Sull'immaginario in geometria

Parte II - Le cassinoidi e le curve di Darboux.

8. Cassinoidi. — Ci proponiamo di studiare le curve piane, luogo dei punti le cui distanze da un certo gruppo di poli danno un prodotto costante. Queste curve han ricevuto il nome di *cassinoidi*, presentandosi come estensioni della curva di Cassini, che risponde al caso di due poli. Talvolta sono anche dette *lemniscate*, generalizzando il nome della lemniscata di Bernouilli, che è il luogo dei punti il cui prodotto delle distanze da due poli A e B eguaglia il quadrato della metà di AB.

Consideriamo dapprima la curva di Cassini, luogo dei punti le cui distanze da due punti (generici) A e B danno un rapporto costante (non nullo). Questa curva K è del 4° ordine, come appare subito dall'equazione. Essa deve soddisfare a due condizioni:

1° La K non può segare la retta all'infinito del piano in un punto P fuori dei punti ciclici M e N, perchè la distanza PA (e similmente la PB) diverrebbe infinita. Per lo stesso motivo la K, passando p. es. per M, non può avere in M un ramo tangente alla retta all'infinito, sul quale P, accostandosi ad M, diverrebbe infinita.

2° La K non può neppure segare una retta isotropa per A o B, p. es. AM, in un punto P a distanza finita, perchè la distanza PA e quindi il prodotto $PA \cdot PB$ si annullerebbe. Quindi la K tocca coi suoi due rami per M le due rette isotrope AM e BM, ad anzi queste debbono essere tangenti d'inflessione per i detti rami.

In conclusione: *La curva di Cassini è una quartica che passa doppiamente per i due punti ciclici del piano ed ha un flesso su ciascuno dei quattro rami uscenti da* M *e* N.

Queste proprietà caratterizzano la curva di Cassini. Se una quartica K, soddisfacente ad esse, è reale, le tangenti principali m_1 e m_2 in M, sono immaginarie coniugate alle tangenti n_1 e n_2 in N, sicchè i punti $A = m_1 n_1$, $B = m_2 n_2$, sono reali: la K è luogo di punti il cui prodotto delle distanze da A e B riesce costante.

Infatti, se sopra la quartica K si fa muovere un punto P, il prodotto delle distanze $PA \cdot PB$ non si annulla mai a distanza finita, e nei punti all'infinito M e N — accostandosi ad essi sopra i rami che vi passano — si conserva pure finito e diverso da zero: giacchè, per il ramo osculatore a PM accade che la distanza PA diventi zero (del 1° ordine) mentre la distanza PB diventa infinita dello stesso ordine.

Il resultato ottenuto riesce confermato da un calcolo di costanti, che pure, a prima vista, conduce ad un *paradosso*.

Le quartiche piane dipendono da 14 costanti arbitrarie. L'imposizione d'un punto doppio equivale a 3 condizioni lineari e così le quartiche passanti doppiamente per M e N dipendono da $14 - 6 = 8$ parametri. Ora, se una tangente principale in M o in N deve essere tangente di flesso, si ha una condizione lineare; in tutto dunque 4 condizioni, che sembran ridurre a $8 - 4 = 4$ i parametri da cui dipendono le curve di Cassini. Ma i due poli d'una tal curva dipendono da 4 parametri (le loro coordinate nel piano) e resta ancora la costante a cui si eguaglia il prodotto delle distanze. Dunque le curve di Cassini contengono in effetto 5 e non 4 parametri! Come si spiega il paradosso?

La risposta è che le condizioni perchè le tangenti principali nei due punti doppi d'una quartica sieno tangenti di flesso pei relativi rami, non sono condizioni indipendenti: *se una quartica passante per* M *e* N, *oscula tre rami lineari uscenti da questi punti, essa oscula anche il rimanente ramo.*

Per dimostrarlo si consideri il sistema lineare di tutte le quartiche K che passano doppiamente per M e N: questo sistema ha la dimensione 8 e il grado 8, cioè due K si segano (fuori di M, N) in un gruppo di 8 punti comuni alle K di un fascio; si deduce che le quartiche K passanti per 7 punti del piano passano in generale per un 8° punto da esse determinato.

