COROLLARIO. — *Dall'osservazione precedente si trae facilmente, che, non si possono avere due valori di* x *l'uno di massimo e l'altro di minimo col minimo maggiore del massimo e senza che tra i valori stessi di* x *vi sia un punto di discontinuità per la* y.

OSSERVAZIONE 4ª. — I valori di massimo o di minimo si ottengono sostituendo il massimo o minimo nella espressione $-\frac{\varphi_2(y)}{2\varphi_1(y)}$.

Dott. ANTONIO BINDONI.

PICCOLE NOTE

I. — **Sugli integrali definiti di una funzione finita.**

È noto che

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a = 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\dots \tag{1}$$

se a è una costante finita. Sia ora $\mu(x)$ una funzione determinata finita e integrabile nell'intervallo $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ ($\alpha < \beta$; α, β costanti); indicheremo con M il limite superiore dei suoi valori assoluti. Divideremo l'intervallo dato in n intervalli parziali $\delta_i^{(n)}$ ($i = 1\,2\dots n$); e sia $\delta^{(n)}$ il più grande di questi intervalli. Supporremo

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad \delta^{(n)} < \frac{H}{n} \quad \text{ossia} \quad n\delta^{(n)} < H \quad \text{ossia} \quad n\,[\delta^{(n)}]^2 < \frac{H^2}{n} \tag{2}$$

dove H è una costante finita indipendente da n. Indicheremo con $\mu_i^{(n)}$ una quantità compresa tra il limite inferiore e il limite superiore (oppure anche uguale a uno di questi due limiti) di μ in $\delta_i^{(n)}$. Io dico che

$$\lim_{n=\infty}\prod_{i=1}^{n}\left[1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}\right] = e^{\int_\alpha^\beta \mu(x)dx} \tag{3}$$

ossia che (si ricordi che, se il numero n è abbastanza grande, $\log(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})$ è reale)

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}\right). \tag{4}$$

La (4) *si potrebbe assumere come una nuova definizione dell'integrale di una funzione* μ (x); *la* (3) *è una ampia generalizzazione di* (1); infatti, ponendo in essa $\mu = \frac{a}{\beta-\alpha}$, $\delta_i^{(n)} = \frac{\beta-\alpha}{n}$, essa si riduce precisamente alla (1). [1]

---

[1] Un caso particolare di questa formula fu da me trovato a proposito di alcune mie ricerche sulle equazioni differenziali (Circolo Matematico di Palermo 1903). La (4) si potrebbe generalizzare, ponendo

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione tale che $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ecc. ecc.

DIMOSTRAZIONE. — Dalla (1) si ha

$$e^{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = 1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} + A_i^{(n)} \tag{5}$$

dove è

$$A_i^{(n)} = (\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})^2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

e quindi

$$|A_i^{(n)}| < |\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}|^2 e^{M\delta^{(n)}}. \tag{6}$$

Dalla (5) si ha

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = \prod_{i=1}^{n}(1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}) + B^{(n)} \tag{7}$$

dove è per la (6)

$$|B^{(n)}| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}\delta_k^{(n)} - \mu_i^{(n)}\delta_i^{(n)}}\right| < n(\delta^{(n)})^2 M^2 e^{M\delta^{(n)}} e^{(n-1)M\delta_{(n)}}.$$

E per le (2) avremo dunque

$$|B^{(n)}| < \frac{H^2M^2}{n} e^{MH} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n=\infty} B^{(n)} = 0. \tag{8}$$

Ma

$$\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} = \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx.$$

Quindi dalla (7), passando al limite per $n = \infty$, otteniamo appunto [in virtù della (8)] la formola (3), che ci eravamo proposti di dimostrare.

GUIDO FUBINI.

II. — **Determinazione delle quadrisecanti di una quaterna di rette** *(nel metodo delle proiezioni centrali)*.

Il prof. Loria in un suo articolo pubblicato in questo giornale (serie II, volume IV, pag. 289) dà una notevole soluzione del problema della ricerca delle quadrisecanti di una quaterna di rette. Poichè fra le soluzioni più comuni non vedo citata la soluzione che qui esporrò e che d'altra parte non ho trovata esplicitamente in alcun testo di Descrittiva, mi permetto di esporla in poche parole, quantunque per la semplicità del principio su cui si fonda essa si presenti spontaneamente.

Le due rette che si appoggiano a certe quattro rette date (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) sono le intersezioni delle due rigate;

$d_1^{(2)}$ determinata dalle rette (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) come direttrici
$d_2^{(2)}$ " " " (A_1, A_2), (B_1, B_2), (D_1, D_2) " "

I punti A_1, B_1, C_1 sono intanto traccie di tre rette di $d_1^{(2)}$; di più se conduco p. es. per B_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, A_2C_2 fino ad incontrarsi in A'_1, e per A_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, B_2C_2 fino ad incontrarsi in B'_1 ho nei punti A'_1, B'_1 le traccie di altre due rette di $d_1^{(2)}$, e precisamente di quelle rette che hanno rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga.

Analogamente si possono determinare le traccie A''_1, B''_1 delle due rette di $d_2^{(2)}$ aventi ancora rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga; di altre tre rette di $d_2^{(2)}$ si conoscono già le traccie A_1, B_1, D_1.

Allora le ulteriori intersezioni delle due coniche determinate, l'una dai punti A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, l'altra dai punti A_1, B_1, D_1, A''_1, B''_1 sono le traccie delle quadrisecanti richieste, e non è difficile trovare i relativi punti di fuga.

Se già si conoscesse una quadrisecante (S_1S_2) il punto S_1 si può sostituire tanto a B'_1 quanto a B''_1 nella determinazione delle due coniche prima nominate.

GUIDO TOGNOLI.