Noterelle di Logica matematica

(a proposito della seconda edizione del trattato di BURALI-FORTI [1])

1. La recente edizione del trattato del prof. BURALI-FORTI, che — in confronto al vecchio libretto edito nel 1894 — appare triplicata di mole e anche profondamente modificata, riuscirà gradita ai lettori che s'interessano alla logica matematica, ai quali offre un'esposizione di talune teorie sviluppate in questi ultimi tempi. Per noi essa porge soltanto l'occasione a fare alcune osservazioni che si riferiscono in genere a questa analitica del ragionamento, e ad alcuni principii secondo cui viene veduta nella scuola del PEANO, nonchè osservazioni e critiche più speciali che toccano l'opera del trattatista, là dove egli ha creduto di scostarsi o d'innovare rispetto al maestro.

Non è dunque un'analisi completa del libro che qui si vuol fare, nè un giudizio complessivo che si pronunzia. Tuttavia non possiamo tacere l'impressione generale che, per ciò che concerne lo scopo didattico, questa seconda edizione rifatta non abbia guadagnato, in confronto al primo e più breve trattatello, dal punto di vista della chiarezza e della facilità dell'esposizione: di che daremo in appresso qualche esempio. Dobbiamo anche rilevare, con dispiacere, come l'A. venga meno al rispetto che si deve al lavoro scientifico e alla libertà di apprezzamento « clarorum et obscurorum virorum », parlando con frasi dispregiative dell'opera di altri

[1] BURALI-FORTI, « *Logica matematica*, seconda edizione interamente rifatta ». Milano, Hoepli, 1919 (pag. 483).

matematici, fra cui sono alcuni grandi stranieri come Hilbert e Poincarè (e perfino del logico matematico Russell, che pur tanto ha preso dal nostro Peano), e accusando di servilismo — o per poco di lesa patria! — gli italiani che ne seguono le idee o vi si accostano per proprio conto. Se qui fosse questione soltanto di forma poco cortese, non varrebbe la pena di occuparsene; ma — nelle condizioni attuali dell'animo europeo, ancora commosso dalle passioni della guerra — non possiamo tacere il nostro rincrescimento per un esempio che repugna profondamente al genio italiano, rilevando come la critica a base nazionalistica, neghi in genere le ragioni della scienza, ma in ispecie quelle della logica matematica, la quale, per tendere ad un'espressione universale del pensiero, ha rinunziato perfino all'uso della lingua materna, riecheggiante in noi, così dolcemente, gli spiriti della nostra patria e della nostra civiltà.

2. Ma, passiamo ad esporre alcune osservazioni generali che ci vengono suggerite dalla lettura del libro preso in esame.

Le prime si riferiscono ai fondamenti stessi del sistema di Peano, accolto — nelle sue grandi linee — dall'A. Questo sistema s'inizia coll'introduzione del simbolo Cls, che si legge *classe*, ed ha anche il valore « ὅρος » di Aristotele, « terminus » degli scolastici, « idea generale », « nome comune »,... del linguaggio ordinario, « gruppo », « insieme »,... dei matematici (pag. 1). Lo stesso simbolo Cls viene adottato per designare « l'umanità » e « l'uomo », « la Camera dei deputati » e « il deputato », « il Corpo accademico » e « il professore »; in breve ciò che noi chiamiamo « la classe » e « il concetto astratto dell'elemento della classe ». Questa assimilazione non è senza inconvenienti. Peano ha dovuto accorgersene quando ha proceduto nella sua profonda analisi delle relazioni logiche, dappoichè si è imbattuto nel sofisma:

Pietro e Paolo sono apostoli,
gli apostoli sono dodici,
dunque Pietro e Paolo sono dodici!

Allora, per superare la difficoltà derivante da questo sofisma, egli ha distinto, al modo degli scolastici, due sensi diversi della copula (è, sono), uno dei quali (sensus divisus) traduce col simbolo ε, e l'altro (il sensus compositus che designa la contenenza di una classe in un'altra) col simbolo $\mathrm{Ɔ}$: quindi egli scrive

Pietro e Paolo ε apostolo
apostolo $\mathrm{Ɔ}$ dodici,

sicchè — date le proprietà dei due simboli — non segue più alcuna conclusione.

