

Sulla Teoria della Relatività

(DALLE CONFERENZE DI EINSTEIN A BOLOGNA)

Seconda conferenza: La Relatività Generale.

Vogliamo anzitutto riassumere brevemente i concetti inerenti alla Teoria della Relatività Speciale, svolti nella passata conferenza. Si è visto come la detta teoria prenda origine dalla difficoltà incontrata dagli studiosi nel mettere d'accordo due leggi derivanti dall'esperienza, la cui validità è posta fuori di dubbio: 1°) il principio di Relatività in senso ristretto che stabilisce l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali in moto traslatorio uniforme relativo, agli effetti della descrizione delle leggi della natura; 2°) la legge della costante velocità di propagazione della luce nelle diverse direzioni, indipendentemente dal moto della sorgente luminosa. A prima vista sembra impossibile metter d'accordo le due leggi, ma non si tarda ad accorgersi che questa impossibilità è soltanto apparente e scompare ove si introduca qualche modificazione nelle idee che dominano la cinematica classica. E precisamente occorre accettare, per i corpi in moto, la contrazione di Lorentz ed il ritardo degli orologi ad essi connessi. Per sviluppare la teoria della Relatività Speciale, è necessario richiedere che le leggi della natura restino invariate rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Si può allora dire che il moto dei corpi è soltanto relativo, almeno quello traslatorio uniforme, perchè tutti gli stati di moto di questa specie che possono immaginarsi, sono equivalenti nel senso più sopra riferito.

Ci si può ora domandare se questa equivalenza non sussista, anche, dal punto di vista fisico, per i sistemi non iner-

ziali o, il che fa lo stesso, per gli stati di moto non uniforme. Tale equivalenza esiste evidentemente dal punto di vista cinematico, ma dal punto di vista fisico, ossia agli effetti della descrizione delle leggi naturali, nulla può dirsi *a priori* intorno ad essa. Sembra anzi, ad un primo esame superficiale della questione, che non sia lecito considerare i sistemi non inerziali (quei sistemi cioè per i quali non è valida la legge di inerzia del Galilei) come equivalenti allo scopo anzidetto: vi si oppone la stessa legge di inerzia ora rammentata. Assumiamo infatti un sistema inerziale K di riferimento. In esso, per quanto sappiamo, i corpi si muovono in linea retta con velocità uniforme. Consideriamo poi un secondo sistema S_A muoventesi rispetto al primo di moto accelerato con accelerazione costante. I corpi in moto che rispetto a K descrivono una linea retta con velocità costante, descrivono invece, come è noto, una parabola rispetto ad S_A . Non è dunque più lecito parlare di equivalenza fra i sistemi di K ed S_A agli effetti del moto dei suddetti corpi, e ciò perchè al sistema S_A non risulta applicabile la legge fondamentale di Galilei. È possibile però applicare ai sistemi accelerati una legge più generale di quella del Galilei, rispetto alla quale il principio dell'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali ed accelerati, può agevolmente sostenersi. A tal uopo ricordiamo un teorema che, noto fin dai tempi del Galilei, non venne mai rettamente interpretato dai cultori della Meccanica Classica. Intendiamo riferirci al teorema dell'eguaglianza fra la massa inerte e la massa ponderale di un corpo. Anzitutto notiamo che, dato un corpo, la sua massa può essere definita in due modi completamente diversi:

1°) come *massa inerte*, ossia come rapporto fra la forza acceleratrice impressa al corpo e la corrispondente accelerazione che questi riceve, il che si esprime di solito con la formula:

$$\text{Massa inerte} = \frac{\text{Forza}}{\text{Accelerazione}}$$

In questo senso due o più corpi hanno diversa massa se, applicando ad essi una medesima forza acceleratrice, ricevono accelerazioni diverse;

2°) come *massa ponderale*, ossia come rapporto fra la forza agente sul corpo quando questo sia immerso in un campo gravitazionale e la intensità del campo stesso, il che si esprime comunemente con la formula:

$$\text{Massa ponderale} = \frac{\text{Forza}}{\text{Intensità del campo}}$$

In questo senso due o più corpi hanno massa diversa se posti in un medesimo campo gravitazionale di determinata intensità, sono sollecitati da forze diverse.

