice e suggestiva ma molto meglio fondata e convincente, per mezzo della trasformazione di LAPLACE.

4. Uno dei pregi dei metodi d'integrazione delle equazioni differenziali fondati sull'impiego della trasformazione di LAPLACE, sta nella poca loro artificiosità e nella relativa facilità dell'applicazione. La sola grossa difficoltà in cui spesse volte ci si imbatte nel loro uso, è che tali metodi solitamente non forniscono direttamente la funzione F che interessa, bensì la sua trasformata di LAPLACE f. Bisogna dunque saper risalire da f ad F, saper cioè *invertire* la trasformazione di LAPLACE.

Al riguardo si ha un semplice ed espressivo *teorema di unicità* — spesso citato sotto il nome di *teorema di Lerch* — che, sotto la forma più generale di recente datagli da A. WINTNER [1], assicura che, *se la trasformata di Laplace* f(s) *di una funzione continua* F(t) *si annulla nei punti* $s = \nu_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ *tali da aversi*

$$0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} \nu_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} = \infty,$$

allora è certamente $F(t) \equiv 0$.

Quanto però all'*esistenza* della funzione $F(t)$ ed alla sua effettiva determinazione data $f(s)$, i risultati a disposizione sono meno esaurienti, perchè la formula, affetta da immaginari,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds, \tag{4}$$

dove x è un numero reale entro certi limiti arbitrario, che può facilmente ricavarsi applicando formalmente alla (1) il teorema di reciprocità di FOURIER, dà luogo a delle diffi-

---

(1) *Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül).* [« Jahresber. der D. Math-Ver. », **43** (1934), pagg. 235-251].

(2) « Mathem. Zeitschr. », **36** (1933), pagg. 638-640.

coltà (1), e non è inoltre di nessun aiuto nel caso, frequente nella pratica, in cui della funzione f si conoscono solo i valori sull'asse reale.

Il problema dell'inversione può molte volte risolversi assai facilmente ricorrendo semplicemente ad una tabella di trasformate di LAPLACE di funzioni (a un « vocabolario », come dice DOETSCH) contenente una raccolta, quanto più ricca è possibile, di formule del tipo delle seguenti:

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}; \quad \mathfrak{L}[t^r] = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, \quad (r \geq 0); \quad \mathfrak{L}[e^{-k^2t^2}] = \frac{1}{s+k^2};$$

$$\mathfrak{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2}; \quad \text{ecc.}$$

Se invece la funzione $f(s)$ che interessa non si trova nella tabella che si ha a disposizione nè si sa ricondurla a funzioni della tabella, e non si può o non si vuole servirsi della (4), allora si potrà ricorrere ad un metodo da me recentemente indicato che, sotto condizioni assai poco restrittive, consente di compiere l'inversione, senza uscire dal campo reale, mediante degli sviluppi in serie di *polinomi di Laguerre*, nel caso della trasformazione di LAPLACE ordinaria (2), e di *polinomi*

---

(1) P. es. nel caso della funzione $f_0(s) = e^{s^2}$ la (4) fornisce

$$F_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Ciò nonostante *non è però* $\mathfrak{L}[F_0(t)] = f_0(s)$, nè poteva esserlo perchè una trasformata di Laplace non può tendere ad ∞ per $s \to +\infty$ come avviene nel caso di $f_0(s)$; viene invece

$$\mathfrak{L}[F_0(t)] = \frac{e^{s^2}}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty e^{-u^2} du.$$

Il paradosso si spiega osservando che la (4) non è propriamente la formula inversa della (1), bensì la inversa della trasformazione di Laplace *bilatera*. Cfr. DOETSCH: *Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung*. [« Journ. f. d. reine u. angew. Math. ». (Crelle) **167** (1931) pagg. 274-293].