Ma questo artificio, che vale ad accomodare le cose dal punto di vista formale, non può essere approvato da chi cerchi negli schemi simbolici un mezzo proprio ad esprimere l'analisi del pensiero. Infatti, nelle due proposizioni sopra citate, non è già la copula che cambia di significato, bensì quel termine di « apostolo » che nella prima figura come predicato e nella seconda come soggetto. Si dovrebbe scrivere:

Pietro e Paolo sono apostoli (cioè membri della classe degli apostoli),
la classe degli apostoli è una dozzina (cioè una classe di dodici elementi),

ed allora riesce chiaro che non si ha più l'assurda conclusione.

Chi sia persuaso delle ragioni di questa critica, si renderà conto della giustificata difficoltà che presenta per lo studioso del sistema di PEANO, la distinzione fra i due segni ε e $\mathrm{Ɔ}$, spiegata dal BURALI-FORTI nel cap. I, § 17, n. 3 (pag. 107-9). Ma occorre pur dire che la spiegazione del nostro autore non sembra fatta per togliere la difficoltà al principiante: assai più chiara era quella offerta dalla prima edizione del trattato (III, § 2, pag. 70), dove — se non il sofisma classico degli apostoli — s'incontrava almeno un esempio concreto assai semplice: 5 è un numero primo, numero primo è una classe d'infiniti elementi ecc.

3. Forse la distinzione fra classe e concetto astratto, che si trova nei più antichi logici matematici come LAMBERT, non manca del tutto nel sistema di PEANO: poichè pare

possa supplire in qualche modo allo scopo l'introduzione del simbolo ι. Ad ogni modo l'apparente mancanza è fonte di molte difficoltà contro cui il trattatista (BURALI-FORTI) si dibatte, approdando a soluzioni non sempre felici.

La prima, e a nostro avviso più grave, si riferisce all'*uguaglianza*, argomento su cui i logici matematici sèmbrano non aver professato fino ad ora idee molto concordi. Per il BURALI-FORTI, che in questo punto crede di correggere i suoi predecessori, uguaglianza significa soltanto « identità »: infatti nel cap. I, § 8 (pag. 34) egli definisce la notazione

$$x = y,$$

in modo che « qualunque proprietà di x sia anche una proprietà di y ».

Se l'A. avesse tenuto presente il principio dell'*identità degli indiscernibili* di LEIBNIZ, ei si sarebbe accorto che questa specie di uguaglianza importa che la classe ιx degli uguali ad x comprenda soltanto l'elemento x (una cosa è *identica* solo a sè stessa!), e che quindi non vi sia più luogo ad introdurre il simbolo di PEANO ιx, senza il quale — egli dice — non si può avere che una logica infantile. E non creda l'A. di rispondere a questa obiezione adducendo gli sviluppi formali del § 15 (pag. 85), in forza dei quali ci *dimostra* la mirabile proposizione: identico ad x è diverso da x, giacchè potrei limitarmi a ribattere che *i simboli hanno dei doveri verso il pensiero, ma il pensiero ha soltanto dei diritti verso i simboli.*

Mi preme però di avvertire che l'assurdo così segnalato non è già nella differenza trovata fra x e ιx (infatti due cose uguali *sotto un certo rapporto* possono essere diverse sotto un altro), bensì nella interpretazione dell' $=$ come « identico », che il BURALI-FORTI ha stabilito colla definizione sopra citata.

Del resto il vero significato della relazione logica di uguaglianza si mette bene in luce colla considerazione del concetto astratto: uguali sono x e y per riguardo al concetto astratto di una qualunque classe che contenga insieme x e y. In altre parole: l'uguaglianza (relativa ad un gruppo di proprietà) non significa altro che appartenenza degli oggetti che si uguagliano ad una medesima classe; così come ho avuto occasione di spiegare ripetutamente [1].

Il paradosso dell' uguaglianza, già rilevato da altri, per cui essa implica insieme un' identità ed una non identità, resta così pienamente spiegato: poichè le cose uguali appaiono « identiche » se ad esse si sostituisce il concetto astratto della classe in cui sono associate, e all' opposto « diverse » se si considerano come elementi distinti di quella classe. Aggiungasi che « ogni relazione equabile, cioè soddisfacente alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, può quindi ritenersi come una uguaglianza ».