Le due definizioni di massa così stabilite, sono assolutamente diverse. Tuttavia l'esperienza non permette di rilevare nessuna differenza quantitativa fra le due masse: inerte e ponderale. Ora, dalle precedenti relazioni si trae:

$$\text{Accelerazione} = \frac{\text{Massa ponderale}}{\text{Massa inerte}} \times \text{Intensità del campo.}$$

Ma l'esperienza ci dice che in un dato campo gravitazionale, tutti i corpi acquistano la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro natura fisica, per cui il rapporto fra le due masse, deve risultare eguale per tutti i corpi. Questo rapporto può ridursi all'unità con una conveniente scelta delle unità di misura, ed allora ne viene:

$$\text{Massa inerte} = \text{Massa ponderale.}$$

Un risultato così elementare e preciso, deve naturalmente avere una causa profonda, ma la meccanica classica non è riuscita ad afferrarla completamente ⁽¹⁾. Vedremo subito quale portata abbia per il nostro studio, la giusta interpretazione di questo risultato, ma prima vogliamo mostrare un lato debole della legge di Galilei. Essa dice: Un corpo situato abbastanza lontano da altri corpi per non risentire della loro azione, permane in istato di riposo o di movimento rettilineo uni-

⁽¹⁾ Tuttavia la ragione ne appare chiara se si ammette l'ipotesi metafisica soggiacente alle speculazioni di Galileo e Newton sulla struttura atomica della materia: gli atomi essendo pesanti (secondo Democrito) e qualitativamente identici, massa e peso risulterebbero proporzionali al numero (o al volume) degli atomi contenuti in un corpo. (N. d. R.).

forme. Ora non è possibile accorgersi se un corpo è o meno sottoposto all'azione di altri corpi, se non esaminando il suo moto rispetto a questi. Per cui ci si aggira in un circolo vizioso. Supponiamo di avere un sistema S_A che si muova di moto accelerato rispetto ad un sistema inerziale S . I corpi che sono in quiete rispetto ad S appaiono dotati di una medesima accelerazione rispetto ad S_A , e dal punto di vista relativistico ciò può interpretarsi in due modi: o dicendo che i detti corpi sono fermi ed S_A è in moto accelerato, ovvero dicendo che S_A è in quiete, ma i corpi in esso contenuti godono della proprietà di cadere con eguale accelerazione se sono abbandonati a sè stessi. Ciò equivale a postulare l'esistenza, al di fuori del sistema S_A di un campo gravitazionale, giacchè la proprietà anzidetta è per quanto sappiamo, atta a caratterizzare un campo siffatto. In altre parole: il fatto di conoscere che in un campo gravitazionale tutti i corpi, cadendo, acquistano la stessa accelerazione, ci dà il diritto di trattare il sistema S_A come se fosse in quiete e di pensare che esiste al di fuori di esso, un campo gravitazionale. Si comprende allora come a questi sistemi non sia applicabile la legge di Galilei. Questa vale infatti solo per corpi molto distanti gli uni dagli altri, tali cioè che si possano considerare nulli i reciproci effetti dei campi gravitazionali relativi. Converrà dunque proseguire nell'idea ora esposta. Se è vero che ogni sistema accelerato si può sostituire con un campo gravitazionale, sarà possibile per mezzo del calcolo, studiare tutte le proprietà del campo stesso, desumendole da quelle del sistema accelerato con un semplice cambiamento di coordinate. In altre parole, se è lecito considerare i sistemi accelerati come in quiete nel senso sopra riferito, allora è possibile costruire una teoria generale della gravitazione ⁽¹⁾. Una prima applicazione di quanto sopra,

⁽¹⁾ Questo vale almeno in prima approssimazione. Estendendo i limiti di spazio e di tempo verrebbe meno l'equivalenza; in queste condizioni un sistema accelerato è equivalente soltanto a particolari campi gravitazionali. Approfondendo l'esame della questione in rapporto agli sviluppi seguenti dell'articolo, si riconosce che un campo generale di gravitazione può sostituirsi col moto accelerato di un sistema di riferimento così come una determinazione metrica qualsiasi di una varietà a più dimensioni, ammette in ciascun punto una determinazione metrica euclidea tangente.

si ha prendendo in esame la traiettoria di un raggio luminoso che traversi un campo gravitazionale. Per quanto si è detto, questa traiettoria che appare rettilinea rispetto ad un sistema inerziale, dovrà apparire curva rispetto ad un sistema accelerato. Questa deduzione teorica è passibile di conferma sperimentale riferendosi ad un campo gravitazionale molto intenso quale può essere ad es. per noi, quello inerente alla massa solare. Vedremo meglio in seguito come l'esperienza abbia fornito questa conferma nel modo più insperato, durante l'eclissi di sole del 1919.