Fra i gruppi di punti intersezioni di due K, vi è quello formato dalle intersezioni d'una K generica colla retta $r = MN$ contata 4 volte, che — detratte le 8 intersezioni assorbite in generale dai punti doppi M e N — contiene 8 punti, costituiti da 4 coppie di punti infinitamente vicini ad M e N, sui rami di K. Ciò posto, si supponga che per una K irreducibile, tre delle tangenti principali ai rami per M e N (per es. m_1, m_2, n_1) osculino i relativi rami; allora la quartica formata da tutte e quattro le tangenti principali m_1, m_2, n_1, n_2, contiene 7 fra le intersezioni della nostra K colla retta r^2, e quindi contiene anche l'8° punto d'intersezione: quanto dire che la tangente principale n_2 oscula anch'essa il corrispondente ramo di K (per N).

Le cose dette per la quartica di Cassini si estendono facilmente alle cassinoidi d'ordine superiore.

La cassinoide luogo dei punti del piano per cui è costante il prodotto delle distanze da n *poli, è una curva d'ordine* 2n *passante* n *volte per ciascuno dei punti ciclici* M *e* N, *e caratterizzata dalla proprietà di possedere su ciascuno dei* 2n *rami per* M *o* N *un flesso d'ordine* n — 1: cioè un contatto $(n+1)$ punto colla tangente.

9. Le curve di Darboux. — Darboux ha considerato una famiglia di curve piane che, come vedremo costituisce una generalizzazione delle cassinoidi, e che si lasciano definire in relazione a due serie di poli $A_1, A_2, \ldots$ e $B_1, B_2 \ldots$ *come luoghi di punti per cui il prodotto delle distanze d'un punto dai poli della prima serie ha un rapporto costante al prodotto delle distanze dai poli della seconda serie:*

$$PA_1 \cdot PA_2 \ldots = kPB_1 \cdot PB_2 \ldots \qquad (k \neq 0, 1, \infty).$$

Consideriamo in particolare il caso in cui si abbiano due coppie di poli A_1, A_1, e B_1, B_2:

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2} = k.$$

La formula stabilita nel § 4 mostra che *per i punti* P *della curva riesce costante anche la somma algebrica degli angoli* *secondo cui si vedono le due coppie formate dai punti associati ad* A_1, B_1 *e* A_2, B_2.

Questa proprietà si estende in generale alle *curve di Darboux* relative a due serie di n poli, che appariscon dunque come *luoghi di punti per cui riesce costante la somma algebrica degli angoli secondo cui si vedono* n *segmenti dati del piano* [1].

Darboux ha scoperto questa bella proprietà, di cui godono tutte le curve luogo di punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m poli hanno rapporto costante; le quali, per $m < n$, rientrano pure come caso particolare nella famiglia sopra considerata, siccome dimostreremo nel seguito.

10. La quartica di Darboux definita in relazione ai punti ciclici. — Per caratterizzare le curve di Darboux, dal punto di vista delle relazioni proiettive coi punti ciclici, ci varremo di considerazioni sintetiche, a cui si è condotti per naturale estensione dallo studio del caso ($n = 1$) del cerchio (§ 6).

Riferiamoci al caso semplice delle curve di Darboux con due coppie di poli, che — come appare subito dall'equazione — sono del 4° ordine. Affinchè il rapporto $\dfrac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$ si mantenga sempre eguale alla costante $k \neq 1$, esso non deve mai diventare 1, nemmeno quando P va all'infinito sopra la curva; segue da ciò che la quartica non può segare la retta all'infinito in altri punti che nei punti ciclici M e N, ed anche che in questi non può avere un ramo tangente alla retta all'infinito, poichè accostandosi P per es. ad M, sopra il ramo, il rapporto fra i detti prodotti di distanze tenderebbe ad 1. Pertanto la quartica di Darboux passa doppiamente per M e N.

Oltre a ciò essa deve soddisfare a condizioni ulteriori. Poichè una retta isotropa come la A_1M, sega la curva in un punto P che ha da A_1 una distanza $PA_1 = 0$, onde non si annulli il nostro rapporto di prodotti bisogna che si annulli in pari tempo anche la distanza PB_1 o PB_2, sia per es. PB_1. Allora PB_1 sarà pure una retta isotropa: $PB_1 = PN$.

