Maurilia Sordini

Successioni di interi e loro densità

La teoria dei numeri è di solito giudicata con prevenzione e di fatto sacrificata nell'insegnamento secondario. Maurilia Sordini nel suo articolo "riabilita" la teoria perchè, pur occupandosi di numeri con linguaggio "numerico" estremamente proprio, riesce ad essere stimolante e creativa. I suoi esempi, semplici ma ricchi di contenuto, danno luce anche a concetti delicati, quali la densità di una successione, di solito lasciati nel buio dei termini comprensibili soltanto agli addetti ai lavori.

1. Introduzione.

Molti problemi di teoria dei numeri si formulano in termini estremamente semplici, ma la loro completa soluzione, quando possibile, presenta sovente un grado di difficoltà elevato. Le prove a favore della verità di questa affermazione sono numerose: valga per tutte il teorema di Fermat. In questa ottica, gli esempi che seguono riescono a ben rendere l'idea di quali e quante difficoltà presentino quesiti che, se esaminati a grandi linee, richiedono talora soltanto risposte elementari. Tuttavia essi possono essere un buon punto di partenza per affrontare lo studio di argomenti più raffinati quale quello delle successioni di interi che mantiene, anche se con un grado di sofisticazione matematica maggiore, un aspetto intuitivo sempre interessante.

Partiamo da un problema assegnato in una gara matematica romana e scriviamo i primi termini delle successioni P_3 dei cubi e P_4 delle quarte potenze dei numeri naturali:

$$P_3 = \{ 1;\ 8;\ 27;\ 64;\ 125;\ 216;\ 343;\ 512;\ 729;\ 1000;\ \ldots\ldots \}$$
$$P_4 = \{ 1;\ 16;\ 81;\ 256;\ 625;\ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

Il tema chiedeva, in sostanza, di esaminare la cardinalità dell'insieme degli elementi appartenenti a P_3, compresi tra due termini consecutivi di P_4. A tal fine, se $x \in P_3$, il suo successivo in P_3, è $(\sqrt[3]{x}+1)^3$; la loro differenza è pertanto:

$$(\sqrt[3]{x}+1)^3 - x = 3x^{2/3} + 3x^{1/3} + 1 \backsimeq 3x^{2/3}.$$

A parole:
l'ordine di grandezza del salto tra due termini consecutivi di P_3, aventi ordine di grandezza x, è $3x^{2/3}$.
Analogamente, l'ordine di grandezza della differenza tra due termini consecutivi di P_4, aventi ordine di grandezza x, è $4x^{3/4}$, in quanto:

$$(\sqrt[4]{x}+1)^4 - x \backsim 4x^{3/4}.$$

Pertanto, se si considerano due termini consecutivi di P_4, di ordine di grandezza x, il numero medio di elementi di P_3 tra essi compresi è espresso dal rapporto:

$$\frac{4x^{3/4}}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[12]{x} \ .$$

Ad esempio, per $x=10^3$ ($x=10^9$), detto rapporto è, approssimativamente, uguale a 2,37 (4,20), perciò il numero dei cubi compresi tra due quarte potenze consecutive varia da 2 a 3 (da 4 a 5).

I termini di P_3 e P_4 non sono altro che i valori assunti dalle funzioni potenza x^3 e x^4 in corrispondenza ai valori interi della variabile. Se invece che alla funzione potenza, ci riferiamo alle esponenziali, N^x e $(N+1)^x$, per $x \in N_0$ si hanno due progressioni geometriche di primo termine 1 e di ragione, rispettivamente, N e $N+1$, che indicheremo con G_N e G_{N+1}.

In questo caso, diversamente dal precedente, il numero dei termini di G_N ($\forall\ N \geqslant 2$), compresi tra due consecutivi qualunque di G_{N+1}, è limitato, più specificatamente non superiore a 2.

Sia, infatti:

(1) $x = max\ h \,/\, N^{h-1} < (N+1)^{k-1}, \qquad h, k \in N_1$;

risulta:

(2) $N^{x-1} < (N+1)^{k-1} < N^x < (N+1)(N+1)^{k-1} = (N+1)^k$;

allora:

$$(N+1)^{k-1} < N^x < (N+1)^k \cdot$$

Rimane così provato, intanto, che tra due potenze successive di $N+1$ esiste almeno una potenza di N.