Giunti a questo punto del nostro studio, sembrerebbe facile costruire la teoria generale della Relatività. Basterebbe studiare i fenomeni naturali facendo intervenire, pei sistemi accelerati, la considerazione del campo gravitazionale. Ma la questione non è così semplice come appare a prima vista e si complica invece in modo straordinario. Ciò deriva dal fatto che, volendo far intervenire nello studio dei fenomeni naturali, la nozione di campo gravitazionale, ossia volendo considerare sistemi di riferimento in qualsiasi condizione di moto, occorre uscire del campo limitato della geometria euclidea ed attribuire ai concetti spazio-temporali un significato nuovo e più generale.

Prendiamo come sistema di riferimento S_R un disco ruotante con velocità uniforme attorno al suo centro C (fig. 4). Per questo sistema non è più valida la geometria euclidea e non è più possibile definire il tempo come fu fatto nella passata conferenza. Anzitutto domandiamoci che significato fisico hanno le idee geometriche di spazio e tempo. Riferendoci ad un sistema galileiano K , si vede che i corpi son così fatti da potersi mettere in moto come vuole la geometria euclidea.

Praticamente ciò significa che per il sistema galileiano K (euclideo) è possibile ad es. fare la seguente costruzione. Prendiamo un gran numero di asticelle tutte eguali e disponiamole in guisa da formare una rete di quadrati. La costruzione è pienamente possibile ed è tale che la rete ricopre interamente una qualsiasi superficie appartenente a K . Ma supponiamo ora che le asticelle godano della proprietà di

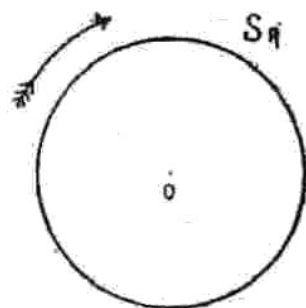


Fig. 4.

dilatarsi con la temperatura e che quest' ultima cambi da punto a punto della superficie considerata. La nostra rete di quadrati andrà tutta sottosopra perchè le diverse asticelle, dilatandosi variamente a seconda della loro posizione sulla superficie, si deformeranno in modo che i quadrati costruiti nella maniera anzidetta non si chiuderanno più esattamente come prima e la rete non sarà più tale da ricoprire interamente la superficie. Volendo considerare tuttavia le asticelle come se fossero ugualmente lunghe, non è più possibile applicare alla superficie in esame, i procedimenti della geometria euclidea. Se sostituiamo alla temperatura un'altra causa qualsiasi, il ragionamento fatto non cambia ed è possibile accorgersi così che lo spazio in cui si opera non è più euclideo. Tale è il caso del nostro disco ruotante S_R . Infatti è noto che un corpo in moto subisce la « contrazione di Lorentz » per la quale appare più corto di quanto in realtà non sia. Orbene disponiamo tante asticelle lungo il raggio OR e lungo la circonferenza C del nostro disco (fig. 5); e domandiamoci se per esso è valida la geometria euclidea. Si vede subito che

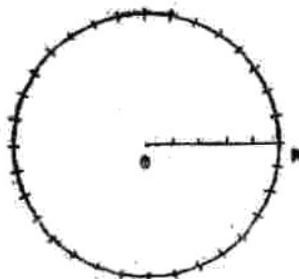


Fig. 5

le asticelle situate lungo la circonferenza, in quanto son disposte nella direzione del moto, subiranno un raccorciamento, mentre quelle situate lungo il raggio, in quanto hanno direzione perpendicolare al moto, resteranno invariate. Per cui il rapporto fra la circonferenza e il diametro del disco, non sarà più espresso da π , ma da un numero maggiore di π ⁽¹⁾.