Si riconosce in tal guisa che le due coppie di punti (generalmente a distanza finita), P_1P_2 e P_3P_4, in cui la quartica

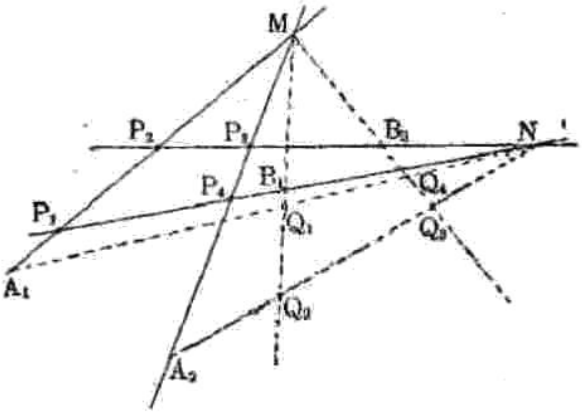
---

[1] Cfr. Darboux, l. c.

di Darboux, K, viene segata dalle rette isotrope, MA_1 e MA_2, sono anche due coppie di punti appartenenti alle rette isotrope NB_1 e NB_2.

Similmente le due coppie di rette isotrope NA_1, NA_2 e MB_1, MB_2, si segheranno in 4 punti $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, appartenenti alla K.

Queste condizioni sono espresse dall' annessa figura, ove tutti i punti sono segnati *come se* fossero reali. Esse *valgono a caratterizzare la quartica di Darboux, K,* potendosi dimostrare la costanza del rapporto dei prodotti delle distanze in relazione alle coppie di poli $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$. Infatti, facendo variare un punto P sulla curva, si verifica che il rapporto $\dfrac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$ non diventa mai zero o infinito, nè quando P va all'infinito in M o N, nel qual caso PA_1, PA_2, PB_1, PB_2 diventano infinite dello stesso ordine, nè quando P va sopra una retta isotropa per A_1, A_2 o B_1, B_2, cioè assume la posizione d'uno dei punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ o $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, nel qual caso numeratore e denominatore del rapporto diventano infinitesimi dello stesso ordine. E però quel rapporto rimane costante.



Ora sorge una domanda: che cosa importano le condizioni sopra espresse per una quartica, K, soggetta ad avere due punti doppi in M e N?

La risposta può esser data molto semplicemente per chi conosce gli elementi della geometria delle curve ellittiche, ossia di genere 1 [1].

La K, passante doppiamente per M e N, è una curva di genere 1, sulla quale le rette per M e N segano due involuzioni g_2^1. Quando si proiettano da N sulla stessa K le coppie di punti di K allineate con M, si trasforma la prima g_2^1 in

---

[1] Cfr. p. es. Enriques-Chisini: *Lezioni sulla teoria geometrica...*, vol. III, §§ 7, 27.

un'altra g_2^1, che, se è distinta dalla data, non avrà coppie comuni con essa. Dunque, se i due punti $P_1 P_2$ allineati con M sono proiettati da N su K, in altri due punti, P_3 e P_4, pure allineati con M, vuol dire che la g_2^1 segata su K dalle rette per M viene trasformata in se stessa dall'involuzione analoga segata dalle rette per N: in altre parole *le due involuzioni* g_2^1 *sono permutabili.*

Se sussiste questa relazione simmetrica di permutabilità, anche ogni coppia di punti allineati con M, dovrà esser proiettata da N in una coppia di punti allineati con M, e reciprocamente due punti di K allineati con N saran proiettati da M in due dunti ancora allineati con N.

Così essendo, si può costruire la figura sopra disegnata a partire da un punto A, scelto nel piano in maniera arbitraria. Infatti, assunto A in un punto generico del piano, determineremo i punti P_1 e P_2 sezioni di MA colla K, e quindi i punti P_3 e P_4 loro proiezioni da N, i quali si troveranno sopra una retta per M: a questa retta dovrà dunque appartenere anche il punto A_2. Ma ora seghiamo la K colla retta NA, in $Q_1 Q_4$; proiettando $Q_1 Q_4$ da M sulla K stessa, si avranno due punti $Q_2 Q_3$ allineati con N, e sulla $Q_2 Q_3$ dovrà pure trovarsi anche il punto A_2, che così riesce determinato.

Infine anche i punti B_1 e B_2 verranno determinati come intersezioni rispettivamente delle rette $P_1 N$, $Q_1 M$ e $P_2 N$, $Q_3 M$.