Inoltre, sempre dalla (2), si ha:

$$(N+1)^{k-1} < N(N+1)^{k-1} < N^{x+1};$$

quindi:

$$(N+1)^k = (N+1)^{k-1} + N(N+1)^{k-1} < 2N^{x+1} \leqslant N^{x+2}$$

É, così, anche provato che tra il k-esimo ed il $(k+1)$-esimo termine di G_{N+1} è compreso lo $(x+1)$-esimo termine di G_N, e al più, il suo successivo, x essendo definito dalla (1).

2. La funzione enumeratrice di una successione. La funzione π (x).

Al fine di rendere palese il tessuto connettivo nella esposizione successiva, è opportuno richiamare alcune tra le più classiche nozioni di teoria dei numeri, sulle quali ci baseremo per gli sviluppi dei prossimi paragrafi.

Nel seguito ci riferiremo a successioni di numeri interi non negativi, distinti, posti in ordine crescente; P_3, P_4, G_N, G_{N+1}, precedentemente considerate, ne costituiscono semplici esempi.

Sia A una siffatta successione; indicheremo con $A(n)$ la sua funzione enumeratrice; essa è così definita:

$$A(n) = \sum_{a_i \leqslant n} 1, \qquad a_r \in A, \qquad n \in N_1\,, \qquad A(0) = 0;$$

A(n) conta, cioè, il numero dei termini di A non superiori ad n. Con riferimento al caso particolare, notevolissimo e peraltro ben noto, della successione P dei numeri primi, il cui ennesimo termine denoteremo con p_n, la funzione enumeratrice viene indicata con $\pi(n)$; sovente detta funzione si intende definita su tutto R^+:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \qquad p \in P, \qquad x \in R^+.$$

Risulta dunque:

$$\pi(x) = n, \qquad x \in [p_n, p_{n+1}), \; x \in R^+.$$

La determinazione dell'espressione analitica caratterizzante l'andamento asintotico di $\pi(x)$ è uno dei risultati fondamentali tra quelli che fungono da struttura portante per tutta la teoria dei numeri; ad esso si pervenne tramite i classici lavori di Gauss, Legendre, Dirichlet e Tchebycheff, tutti entrati nella letteratura matematica. Detto risultato, noto come « *Primzahlsatz* », è stato dimostrato, completamente, da Hadamard, de La Vallée Poussin, Selberg, Erdös e generalizzato da Bombieri; il suo enunciato si può esprimere nella forma;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x} = \frac{1}{\log x}.$$

3. Densità globale e densità asintotica.

Nel paragrafo precedente si è visto come sia opportuno e nel contempo interessante associare ad ogni successione crescente di interi non negativi la propria funzione enumeratrice.

Per un più penetrante studio delle successioni, specialmente quando interessi il confronto di una di esse con altre, occorre anche riferirsi, quando possibile, a due loro caratteristiche sintetiche: la densità globale e la densità asintotica. La loro utilità emerge in molte questioni di teoria dei numeri e risultati molto eleganti e molto riposti sono stati ottenuti, in questi ultimi anni, proprio a partire dallo studio delle densità.

Data la successione A, $\forall\, n \in N_1$, consideriamo il numero $\alpha_A(n)$:

$$\alpha_A(n) = min\left(\frac{A(1)}{1}, \frac{A(2)}{2}, \ldots \frac{A(n)}{n}\right).$$

$\alpha_A(n)$ è una funzione monotona di n; indicheremo con α (A) o, semplicemente, con α il limite:

$$\alpha = \alpha(A) = \lim_{n\to\infty} \alpha_A(n).$$

Ad α si dà il nome di *densità globale* o, semplicemente, *densità inferiore* di A. Sono di immediata verifica le seguenti proprietà di α:

a) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;

b) $A(n) \geqslant \alpha(A) \cdot n, \qquad \forall\, n \in N_1$;

c) da $1 \notin A \Rightarrow A(1) = 0, \qquad \alpha(A) = 0$;

d) $\alpha(N_1) = 1$;

e) da $\alpha(A) = 1 \Rightarrow A \equiv N_1$;

f) se $A \subset B$, allora $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$.

É particolarmente significativo confrontare A (n) con n, più specificatamente esaminare l'andamento asintotico del rapporto $\frac{A(n)}{n}$; porremo pertanto:

$$\underline{\alpha}^*(A) = \underline{\lim}\frac{A(n)}{n}, \quad \overline{\alpha}^*(A) = \overline{\lim}\frac{A(n)}{n}, \quad (0 \leqslant \underline{\alpha}^* \leqslant \overline{\alpha}^* \leqslant 1).$$

Se $\underline{\alpha}^*(A) = \overline{\alpha}^*(A)$, al loro valore comune daremo il nome di *densità asintotica*. La non necessaria coincidenza dei due limiti conduce a considerare soltanto il primo di essi, cui daremo il nome di *densità asintotica inferiore* e che, per semplicità, indicheremo con $\alpha^*(A)$, oppure, quando ciò non dia luogo a equivoci, con α^* (1).