4. La difficoltà che il Burali-Forti trova nelle definizioni per astrazione — che risalgono ad Euclide e di cui anche nella scuola di Peano si è fatto, fino a ieri, buon uso — dipende parimente dal non avere introdotto il concetto dell' elemento astratto di una classe. La lunghezza del segmento x non è, a rigore, la classe dei segmenti congrui ad x, ma è l' astratto di questa classe. Similmente il numero cardinale è l' astratto di una classe di classi equivalenti: p. es. il numero 2 è l' astratto della classe formata da tutte le possibili coppie di oggetti. Povero numero 2, esclama — in qualche luogo — il Burali-Forti, chi mai s' immaginerebbe che la considerazione di esso dovesse importare tutta quella classe di classi?

E compiange il Russell per aver trattato appunto i numeri cardinali colle classi di classi; mentre quelli che hanno seguito in qualche modo lo stesso metodo, sia imitandolo, sia essendovi condotti indipendentemente dalla natura del soggetto, vengono accusati di servilismo verso lo straniero. Sono obbligato a confessare:

e di questi cotai son io medesmo;

nè saprei addurre a mia scusa di non aver neppure citato l'autore così inconsciamente imitato, o di essermene — in

---

[1] Cfr. i *Problemi della scienza*, cap. III, § 11, (pag. 131) e l'art. 9 su « I numeri reali » delle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* (Vol. I, pag. 369).

parte — discostato, considerando l'astratto anzichè la classe delle classi. Ma poichè credo di non esser solo, e che altri — anche logici matematici — sieno incolpati di aver usato lo stesso metodo, mi limiterò a fare questa domanda:

Crede l'A. che quel modo d'introduzione dei numeri rispecchi o pur no l'analisi del loro significato psicologico? Giacchè se egli convenga nel sì, dovrà bene ammettere che, nonostante i suoi ostracismi, s'incontreranno ancora — in tutti i paesi del mondo — matematici che riprodurranno la definizione da lui condannata! (1).

5. Con ciò io non voglio giudicare affatto prive di valore le definizioni cogli operatori introdotte dal Nostro, e — se non m'inganno — già usate — con eleganza — dal PEANO (o da qualche altro) p. es. nella teoria analitica dei numeri fratti e negativi: ma purchè si eviti di andare incontro a definizioni oscure ed artificiose.

Per giudicare, in ultima analisi, di una definizione, non si ha invero altro criterio che quello distinto da BIAGIO PASCAL col nome di « esprit de finesse », non sempre compagno allo spirito strettamente logico, detto « esprit géométrique ». Questa riflessione mi veniva in mente leggendo il paragrafo del nostro trattato che si riferisce ai *vettori* (2). Ma prima d'inoltrarmi su questo terreno scottante, sento il dovere di premunire il lettore contro il pericolo che qui s'incorre di cadere in peccato. Valga l'avvertimento a salvare qualche anima timorata!

Vi sono coloro che brevemente definiscono il vettore come segmento orientato, ed è chiaro che cadono in peccato mortale.

Poi vengono quelli che, dopo aver definito i segmenti uguali, per grandezza e per verso, introducono il vettore $b - a$ come il concetto astratto relativo alla classe dei segmenti

---

(1) Giuste osservazioni sulle definizioni per astrazione si leggono nella Nota di E. MACCAFERRI del Circolo Matematico di Palermo, 24 nov. 1912, ed anche in quella del Periodico, gennaio 1915, salvo che — a nostro avviso — l'A. ha il torto di non ammettere l'operazione logica (a o b o c...), che dà l'astratto della classe (abc...).

(2) IV, 2, 2, pag. 311.

uguali ad ab. A questa definizione nulla si può eccepire (quando anche occorra un simbolo preciso per il concetto astratto di una classe!), se non che resta escluso il vettore nullo; m'immagino che ciò costituisca soltanto un peccato veniale. Ma di nuovo taluno cade qui in peccato mortale, quando afferma che « vettore nullo è un punto » (pag. 313) anzichè « il concetto astratto del punto », come basterebbe dire.