Ecco che i teoremi della geometria euclidea non valgono più per questo sistema di riferimento, come si era postulato. Occorre notare qui che i teoremi di geometria hanno significato in Fisica se è possibile applicarli ad oggetti reali che cadano sotto i nostri sensi. Altrimenti resta solo una costru-

(1) Questa affermazione esigerebbe un'analisi approfondita. Per penetrare meglio nella questione giova considerare una piattaforma circolare fissa ed un treno chiuso che corra lungo la periferia; la lunghezza del treno deve esser misurata da un osservatore che sta sulla piattaforma, e questi deve considerare la testa e la coda del treno in posizione *per lui* contemporanee.

zione logica indipendente. Ora il disco S_R può esser preso come sistema di riferimento in senso fisico, e siccome alla sua periferia agisce una forza (centrifuga) per la quale è valido il teorema dell'eguaglianza fra le masse ponderale ed inerte, si può dire che rispetto ad esso esiste un campo gravitazionale. Senonchè, non essendo più valida per questo sistema di riferimento la geometria euclidea, non è possibile fissare un sistema di coordinate nè parlare di spazio in senso fisico. Analogamente se prendiamo due orologi A , B , (fig. 6) e li disponiamo uno alla periferia e l'altro al centro del disco, poichè il primo possiede una certa velocità ed il secondo no, ne deriva, per un risultato noto, che il primo orologio, giudicato da un sistema galileiano, batte i secondi più lentamente dell'altro. Ossia il campo gravitazionale ha influenza sul comportamento delle aste metriche e degli orologi. Per quanto riguarda le coordinate temporali, si può dedurre da quanto

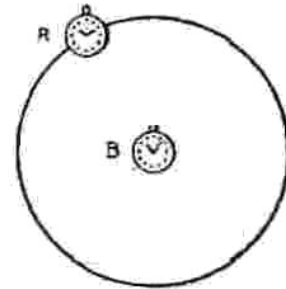


Fig. 6.

precede, una conferma sperimentale. Il campo gravitazionale creato dal disco in moto, ha disposizione radiale e gli orologi disposti lungo una linea di forza devono per quanto si è visto, camminare tanto più lentamente quanto più sono lontani dal centro del disco. Ciò deve esser vero anche per il campo gravitazionale creato dagli astri che ha la stessa disposizione radiale. Allora se si considerano due elettroni le cui vibrazioni forniscono una determinata luce monocromatica, posti uno sulla superficie del Sole e l'altro su quella della Terra, il moto vibratorio del primo deve apparire più lento di quello del secondo. Questa deduzione teorica deve tradursi sperimentalmente in uno spostamento delle righe spettrali fornite dal primo elettrone rispetto a quelle fornite dal secondo, verso la regione meno refrangibile dello spettro. Sfortunatamente esistono varie cause d'errore che si sovrappongono a mascherare il fenomeno, tanto che l'esperienza in questione non ha potuto dare ancora risultati decisivi ⁽⁴⁾. Ove l'esperienza riu-

⁽⁴⁾ Esperienze recenti confermatrice della teoria sono state fatte da PÉROT (Cfr. i *Comptes rendus de l'Institut de France*, 7 marzo 1921).

scisse, sarebbe possibile risalire alla espressione del potenziale del campo gravitazionale degli astri e calcolare la massa delle stelle.

La difficoltà incontrata, per i sistemi non inerziali, di non poter dare alle coordinate spazio-temporali un senso che si riattacchi direttamente all'esperienza, può esser felicemente superata mediante certe considerazioni che passiamo ad esporre. I continui non-euclidei furono particolarmente studiati dal Gauss il quale fornì anzi la teoria relativa ai campi bidimensionali. Per esporla brevemente, riferiamoci ad una porzione di superficie ellissoidica (fig. 7). Si vede subito intanto che siamo in un campo non-euclideo perchè riesce impossibile di costruire sulla detta superficie la rete di quadrati di cui si è

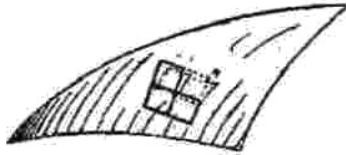


Fig. 7.

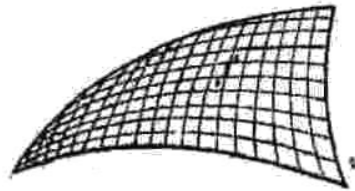


Fig. 8.

tenuto parola precedentemente. Gauss considera allora sulla superficie, un duplice sistema di curve numerate e tali che le curve di un medesimo sistema non hanno alcun punto a comune (fig. 8), mentre ogni curva del primo sistema incontra ogni curva del secondo in un punto ed in un punto solo. In tal modo, per ogni punto della superficie passa una curva ed una curva sola di ciascun sistema ed il punto stesso riesce pienamente individuato assegnando i due numeri p, q (coordinate di Gauss) relativi alle curve che si incontrano in esso. Con questo sistema è possibile individuare tutti i punti della superficie considerata, senza che nulla si conosca peraltro circa la loro reciproca distanza. Per meglio dire: la distanza fra due punti può esser determinata solo in funzione delle coordinate stesse ($ds^2 = g_{11} dx_1^2 + \dots$ dove g_{11}, g_{12}, \dots son funzioni delle coordinate). Se queste funzioni assumono certi valori semplici la superficie diviene euclidea e il sistema di riferimento diventa cartesiano. Di più il sistema delle coordinate di Gauss (che è stato esteso a continui di tre e più dimensioni) riesce applicabile solo a quei continui che possono, entro