---

(1) Se $\underline{\alpha}^* \neq \overline{\alpha}^*$, è invalso l'uso di chiamare $\underline{\alpha}^*$ densità asintotica; questa osservazione, peraltro, non interviene nel seguito.

Ecco alcune relazioni di confronto tra le due densità suddette:

a') $\alpha(A) \leqslant \alpha^*(A)$;

b') da $\alpha(A) > 0 \Rightarrow \alpha^*(A) > 0$;

c') da $1 \in A \cap \alpha^*(A) > 0 \Rightarrow \alpha(A) > 0$.

Le notazioni precedentemente introdotte vengono chiarite qui di seguito con alcuni esempi:

1) $A = \} 0; 1; 3; 5; \ldots; 2n+1; \ldots \{$

$$A(2n) = n, \qquad \alpha_A(2n) = \frac{1}{2}, \alpha(A) = \frac{1}{2}, \alpha^*(A) = \frac{1}{2} \cdot$$

2) $A = \} 0; 2; 4; 6; \ldots; 2n; \ldots \{$

$$A(n) = \left[\frac{n}{2}\right], \alpha_A(n) = 0, \alpha(A) = 0, \alpha^*(A) = \frac{1}{2} \cdot$$

3) $A = \} 0; 1; 6; 11; \ldots; 5n+1; \ldots \{$

$$A(5n) = n, \alpha_A(5n) = \frac{1}{5}, \alpha(A) = \frac{1}{5}, \alpha^*(A) = \frac{1}{5} \cdot$$

4) $A = \} 0; 1; 11; 16; \ldots; 5n+1; \ldots \{$

$$A(5n) = n - 1, (n \geqslant 2), \alpha_A(5n) = \frac{1}{10}, \alpha(A) = \frac{1}{10}, \alpha^*(A) = \frac{1}{5} \cdot$$

5) $A = \} 0; 1; 4; 9; \ldots; n^2; \ldots \{$

$$A(n) = \left[n^{1/2}\right], \alpha_A(n) = 0, \alpha(A) = 0, \alpha^*(A) = 0.$$

Un esempio meno semplice si presenta allorché, assegnato un intero positivo a, si ricercano i numeri primi con esso, ossia le soluzioni intere della:

(3) $$(a,n) = 1.$$

Indicato con $\varphi(a) = r$ (φ indicatore di Eulero-Gauss) il numero, r, degli interi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_r$ primi con a e minori di a, tutte e sole le soluzioni della (3) sono espresse dalla:

$$n_{i,k} = a_i + ka, \qquad k = 0, 1, \ldots; \; i = 1, \ldots \; r.$$

Esse sono, cioè, gli elementi di un insieme numerico infinito, distribuiti in r progressioni aritmetiche, prive di termini in comune, aventi tutte ragione a e primo termine a_i.

Se raccogliamo in un'unica successione A le soluzioni della (3), ponendole in ordine crescente, otteniamo una successione la cui densità asintotica, determinata con semplici calcoli, risulta:

$$\alpha^{*}(A) = \prod_{p|a}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot$$

4. Somme di successioni.

Continuiamo ad indicare con una lettera latina maiuscola A (o B o C,...) una successione i cui elementi verranno indicati con l'omonima lettera minuscola fornita di indice che ne specifichi il posto (nella successione), mentre con l'omonima lettera greca minuscola, con o senza asterisco, indichiamo, rispettivamente la densità asintotica e la densità globale.

Converrà, per le considerazioni che seguono, non trascurare quelle, tra dette successioni, aventi un numero finito di termini.

Siano

$A = \} a_0 ; a_1 ; a_2 ;\ldots, a_i ;\ldots\{$

e

$B = \} b_0 ; b_1 ; b_2 ;\ldots, b_j ;\ldots\{$

due successioni; si intende come loro somma la successione $C = A + B$, i cui elementi $a_i + b_j$ sono disposti in ordine crescente e senza ripetizione.