In conclusione potremo enunciare il teorema:

La quartica di Darboux è caratterizzata come curva del 4° ordine che passa doppiamente pei punti ciclici M, N *del piano, e su cui le rette per* M, N *segano due involuzioni permutabili. Questa quartica costituisce il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due coppie di poli stanno in un rapporto costante, e ciò relativamente ad una serie* ∞^2 *di quaterne di poli: una quaterna* (come Darboux pure ha avvertito) *resta determinata dalla scelta arbitraria, nel piano, di uno dei suoi punti.*

È facile valutare il numero dei parametri da cui dipendono queste curve; anzi, effettuandosi il computo in due modi diversi, se ne trae una conferma dei risultati stabiliti.

L'imposizione d'un punto doppio importa per una curva 3 condizioni, e la permutabilità di 2 involuzioni g_2^1 sopra una curva ellittica dà luogo ad *una* condizione, che significa l'equivalenza delle serie doppie (serie complete g_4^2) [1]; perciò le quartiche di DARBOUX contengono $14-6-1=7$ parametri. Allo stesso resultato si arriva contando le 8 costanti da cui dipendono le due coppie di poli $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, e la costante data dal rapporto del prodotto delle distanze $\dfrac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$; purchè si diminuisca il numero, 9, così ottenuto, di 2, in vista della circostanza che una quartica di DARBOUX è tale rispetto ad ∞^2 quaterne di poli.

11. Casi particolari. — La quartica di DARBOUX essendo definita per rispetto ad una serie di poli, vi è luogo a considerare il caso particolare in cui uno di questi va all'infinito e la curva appare quindi come luogo di punti per cui il prodotto delle distanze da due poli e la distanza da un terzo polo stanno in un rapporto costante. Inoltre, particolarizzando la quartica, si presenta anche il caso in cui essa compaia come luogo dei punti le cui distanze da due poli danno un rapporto costante, cioè come una curva di CASSINI.

La quartica K essendo affatto generale (con due punti doppi in M e N e le relative g_2^1 permutabili) si può ottenere una particolare quaterna di poli, facendo coincidere la retta per N cui appartengono P_1 e P_3 colla retta all'infinito NM: ciò accade se si scelga A_1 sopra una delle due tangenti principali a K in M; allora $A_2 M$ sarà la tangente principale all'infinito, e così anche Q_3 e Q_4, le $A_1 N$ e $A_2 N$ resultando tangenti principali ai rami di K in N. La *quartica*, K, *di Darboux, appare così anche il luogo dei punti* P *per cui il prodotto delle distanze* $\mathrm{PA_1 \cdot PA_2}$ *ha un rapporto costante alla distanza da un unico polo*, B.

(1) Questa equivalenza si può esprimere, come è noto, in base al teorema d'ABEL, eguagliando le somme dei valori degl'integrali ellittici di prima specie

$$2I(P_1)+2I(P_2)\equiv 2I(P_3)+2I(P_4) \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

L'integrale I (coi periodi ω, ω'), relativo ad una quartica $f(xy)=0$ passante doppiamente per i punti all'infinito M e N, vien dato da

$$I=\int \frac{dx}{f'_y}.$$

Per particolarizzare ulteriormente la generazione della K, mandando all'infinito anche B_1, occorre che la K stessa soddisfi a condizioni particolari. Infatti, bisogna che anche P_1 e P_4 vadano all'infinito vicino ad M, e però che le tangenti ai due rami di K in M siano tangenti di flesso per questi rami. Se ciò accade, anche Q_1 e Q_2 come Q_3 e Q_4 andranno all'infinito vicino ad N, cioè le tangenti principali di K in N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami. *La* K *così particolarizzata è la curva di Cassini, luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze dai poli* A_1 *e* A_2. Ed invero la proprietà caratteristica che abbiamo indicato per questa curva, implica — come subito appare — che le due g_2^1 segate dalle rette per M e N, siano permutabili: quando sussista per una quartica tale relazione, le quattro tangenti ai rami pei punti doppi M ed N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami, ove ciò accada per *due* di esse; si ritrovano così le tre condizioni perchè una quartica passante doppiamente per M e N, sia una curva di Cassini.

Il resultato ottenuto ci permette di enunciare che: *la quartica di Cassini può ritenersi anche, in infiniti modi, come luogo di punti i cui prodotti da due coppie di poli sono in un rapporto costante*; uno dei poli della quaterna può scegliersi ad arbitrio, nel piano, sopra una retta per M, diversa dalle tangenti principali.