Ora si può chiedere se non sia possibile evitare l'inconveniente che deriva dal dare prima una definizione del vettore non nullo, estendendola poi coll'aggiunta del vettore nullo. Ottimo proposito! E, se un pover'uomo, quale io sono, potesse arrischiarsi a dar consigli ad un così profondo investigatore di queste dottrine, gli suggerirei di esaminare se, per caso, non basti a tal uopo caratterizzare i vettori come traslazioni; qualora ciò non sia stato già fatto. Ma il nostro professore ha trovato, da parte sua, la definizione cercata.

Premesso che un punto a — in relazione a tre punti p, q, r — dà luogo al volume di un tetraedro, vol (a, p, q, r), definito in valore ed in segno: dicesi vettore $(b - a)$ definito dalla coppia di punti a e b, quell'operatore fra terne di punti e numeri reali relativi, tale che applicato alla terna arbitraria x, y, z, produce il numero vol (b, x, y, z) — vol (a, x, y, z)!!

Sarei abbastanza curioso di sapere in qual modo questa definizione possa esser compresa dai nostri studenti, giacchè *per me* essa rasenta il limite della intelligibilità: e la teoria dei vettori è ben di quelle cui vuolsi dare un posto nell'insegnamento! Quando tale definizione non vivrà più per gli studenti delle Università italiane, salvo nel ricordo di qualche veglia d'esame, resti pure al suo autore il conforto che taluno la giudichi *troppo profonda e scientifica*, come è occorso da noi ad altra merce avariata, messa in circolazione per alcun tempo nella scuola; poichè non si vuol togliergli, ad ogni modo, nè l'indulgenza degli amici, nè la stima ch'ei si merita da chicchessia: ci basta di liberare lo spirito di quei timidi che — non amando o non capendo le sottigliezze logiche — pendono incerti fra il terrore e l'ammirazione innanzi all'oracolo di uno specialista. Soltanto per chi ama quest'ordine di questioni avvertiamo che, se le definizioni nominali sono « liberae expositiones nominum », come diceva CANDALLA, hanno pur valore le ragioni di convenienza (additate già nel libriccino della logica di Porto Reale) per cui non giova definire scostandosi troppo dall'uso comune, e — aggiungiamo noi — dall'analisi del processo psicologico che genera il concetto.

Comunque, chiuderemo queste critiche auspicando che dagli acrobatismi logici più recenti non venga menomata l'opera di divulgazione che il prof. BURALI-FORTI ha intrapreso della teoria dei vettori, in unione al chiaro prof. ROBERTO MARCOLONGO; poichè codesta teoria — di cui sono note le applicazioni alla fisico-matematica — merita veramente di essere divulgata nelle nostre Università, se anche possa nuocerle il troppo zelo di chi, per essa, vorrebbe mettere al bando la vecchia geometria analitica cartesiana!

6. Osservazioni di altra indole mi suggerisce la trattazione che il BURALI-FORTI fa del *principio d'induzione completa* (cap. IV, § 3, pag. 331).

La forma con cui il principio medesimo viene esposto (se s è una classe di numeri naturali, cui appartiene il numero a, e se si dimostri che la s contiene ogni numero $\geq x$ quando contiene x: allora la s contiene tutti i numeri $\geq a$), è dovuta al PEANO; ed essendo caratteristica, sarebbe stato forse opportuno ricordarlo, ad informazione del lettore.

Comunque, che valore ha codesto principio?

Tenendo conto che i numeri naturali corrispondono alle classi finite e soltanto a queste, risulta chiaro — dice il BURALI-FORTI (IV, 3, pag. 332) — che *il principio d'induzione è caratteristico delle* **classi finite**. « Piacque, invece, al POINCARÈ di ritenerlo **caratteristico** *delle* **classi infinite**, confondendo il numero dei ragionamenti necessari per stabilire una certa proprietà, col numero degli elementi di una classe particolare, e in tale erroneo apprezzamento, fu naturalmente, seguito da molti autori, specialmente italiani (more solito), sebbene fosse dimostrato, *prima* della contraria affermazione del POINCARÈ, che col principio d'induzione si possono ottenere soltanto le classi finite (cfr. C. BURALI-FORTI, *Le classi finite*, Atti della R. Accademia di Torino, 1896) ».