(2) *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*: I. *Inversione della trasformazione*. [« Rend. Lincei », (6) **21** (1935) pagg. 232-239].

di Hermite nel caso della bilatera [1]. Propriamente tale metodo è fondato, nel primo dei due casi accennati, sull'impiego dei due *sviluppi coniugati*:

$$(5)\quad f(s)=\frac{1}{s+h}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{s+h}\right)^n,\quad F(t)=e^{-ht}\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_n(t),$$

o dei due più generali:

$$(6)\quad \begin{aligned} f(s)&=\frac{1}{(s+h)^{\alpha+1}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{s+h}\right)^n,\\ F(t)&=e^{-ht}t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^{(\alpha)}(t),\qquad (\alpha>-1),\end{aligned}$$

dove h è un numero reale qualsiasi ed $L_n(t)$ e $L_n^{(\alpha)}(t)$ denotano rispettivamente i polinomi di LAGUERRE *classici* e *generalizzati*, definiti dalle formule

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}),\quad L_n^{(\alpha)}(t)=\frac{e^tt^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^{n+\alpha}e^{-t}).$$

In particolare il metodo d'inversione imperniato sulle formule (5) è certo applicabile se la funzione $f(s)$ è *regolare* e *nulla* all'infinito. In tal caso però [2] possono anche adopeperarsi i due sviluppi coniugati assai più semplici:

$$(7)\quad f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{s^{n+1}},\quad F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}t^n.$$

Alcuni notevoli complementi al mio metodo d'inversione sono stati apportati da M. PICONE [3] che, fra l'altro, ha fatto vedere come il metodo sia applicabile a tutte le funzioni $f(s)$ per cui la serie $\Sigma_n a^2{}_n$ riesce convergente.

---

(1) *Su la rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss e la trasformazione di Laplace.* [« Giorn. Ist. Italiano Attuari », **6** (1935), pagg. 135-140].

(2) F. TRICOMI: *Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace.* [« Rend. Lincei », (6) **21** (1931), pagg. 420-426].

(3) *Sulla trasformata di Laplace.* [« Rend. Lincei », (6) **21** (1935) pagg. 306-313].

5. L'applicazione della trasformazione di LAPLACE all'integrazione di equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali costituisce certo una delle più importanti applicazioni della trasformazione di cui discorriamo, non la sola importante però. La trasformazione di LAPLACE entra invero, in modo essenziale, in molti altri Capitoli dell'Analisi; per es. nello studio delle serie divergenti (il metodo di sommazione di BOREL è essenzialmente fondato sull'impiego dei due sviluppi coniugati (7)) e nello studio — di recente sviluppatosi e sistematizzatosi — del comportamento asintotico delle funzioni in prossimità di loro punti singolari. Anzi è stato proprio l'impiego sistematico del concetto di trasformazione funzionale (trasformazione di LAPLACE ed analoghe) che ha di recente permesso al DOETSCH [1] di ricondurre ad un principio unitario e classificare logicamente buona parte dei metodi finora impiegati per lo studio di tale comportamento asintotico.

In questo Capitolo dell'Analisi s'incontrano principalmente due tipi di risultati che — con nomenclatura ormai generalmente adottata — diconsi rispettivamente *teoremi abeliani* e *teoremi tauberiani*. I primi — di cui è, in certo modo, il prototipo il classico teorema di ABEL sulle serie di potenze — sono quelli che forniscono qualche indicazione sul comportamento asintotico della funzione $f(s)$, risultato di una trasformazione funzionale $\mathfrak{T}$ operante su di una $F(t)$, in base ad opportune ipotesi sulla funzione $F(t)$; mentre i secondi — in generale più riposti e più difficili ma anche più importanti — forniscono invece indicazioni sul comportamento asintotico di quest'ultima funzione in base ad opportune ipotesi sulla $f(s)$, unitamente — spesso — a qualche ipotesi sulla $F(t)$.