porzioni abbastanza piccole, esser trattati come euclidei. Si procede poi per approssimazione esaminando come varia l'espressione delle coordinate via via che la porzione di superficie considerata aumenta. Ora, abbiamo visto che l'esistenza di un campo gravitazionale fa sì che i metodi di misura necessari non sono più, nel caso generale, quelli forniti dalla geometria euclidea. Per quanto riguarda però il campo gravitazionale terrestre, la sua influenza è troppo piccola perchè ci sia possibile accorgersi della non validità della geometria euclidea. Si può tuttavia giungere allo stesso risultato per via di riflessione. Già sappiamo che è possibile sostituire alla considerazione di un sistema accelerato, quella di un sistema in quiete, ove si introduce l'esistenza, al di fuori di esso, di un adeguato campo di gravitazione. Così se pensiamo ad un osservatore che cada verticalmente in un campo gravitazionale essendo dotato della stessa accelerazione del campo, è chiaro che per lui non esiste gravitazione. Se egli infatti lascia cadere dei corpi attorno a sè, questi resteranno fermi rispetto a lui perchè acquisteranno subito la medesima accelerazione del campo, di cui egli stesso è dotato. Precisamente si vede che in ogni momento, esiste attorno a ciascun punto dello spazio un intorno quadrimensionale agli effetti del quale la geometria e il movimento degli orologi, è tal quale sarebbe se non esistesse il campo gravitazionale. In altre parole, considerando campi gravitazionali di dimensioni infinitamente piccole, il sistema di coordinate ad essi relativo viene ad acquistare un significato fisico immediato, nel senso della relatività speciale perchè è possibile scegliere lo stato di accelerazione del sistema di coordinate locale, infinitamente piccolo in modo che l'esistenza del campo gravitazionale non abbia influenza sensibile (¹).

Ciò significa che, operando in porzioni di spazio infinitamente piccole rispetto alla vastità dell'universo del quale

(¹) Si intende dire che entro limiti sufficientemente ristretti vale la relatività speciale, sicchè la distinzione fra spazio e tempo acquista in questi limiti un significato fisico che manca invece per chi prenda in considerazione l'universo quadrimensionale che è lo spazio-tempo.

facciamo parte, ci è possibile ritenere valida in prima approssimazione la geometria euclidea, nonostante la presenza del nostro campo gravitazionale. Per la totalità dello spazio, le quattro coordinate spazio-temporali non hanno significato fisico, ma lo acquistano invece se si considerano spazi e tempi infinitamente piccoli rispetto al continuo universale quadridimensionale.

Il problema inerente ai sistemi non inerziali si riduce ad un problema matematico: la determinazione di quelle funzioni g che compaiono nell'espressione della distanza ds sopra considerata. Esse forniscono l'espressione analitica del campo gravitazionale e danno anche le qualità geometriche dello spazio e del tempo ad esso inerenti (⁴).

Sotto questo aspetto, il campo gravitazionale ed il campo metrico, si identificano: Geometria e Cinematica da un lato, gravitazione dall'altro, in quanto forniscono le proprietà metriche dello spazio quadridimensionale, si equivalgono. E poichè le une danno il concetto di massa inerte e l'altra quello di massa ponderale, resta acquisita nel modo più semplice, una interpretazione fisica del teorema dell'uguaglianza fra le due masse inerte e ponderale.

Le considerazioni suesposte mostrano come sia possibile estendere ai sistemi accelerati o non inerziali, i risultati della teoria speciale di Relatività e giungere alla conoscenza della legge generale del campo gravitazionale. Questa legge deve esser tale da restare invariata per una trasformazione qualunque (e non soltanto per una trasformazione di Lorentz, come nella relatività speciale). Ottenuta la legge generale del campo, importa notare che essa fornisce in prima approssimazione, la classica legge di Newton. È dunque una legge

(⁴) Per ogni espressione matematica del ds^2 (subordinatamente a certe disuguaglianze) resta definito in generale un campo di forza, giacchè ogni geodetica dello spazio tempo rappresenta la traiettoria di un moto che può esser provocato dal campo. Tuttavia il caso fisicamente più semplice ed interessante è quello dei campi generati da masse isolate anzichè diffuse; la trattazione di questo caso conduce a un sistema di equazioni differenziali a cui devono soddisfare i coefficienti g del ds^2 .