Ecco, io non ho qui presente, mentre scrivo, i termini precisi del giudizio espresso dal POINCARÈ, ma non credo necessario di prenderne visione per esser certo che egli sapeva benissimo che « col principio d'induzione (cioè aggiungendo un elemento dopo l'altro) si ottengono soltanto le classi finite », anche se non gli sia occorsa la fortuna d'imbattersi nella scoperta fatta dal Nostro, l'anno di grazia 1896. Pare dunque che il BURALI-FORTI avrebbe dovuto domandarsi se, per caso, l'affermazione che « il principio d'induzione caratterizza le classi infinite », o più precisamente il *minimo infinito* (come dice — se ben ricordo — il « caotico » HILBERT) possa ricevere un senso che a lui sfugge. Ora questo senso vien pôrto nella maniera più chiara, proprio dalla forma che al principio ha dato il PEANO. Infatti, si consideri una *serie* di elementi *bene ordinata* nel senso di CANTOR, p. es. una serie di punti succedentisi sopra una retta

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2 \ldots :$$

qui dopo ogni elemento a si ha un successivo $a+1$, ma se una classe s contiene il numero 1, e se dal contenere a si deduca che contiene $a+1$, non per questo si potrà concludere che la s contiene tutti gli elementi della serie, giacchè può darsi che non contenga l'elemento transfinito ω, limite di 1, 2, 3,....

Pertanto il principio d'induzione vale a distinguere le serie infinite a cui rispondono i numeri naturali (1, 2, 3, ...) *dalle altre possibili serie ben ordinate, a cui rispondono i numeri ordinali trasfiniti di* CANTOR. O, se vogliamo servirci — quanto più è possibile — delle parole del BURALI-FORTI: il principio d'induzione caratterizza *la serie infinita formata da tutte le classi finite.* Questo è l'aspetto significativo del principio, risalga esso al POINCARÈ, o all'HILBERT, o piuttosto al CANTOR, o — se si vuole — anche al PEANO; quello su cui il Nostro si è fermato, non vale molto meglio di una verità del sig. DE LA PALISSE, del quale si canta:

Il mourut le vendredi,
le dernier jour de son âge.
S'il fût mort le samedi,
il eût vecu d'avantage.

Non posso lasciare questo argomento senza fare un altro rilievo. L'A. dice (IV, 4, pag. 343) che, secondo una dimostrazione del PIERI, il principio d'induzione, per la classe dei numeri interi assoluti, può essere surrogato da un altro equivalente, in cui sostanzialmente si afferma che « ogni classe di numeri possiede un minimo ». Ma la dimostrazione a cui si allude deve contenere un errore, perchè il principio qui affermato direbbe soltanto che « la serie dei numeri è ben ordinata » e il principio d'induzione non sarebbe soddisfatto, quando la detta serie contenesse dei transfiniti.

7. Per terminare, dirò qualcosa del *principio di* ZERMELO. L'A. lo enuncia correttamente, rilevando che esso postula « se u è una classe di classi, esiste sempre una corrispondenza che, ad ogni classe elemento di u, fa corrispondere un suo elemento » (II, 6, pag. 186). È ammissibile questo principio? PEANO, analizzando il ragionamento con cui si vorrebbe dimostrarlo, fa vedere, molto chiaramente, che esso importa infiniti passaggi, ed è quindi irricevibile. Ma ciò non vieta — pare — che la tesi non provata possa accettarsi come un'ipotesi o un postulato. Intorno a ciò vorrei appunto discutere.