Un semplice esempio di teorema tauberiano *puro*, cioè fondato su ipotesi concernenti la sola funzione $f(s)$, è offerto dalla seguente proposizione immediatamente deducibile dalle considerazioni che, nella prima delle mie due Note ultimamente citate, hanno condotto agli sviluppi (6):

Se è possibile determinare un numero reale h *ed un altro* α, *maggiore di* -1, *in modo tale che la funzione*

(8) $$f_1(s) = (s + h)^{\alpha+1} f(s)$$

---

[1] Cfr. loco cit. nel § 4.

risulti olomorfa nel semipiano $\Re(s) > \frac{1}{2} - h$, *punto all'infinito compreso, e si pone* $\lim_{s \to \infty} f_1(s) = A$; *allora esiste la funzione* $F(t)$ *di cui* $f(s)$ *è la trasformata di Laplace e soddisfa all'uguaglianza asintotica*

$$F(t) \backsim \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha}, \qquad (t \to 0), \tag{9}$$

cioè è

$$\lim_{t \to 0} \left\{ F(t) : \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\} = 1.$$

6. Un altro vasto campo di applicazione della trasformazione di LAPLACE e congeneri è costituito dalla deduzione da *note* relazioni intercedenti fra funzioni di uno dei due spazi $\{f\}$ ed $\{F\}$, di *nuove* relazioni fra le corrispondenti funzioni dell'altro spazio. Per esempio BERNSTEIN e DOETSCH [1] hanno potuto per questa via, appoggiandosi sul fatto che le trasformate di LAPLACE delle classiche funzioni theta ellittiche sono funzioni elementari (trigonometriche), compiere il *tour-de-force* di raccogliere nel 1922-24 ampie messe di nuove formule in uno dei campi più mietuti ed apparentemente esauriti dell'Analisi: quello delle funzioni ellittiche. Io stesso appoggiandomi sulle precedenti formule (5)-(6), ho potuto di recente, con analoghi metodi, trovare qualche nuova formula sui polinomi di LAGUERRE e le funzioni di BESSEL [2], per es. la seguente sulla funzione J_0 di BESSEL:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = eJ_0(2\sqrt{t}), \tag{10}$$

nonchè [3] la seguente curiosa formula sulla elementarissima funzione esponenziale:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)][L_n(y) - L_{n-1}(y)] = e^{m(x, y)}, \tag{11}$$

---

(1) V. la nota bibliografica che trovasi alla fine.

(2) F. TRICOMI: *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre: II. Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.* [« Rend. Lincei » (6) **21** (1935), pagg. 332-335].

(3) Nella Nota dei « Lincei »: *Ancora sull'inversione ecc.*

dove $m(x, y)$ denota *il più piccolo dei due numeri (reali e positivi)* x *e* y; in particolare per $x = y$ viene:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)]^2 = e^x. \tag{12}$$

Fra le altre, numerose nuove formule ottenute coi metodi suaccennati, mi limito a segnalare ulteriormente la seguente *proprietà sommatoria* della funzione J_0 di BESSEL, scoperta da DOETSCH [1]:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0[(n+v)x] = \frac{1}{x} + 2 \sum_{m=1}^{p} \frac{\cos 2m\pi v}{\sqrt{x^2 - 4m^2\pi^2}}, \tag{13}$$

dove x è un numero positivo, non multiplo di 2π, e p denota il massimo intero contenuto in $x/2\pi$.

7. Anche nel calcolo delle probabilità la trasformazione di LAPLACE presta eccellenti servigi. Invero la *funzione caratteristica* che, da POINCARÉ in poi, viene spesso tanto utilmente sostituita alla considerazione della *densità di probabilità* p(x) o della *funzione di distribuzione* di una *variabile casuale* [2], non è altro se non la trasformata bilatera di LAPLACE (POINCARÉ) o la trasformata di FOURIER (P. LÉWY) della funzione $p(x)$.

La ragione principale dell' utilità di tale sostituzione risiede nel fatto che, mentre la densità di probabilità $p(x)$ della somma X di due variabili casuali X_1 ed X_2 non dipende in modo del tutto semplice dalle densità di probabilità $p_1(x)$ e $p_2(x)$ degli addendi, avendosi che

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\xi) p_2(x - \xi) d\xi; \tag{14}$$

invece la funzione caratteristica di X è semplicemente uguale al *prodotto* delle funzioni caratteristiche di X_1 ed X_2.