Il significato fisico di queste condizioni non sembra ancora sufficientemente chiarito.

(N. d. R.).

più ampia, non una nuova legge. In seconda approssimazione, la legge in parola rende conto di certe anomalie che la legge di Newton da sola, non riusciva a spiegare. Tale per es. lo spostamento del perielio dell'orbita del pianeta Mercurio. Secondo la legge di Newton, i pianeti devono muoversi lungo orbite la cui orientazione rispetto alle stelle fisse, deve restare invariata nel corso del tempo. Ora da lungo tempo era stato osservato che l'orbita del pianeta Mercurio si spostava lievemente rispetto alle dette stelle. Furono tentate varie spiegazioni di questa anomalia, ma la teoria della relatività generale, ne rende conto in modo perfetto e soddisfacente. Se si fa il calcolo partendo dalla legge generale del campo gravitazionale anzichè da quella di Newton, si vede che le orbite dei pianeti devono cambiare posizione nel corso del tempo, in misura lievissima, tanto lieve che lo spostamento è osservabile solo per il pianeta Mercurio il quale, per esser come è noto più prossimo al Sole degli altri, risente l'influenza del campo gravitazionale dell'Astro in modo più intenso.

Terza conferenza: La concezione relativistica dell'Universo.

Abbiamo esposto nella passata conferenza, le idee informatrici della teoria della Relatività Generale. Vogliamo ora soffermarci particolarmente su di una conseguenza della teoria stessa, passibile di conferma sperimentale. Di poi riassumeremo tutti i risultati ottenuti e passeremo ad esporre la concezione relativistica dell'Universo.

Abbiamo visto che la traiettoria di un raggio luminoso deve incurvarsi in un campo gravitazionale. Per verificare sperimentalmente questa conclusione, era necessario operare in un campo gravitazionale molto intenso. Dovendosi escludere quello inerente alle stelle perchè l'angolo sotto il quale esse sono viste da un osservatore terrestre, è troppo piccolo per esser facilmente apprezzato, a causa della loro enorme distanza da noi, si pensò di giovarsi del campo gravitazionale inerente alla massa solare. E precisamente di osservare la traiettoria percorsa da un raggio luminoso proveniente da una stella opposta al Sole e sfiorante il disco solare lungo il suo cammino. Secondo le previsioni teoriche il raggio lumi-

noso doveva deviare dalla traiettoria rettilinea primitiva ed incurvarsi verso il Sole subendo una deflessione misurata da $\frac{1.75''}{\Delta}$ essendo Δ la distanza della traiettoria dal centro del Sole, espressa in raggi del Sole stesso. Come si poteva osservare praticamente tale deflessione?

Siano S ed S_1 (fig. 9) due stelle opposte al Sole. Un raggio luminoso proveniente da S dovrebbe propagarsi secondo la

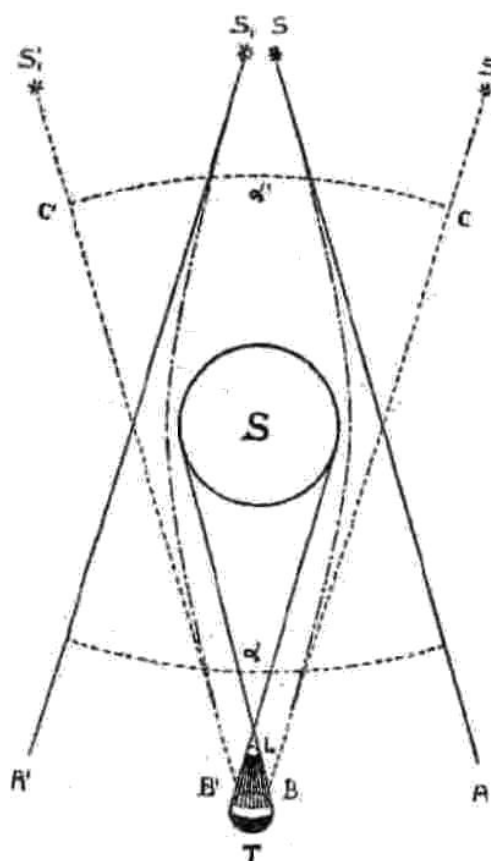


Fig. 9.