Qual'è il valore di un'ipotesi o di un postulato nelle Matematiche? Evidentemente quello di restringere il significato dei concetti fondamentali; chè se un postulato non porta restrizione alcuna, pare che esso debba essere una conseguenza dei postulati già antecedentemente ammessi. Orbene:

1) o il postulato di ZERMELO non restringe affatto il concetto di classe a cui si riferisce, e allora non è più un postulato, ma una conseguenza delle proprietà elementari, caratteristiche delle classi;

2) ovvero esso importa una effettiva restrizione di codesto concetto, e allora sarà lecito adoperarlo nell'Analisi ordinaria (ove difatti è anche facile sostituirne di volta in volta l'applicazione), ma non nella teoria generale degli insiemi, p. es. per dimostrare un teorema come quello — così illusoriamente stabilito da ZERMELO — che il continuo può essere ben ordinato.

Il BURALI-FORTI inverte, in qualche modo, il nostro dilemma, attribuendo l'onere della prova a coloro che negano anzichè a quelli che accettano il postulato di ZERMELO. Egli viene a dirci:

se il principio di ZERMELO restringe effettivamente il concetto di classe, ebbene si trovi un esempio in cui esso non valga, dimostrando così la sua falsità.

Questo modo di porre la questione risponde alla veduta dei *realisti*, fra i quali sembra dunque che anche il Nostro debba essere annoverato, accanto al RUSSELL, sebbene non faccia esplicita professione dei suoi principii filosofici. Ma un *nominalista* non saprebbe appagarsene.

Certo sarebbe interessante rispondere alla domanda del BURALI-FORTI, troncando così la questione; ma come escludere che riesca impossibile ad un tempo e *costruire effettivamente* (con un numero finito di atti del pensiero) un esempio per cui il principio di ZERMELO sia falso, e dedurre codesto principio dalle proprietà elementari delle classi? Si avrebbe allora un caso, unico del genere, d'*indeterminismo logico*, quasi un *ignorabimus*: che per altro non pare potrà mai essere affermato.

A guardarci bene, la difficoltà proviene dal concetto stesso che si ha della logica. Per il realista gli oggetti del pensiero *esistono* fuori di noi in una realtà metafisica, dalla quale le classi vengono *date*, indipendentemente da ogni lavoro costruttivo del pensiero. All'opposto il nominalista assume che le classi (le corrispondenze ecc.) esistono solo come *concetti costruiti o costruibili dalla nostra mente*. La questione che divide realisti e nominalisti è abbastanza antica perchè non possiamo pretendere di scioglierla con un tratto di penna (1); basti qui avere indicato come essa sorga necessariamente dall'approfondimento di una difficoltà logica, nonostante il disprezzo che il BURALI-FORTI testimonia per quest'ordine di discussioni (I, 12, 2, pag. 68).

Aggiungo che, qualunque veduta si abbia intorno al principio di ZERMELO, ognuno converrà che non si possa almeno farne uso in alcuna dimostrazione senza dirlo esplicitamente.

Ora io non vedo come il BURALI-FORTI riesca a dimostrare ciò che asserisce (II, 6, 5, pag. 185), che ogni classe non equivalente ad una sua parte sia equivalente alla classe **0** ... n,

---

(1) Cfr. il nostro articolo « Sur quelques questions soulevés par l'infini mathématique » nella *Revue de Métaphysique*, t. 24, n. 2, 1917.

dato ch' egli non ha ancora introdotto codesto principio, che a me è occorso in tale dimostrazione [1]. Su questo punto mi sarà gradito un chiarimento (in lingua), che spero mi procuri il piacere di segnalare un progresso conseguito dal Nostro.

8. Pongo termine a queste noterelle invitando il professore Burali-Forti a non aversi a male della forma un pò scherzosa che mi è piaciuto dare a talune critiche, giacchè la discussione dei problemi logici è abbastanza grave perchè si cerchi come si può di alleviarne il peso. Comunque, il Periodico pubblicherà volentieri, e colla celerità consentita dai limiti dello spazio, le sue risposte ed anche le critiche che a sua volta egli (o qualche altro dei logici matematici) voglia rivolgere a quell' analisi psicologica del processo logico, che io stesso ho contrapposto, da quindici anni, all'analisi simbolica. Dove occorre appena avvertire che questa contrapposizione è ben lungi dal significare ostilità alla logica matematica, ma vuol essere piuttosto una libera forma di collaborazione.

Bologna, Università.

Federigo Enriques

---

[1] Cfr. il citato art. su « I numeri reali ».