---

(1) *Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen usw.* [« Compositio Mathem. », 1 (1934), pagg. 85-97].

(2) V. p. es. la mia Conferenza su « *Le variabili casuali* ». [« Periodico di Matem. », (4) 12 (1932), pagg. 65-86 e « Conferenze di Fisica e Matem. di Torino », 2 (1930-31), pagg. 113-135].

Invero, pel *teorema di Horn* (1), la trasformata di LAPLACE del *prodotto di composizione* (« *Faltung* » secondo DOETSCH) $F_1(t) * F_2(t)$ di due funzioni, cioè della funzione definita dalla formula:

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \tag{15}$$

o dall' altra:

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau, \tag{15'}$$

secondochè si è nel campo della trasformazione di LAPLACE *bilatera* od *unilatera* [la (15') è riconducibile alla (15) ponendo $F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv 0$ per $t < 0$], coincide col prodotto ordinario delle trasformate di LAPLACE di $F_1(t)$ ed $F_2(t)$; si ha cioè, in simboli,

$$\mathfrak{L}[F_1(t) * F_2(t)] = \mathfrak{L}[F_1(t)] \cdot \mathfrak{L}[F_2(t)]. \tag{16}$$

Un altro punto di contatto fra il calcolo delle probabilità e la trasformazione di LAPLACE, è stato di recente da me (2) trovato nel fatto che, se si cerca di rappresentare una generica densità di probabilità $p(x)$ mediante una « somma » di integrali gaussiani classici, cioè mediante una formula del tipo

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha) \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} h^2 (x-\alpha)^2} d\alpha, \tag{17}$$

si è ricondotti al problema dell' inversione della trasformazione (bilatera) di LAPLACE.

8. Pur non avendo questa rapida corsa attraverso il campo della trasformazione di LAPLACE nessuna pretesa di completezza, desidero tuttavia richiamare l' attenzione sugli intimi rapporti esistenti fra la trasformazione di cui ci occupiamo e le serie di DIRICHLET, non sembrandomi che essi siano stati finora sfruttati quanto potevano esserlo.

---

(1) Cfr., anche per la generalizzazione di questo teorema: G. DOETSCH: *Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation.* [« Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », (2) 4 (1935), pagg. 71-84].

(2) Nella Nota del Giornale degli « Attuari » cit. nel § 4.

Questi rapporti si fondano sull'elementarissima osservazione che, se si indica con $T_\lambda(t)$ la funzione discontinua definita dalle formule:

$$T_\lambda(t) = 0, \quad (0 \leq t < \lambda); \qquad T_\lambda(t) = 1, \quad (\lambda < t),$$

indipendentemente dal valore fissato per $T_\lambda(a)$ (per es. 1/2), si ha

$$\mathfrak{L}[T_\lambda(t)] = \frac{1}{s} e^{-\lambda s}. \tag{18}$$

Conseguentemente, se si considera una *funzione a scala* $\mathrm{T}(t)$ definita da una formula del tipo

$$T(t) = a_0 T_{\lambda_0}(t) + a_1 T_{\lambda_1}(t) + a_2 T_{\lambda_2}(t) + \dots, \quad (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots), \tag{19}$$

il che implica

$$T(t) = 0, \quad (0 \leq t < \lambda_0); \; T(t) = a_0, \quad (\lambda_0 < t < \lambda_1);$$
$$T(t) = a_0 + a_1, \quad (\lambda_1 < t < \lambda_2); \quad \dots,$$

a prescindere da questioni di convergenza, si avrà

$$\mathfrak{L}[T(t)] = \frac{1}{s}(a_0 e^{-\lambda_0 s} + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots), \tag{20}$$

il che mostra come la trasformata di LAPLACE della funzione $T(t)$ sia, a meno di un fattore $1/s$, una generica *serie Dirichlet* e viceversa. Pertanto la classe delle funzioni sviluppabili in serie di DIRICHLET s' identifica sostanzialmente con quella delle trasformate di LAPLACE delle funzioni a scala (¹).