traiettoria rettilinea SA , ma per effetto del suo passaggio nelle immediate vicinanze del Sole risente l'azione del campo gravitazionale dovuto alla massa di questo e subisce una deflessione avvicinandosi all'orlo del disco solare, per modo che la sua traiettoria diviene iperbolica e il raggio stesso si propaga lungo il ramo di iperbole SB . Sicchè un osservatore situato sulla superficie della Terra T , vede la stella nella direzione C , e precisamente in S' . In modo analogo gli sembrerà

che la luce proveniente dalla stella S_1 emani da S_1' . Allora l'angolo formato dalle direzioni dei raggi luminosi provenienti dalle due stelle S ed S_1 , verrà ad accrescersi per la presenza della massa solare e ad assumere il valore $\alpha' > \alpha$. Dal punto di vista sperimentale, non c'è che da prendere due immagini fotografiche delle due stelle S ed S_1 : la prima in un'epoca nella quale il Sole sia interposto fra le stelle medesime (il che può farsi soltanto durante un'eclissi totale di Sole, chè altrimenti la luce da questi emanata, diffusa dall'atmosfera, renderebbe evanescenti le immagini delle stelle in questione), e l'altra qualche tempo dopo ossia quando il Sole occupa un'altra posizione nel Cielo. Se le nostre argomentazioni sono giuste, deve potersi verificare che nella prima fotografia, la distanza fra le immagini delle due stelle è sensibilmente maggiore di quello che appare dall'esame della seconda fotografia. Gli astronomi Eddington, Crommelin ed altri, fotografarono infatti 7 stelle opposte al Sole durante l'eclissi totale del 29 maggio 1919 a Sobral (Brasile) e nell'isola Principe (Africa Occidentale). Confrontate fra loro opportunamente, le copie ottenute con quelle relative a fotografie prese in precedenza, quando il Sole occupava altra posizione nella volta celeste, risultò una differenza, nelle distanze delle immagini stellari, di circa $1/20$ di mm., in accordo con le previsioni teoriche entro limiti di approssimazione del $10/20$ %.

Un'altra conferma del fenomeno in questione, potrà aversi in occasione dell'eclissi totale di Sole che si verificherà nel venturo anno.

Vogliamo ora riassumere brevemente il corso delle idee seguito nella nostra esposizione. Abbiam trattata anzitutto la relatività speciale che assume come ipotesi la validità della geometria euclidea per i corpi fissi di riferimento. In questa ipotesi le coordinate posseggono un significato fisico di misura che ci ha permesso di individuare il comportamento degli orologi e delle aste metriche. Fondamento di questa prima parte della teoria, è la legge di propagazione della luce con velocità costante, relativamente ad un dato sistema di coordinate. Questa legge deriva dall'esperienza e dallo studio dell'Elettrodinamica dei corpi in movimento (Maxwell, Lorentz, ecc.), ma sembra essere in contrasto col principio di relatività speciale. Il contrasto è tuttavia soltanto apparente

e basta modificare le idee cinematiche di universalità del tempo e delle leggi relative ai corpi ed orologi in moto, per accorgersi che i due principi non contengono alcunchè di contraddittorio, e posson combinarsi benissimo in una teoria completamente logica. L'abbandono dei pregiudizi inerenti a tale falsa universalità, porta con sè la necessità di ammettere la contrazione di Lorentz ed il ritardo degli orologi per i corpi in moto, e conduce al concetto di relatività della contemporaneità. Al centro di tutta la teoria ora riassunta, stà il fatto che le leggi naturali sono covarianti rispetto alla trasformazione del Lorentz, il che ci permette di dare espressione matematica al Principio di Relatività Speciale. In quel che precede però, non si trova una spiegazione della gravità nè una giusta interpretazione del teorema dell'eguaglianza delle due masse inerte e ponderale di un corpo. Si è perciò costretti ad allargare il campo di validità del Principio Speciale di Relatività e ad affacciare l'ipotesi che anche i sistemi di coordinate non inerziali, siano equivalenti agli effetti della descrizione delle leggi naturali. In questo ordine di idee deve essere possibile determinare in che senso la gravità agisca sui corpi in moto e fino a che punto eserciti la sua azione sulle leggi fisiche, ossia dare la legge generale della gravitazione. Ottenuta l'espressione di questa legge generale, si constata che essa fornisce in prima approssimazione la nota legge di Newton; in seconda approssimazione, rende ragione dell'anomalia riscontrata nel moto del pianeta Mercurio e di altre anomalie finora non sufficientemente spiegate al lume delle teorie classiche.