12. Curve di Darboux d'ordine n. — I resultati, che abbiamo svolto per le curve di Darboux relative a due coppie di poli, si estendono al caso di due serie di poli qualsiansi. Così, il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ sono in un rapporto costante, sarà una sestica, K_6, passante triplamente per i due punti ciclici, M e N, e su cui le rette per M e N segheranno due g_3^1 permutabili. S'intende con ciò che tre punti di K_6 allineati con M verranno proiettati da N, sulla K_6 stessa, in sei punti costituiti da due terne ancora allineate con M; e reciprocamente per tre punti allineati con N. Questa relazione, come nel caso delle due g_2^1 sulla quartica di genere 1, si esprime affermando l'equivalenza dei tripli delle due g_3^1: cioè dicendo che codesti tripli sono contenuti in una medesima serie completa g_9^5, sulla K_6 di genere 4.

Infatti, i gruppi di 9 punti formati da terne allineate con M e N costituiscon gruppi comuni alle serie complete (non speciali) g_9^5 triple delle nostre g_3^1, le quali g_9^5 debbon quindi coincidere (¹); ma se tali serie coincidono, le g_9^2 composte delle terne delle due g_3^1 avran comune una g_3^1, cioè vi saranno ∞^1 gruppi G_9 composti di terne allineate con M e N; ogni terna allineata con M o N farà parte d'un tal G_9; ossia le due g_3^1 saranno permutabili, nel senso innanzi spiegato.

Anche qui la K_6 apparirà come luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli danno un rapporto costante, e ciò rispetto ad una serie di ∞^2 sestine di poli: dove è possibile scegliere un polo ad arbitrio ecc.

Il numero dei parametri da cui dipendono le curve di Darboux del 6° ordine può determinarsi facilmente in due modi, il cui accordo vale anche come dimostrazione della proprietà caratteristica di esse.

Le curve del 6° ordine con due punti tripli M e N contengono $\frac{6 \cdot 9}{2} - 2 \cdot 6 = 15$ costanti arbitrarie; e la permutabilità delle due g_3^1 segate dalle rette per M e N, che significa la equivalenza di due gruppi di 9 punti composti da terne delle due serie, porta 4 condizioni, essendo 4 il genere della curva; queste condizioni, possono esprimersi col noto teorema d'Abel, eguagliando due somme d'integrali abeliani. Così rimangono $15 - 4 = 11$ parametri.

Allo stesso numero si arriva contando le $2 \cdot 6 = 12$ costanti da cui dipendono le due terne di poli, nonchè la costante che esprime il rapporto dei prodotti delle distanze; poichè una stessa curva di Darboux ammette una serie ∞^2 di poli.

Ciò che si è detto per il caso $n = 3$ si estende ora al caso di n qualunque e si ottengono, pure per n qualunque, i casi particolari corrispondenti a quelli considerati per $n = 2$.

Ci limiteremo ad enunciare i resultati che in tal guisa si ottengono.

La curva di Darboux, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n *poli ciascuna sono in rapporto costante, è in generale una curva d'ordine* 2n *di genere*

$$p = n^2 - 2n - 1,$$

(¹) Cfr. Enriques-Chisini, op. cit. § 17.

passante n *volte per i due punti ciclici* M *e* N, *e caratterizzata dalla proprietà che gli* n-*pli delle* due g_n^1 *segate dalle rette per* M *e* N *appartengono alla stessa serie lineare* $g_{n^2}^{n^2-p}$. *La curva gode della sua proprietà rispetto ad* ∞^2 *coppie di serie di poli, potendosi scegliere ad arbitrio uno dei poli.*

Le curve, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n *e* m (m < n) *poli, sono in un rapporto costante, appartengono alla stessa famiglia delle curve anzidette, i poli della prima serie trovandosi su rette che hanno un contatto d'ordine* n — m *coi rami della curva in* M *e* N.

In particolare, per m = 0, *rientrano fra le curve di Darboux le cassinoidi,* luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da *n* poli: tali poli si trovano sopra rette osculatrici (con contatto d'ordine *n*) ai rami della curva.

Questi sviluppi e conclusioni mostrano l'uso che può farsi in problemi elementari o quasi elementari, non solo dell'immaginario, bensì anche dei concetti e dei teoremi della geometria algebrica: i quali, per la loro generalità ed importanza, meritano di essere più divulgati fra gl'insegnanti.

FEDERIGO ENRIQUES