Finalmente voglio segnalare, in quest' ordine d' idee, il fatto che la più celebre delle serie di DIRICHLET, la funzione ζ di RIEMANN, può anche risguardarsi come la trasformata bilatera di LAPLACE di una funzione elementare.

Infatti, la nota formula (²)

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} \, dt$$

(¹) Cfr. HAMBURGER: *Ueber eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen*. [« Mathem. Zeitschr. », 6 (1920), pagg. 1-10].

(²) V. per es. JAHNKE-EMDE: *Funktionentafeln* (2. Ed. Leipzig, Teubner, 1933) pag. 319, oppure HAMBURGER, loc. cit.

può scriversi

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \mathfrak{M}\left[\frac{1}{e^t+1}\right] \tag{21}$$

donde, tenendo conto della relazione intercedente fra le trasformazioni di MELLIN e LAPLACE, segue subito che:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \mathfrak{L}_{II}\left[\frac{1}{e^{e^{-t}}+1}\right]. \tag{22}$$

NOTA BIBLIOGRAFICA

Oltre ai lavori citati nel testo, v. per la letteratura antica sulla trasformazione di LAPLACE (sino al 1912 ca.), l'articolo di S. PINCHERLE, *Équations et opérations fonctionnelles* (spec. il § 22) nell'*Encyclopédie des Sciences Mathém.* (éd. française) T. II[5], pag. 1 (1912) che, fra l'altro, accenna ai numerosi contributi del PINCHERLE stesso sull'argomento. In epoca più recente, della trasformazione di LAPLACE si è sopratutto occupato G. DOETSCH (in principio in collaborazione con F. BERNSTEIN) che in numerosi lavori comparsi, dal 1922 in poi, specialmente nella *Mathematische Zeitschrift* e nei *Mathematische Annalen*, ha mostrato il partito che dalla trasformazione di LAPLACE poteva trarsi in svariate questioni, e specialmente in problemi relativi alla propagazione del calore e dell'elettricità. Sarebbe troppo lungo elencare qui detti lavori che, del resto, sono quasi tutti ricordati in due pubblicazioni monografico-riassuntive dello stesso A.: quella citata nel § 3 e l'altra più antica: *Ueberblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis*. [Jahresber. der D. Math.-Ver. 36 (1927), pagg. 1-30]. Fra i lavori di DOETSCH non ivi ricordati, segnalo quelli qui citati nei §§ 6 e 7 e inoltre: *Das Eulersche Prinzip*. [« Annali Scuola Norm. Sup. Pisa » (2) 2 (1922), pp. 325-342]. Il DOETSCH prepara attualmente un libro sulla trasformazione di LAPLACE.

Recentemente anche M. PICONE: [*Intorno al Calcolo delle soluzioni di alcuni problemi di Fisica*, « Rendiconti Seminario Matem. Roma », 1933; *Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione*, « Mem. R. Accad. d'Italia, 5 (1934), pagg. 715-749] si è avvalso con successo della trasformazione di LAPLACE in problemi di propagazione.

Segnalo finalmente la breve monografia di M. CIBRARIO: *La trasformazione di Laplace*, [« Rend. Ist. Lombardo » (2) 62 (1929) pagg. 337-353].

FRANCESCO TRICOMI

(Aggiunta sulle bozze. Giugno 1935). Posteriormente alla redazione di questa Conferenza ho avuto occasione di studiare alcune altre particolari trasformazioni funzionali lineari che, fra l'altro, si connettono intimamente con classiche successioni di polinomi ortogonali (polinomi di HERMITE, di LEGENDRE, ecc.).

I principali risultati raggiunti sono raccolti in due Note intitolate: 1) *Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione* e 2) *Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici*, in corso di stampa rispettivamente nei « Commentarii Mathem. Helvetici » e nel « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana ».

F. T.