Fin che si resta nel campo della Meccanica classica e della Teoria Speciale della Relatività, la geometria esiste come disciplina a sè indipendentemente dalla fisica, ossia la maniera di ammettere l'esistenza dei corpi fisici, è completamente indipendente dalle proprietà metriche dello spazio. Ma quando si passa a considerare la Teoria Generale della Relatività, questa indipendenza non esiste più ed è infirmata dalla presenza del campo gravitazionale che modifica la struttura geometrica dello spazio. Così ad es. si è visto che nel caso di un disco ruotante uniformemente attorno al suo centro, non può più esser tenuta valida la geometria euclidea. Ora se l'esistenza di un campo gravitazionale porta con sè la non vali-

dità della geometria euclidea, si può domandarsi come debba esser concepito lo spazio che costituisce il nostro Universo, il quale non può esser considerato più euclideo come vorrebbe la meccanica di Newton.

Si potrebbe tuttavia pensare che lo spazio che ci circonda differisse pochissimo da uno spazio euclideo, fosse cioè « quasi-euclideo ». Vediamo che cosa ci suggerisce in proposito la teoria della Relatività.

Fino dai tempi di Riemann i geometri avevano affacciata l'ipotesi di uno spazio sferico, avente cioè volume finito, senza per questo esser limitato e tale ipotesi era sempre restata nel campo puramente geometrico. Vediamo come sia possibile oggi attribuire a questa concezione anche un significato fisico. Cosa sappiamo noi circa la disposizione della materia nello spazio? Poichè la velocità relativa delle stelle cosiddette fisse, è piccolissima in confronto a quella della luce, è lecito pensare in prima approssimazione che la materia esistente nell'Universo sia immobile. In prima approssimazione è anche lecito ammettere che la densità di questa materia sia costante, ossia che la materia stessa sia uniformemente distribuita nello spazio.

Ciò ammesso, si dimostra col calcolo che il caso ideale ora prospettato, dà come soluzione un mondo sferico il cui raggio dipende dalla densità della materia che lo costituisce, secondo la formola

$$R = \sqrt{\frac{2}{K\rho}}$$

dove ρ è la densità media della materia ed il rapporto $\frac{2}{K}$ ha il valore $1,08 \cdot 10^{27}$ nel sistema C. G. S. Ora per $\rho = 0$ si ha $R = \infty$ e quindi il mondo sarebbe infinito ed illimitato, come vuole la teoria di Newton, a patto che la densità media della materia fosse nulla. In questa ipotesi, l'Universo ammetterebbe una specie di centro nel quale la densità della materia sarebbe massima ed allontanandosi dal quale, diminuirebbe fino ad annullarsi del tutto all'infinito. Questa rappresentazione dell'Universo è, secondo noi, poco soddisfacente. Ammettendo invece che la densità media ρ della materia sia diversa da 0, allora si ha per R un valore finito ed il mondo può essere sferico, finito ed illimitato, nel senso sopradetto.

Effettivamente però la materia non è distribuita in modo uniforme e non è immobile come si è supposto in via approssimativa, per cui la concezione del mondo sferico sarà soltanto approssimata. In realtà, si tratterà di un mondo quasi-sferico, ma sempre finito, perchè le equazioni dal campo gravitazionale mostrano che dovunque esiste materia, la curvatura dello spazio è positiva. È possibile, allo stato attuale delle nostre cognizioni, acquistare un'idea sensibile di un mondo finito ma illimitato? A questa domanda si può rispondere cominciando a prendere in considerazione uno spazio sferico a due dimensioni (superficie sferica): si faccia la proiezione stereografica della sfera sopra un piano, e si consideri, sopra la sfera, come grandezza di un arco la grandezza della sua proiezione piana; allora la sfera — cui si tolga il centro di proiezione — appare appunto come una superficie finita ma tuttavia illimitata.

Ed è chiaro come similmente si possa procedere considerando uno spazio a tre o a più dimensioni. Ed è così acquistata un'idea sensibile di un mondo finito ed illimitato, quale potrebbe essere appunto il nostro, in base ai risultati, che si traggono dall'esame delle teorie relativistiche fin qui esposte.

G. TODESCO