Pertanto:

$$c_0 = a_0 + b_0 ,$$
$$c_1 = min\,(a_0 + b_1 , a_1 + b_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Similmente, se si hanno tre successioni A, B, C, la loro somma si definisce come la somma di due qualunque di esse con la terza. Si procede in modo analogo per definire la somma di un numero qualunque di successioni.

È appena il caso di rilevare che la somma così definita gode delle proprietà commutativa e associativa.

Riguardo alla composizione della somma di due successioni, si può osservare che:

$$0 \in A, B \cap \exists\, n \,/\, A(n) + B(n) > n \Rightarrow n \in C = A + B.$$

Per comodità di notazione, indichiamo con kA la somma di k successioni uguali ad A; le densità, globale e asintotica, di kA verranno indicate, rispettivamente, con $\alpha(kA)$ e $\alpha^*(kA)$.

Con riferimento alla somma di due successioni, la densità, globale o asintotica, non è in relazione semplice con le densità delle due successioni che determinano la somma; ciò trasparirà dalle considerazioni successive.

Gli esempi che seguono mostrano, sia questa affermazione, sia il tipo di problemi che nascono e che costituiscono un notevole capitolo della teoria analitica dei numeri.

1) $A = \{0;\ 1;\ 3;\ 5;\dots;\ 2n+1;\dots\},\ 2A = N_0\ ;$

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \alpha^* = \frac{1}{2},\quad \alpha(2A) = 1,\quad \alpha^*(2A) = 1.$$

2) $A = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\dots;\ n^2\ ;\dots\}$,

$B = \{0;\ 1;\ 8;\ 27;\dots;\ n^3\ ;\dots\}$,

$C = A + B = \{0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\dots\}$;

$$A(n) = \left[n^{1/2}\right],\quad \alpha = 0\quad \alpha^* = 0,$$

$$B(n) = \left[n^{1/3}\right],\quad \beta = 0,\quad \beta^* = 0,$$

$$C(n) \leqslant \left[n^{1/2}\right] \cdot \left[n^{1/3}\right] \simeq n^{5/6} = o(n),\quad \gamma = 0,\quad \gamma^* = 0.$$

3) $A = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\dots;\ 2n;\dots\},\quad 2A = A;$

$$\alpha = 0,\quad \alpha^* = \frac{1}{2},\quad \alpha(2A) = 0,\quad \alpha^*(2A) = \frac{1}{2}.$$

4) $A = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\dots;\ 2n;\dots\}$

$B = \{0;\ 1;\}$,

$A + B = N_0$;

$$\alpha = 0, \quad \alpha^* = \frac{1}{2},$$
$$\beta = 0, \quad \beta^* = 0;$$
$$\alpha(A + B) = 1, \quad \alpha^*(A + B) = 1.$$

Negli esempi 1) e 2) le densità, globale e asintotica, della somma sono null'altro che la somma delle densità.

Nell'esempio 3) tale relazioni di uguaglianza permane per la sola densità globale.

L'esempio 4) fa vedere come, sommando due successioni entrambe di densità globale nulla (una di esse è costituita da due soli termini!) si possa addirittura ottenere l'insieme N_0.

5. Altri risultati.

Lo studio della somma delle densità si è molto sviluppato intorno al 1930 ad opera soprattutto di Schnirelmann e Mann. Detto studio si impose nella dimostrazione della congettura di Goldbach (precisamente nel calcolare $G(n)$ = minimo numero di primi, uguali o distinti, la cui somma è uguale a n).

I numerosi risultati ottenuti e le questioni poste superano largamente lo scopo originario e lasciano intravedere un più ampio spazio di studio e di ricerca.

Un primo risultato (dovuto a Mann) stabilisce una limitazione inferiore per la densità globale della successione somma:

$C = A + B \Rightarrow \gamma \geqslant min \} 1, \alpha + \beta \{ ;$

detto risultato è migliorabile nella forma seguente: posto

(4) $\sigma = \inf_n \dfrac{A(n) + B(n)}{n} \geqslant \inf_n \dfrac{A(n)}{n} + \inf_n \dfrac{B(n)}{n} = \alpha + \beta,$

allora

(5) $\gamma \geqslant min \} 1, \sigma \{ .$

Più riposte sono le conclusioni per quanto riguarda la densità asintotica inferiore.
Infatti da

$$\alpha^* = \underline{lim} \frac{A(n)}{n}, \beta^* = \underline{lim} \frac{B(n)}{n}, \alpha^* + \beta^* \leqslant 1 ,$$

non segue

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \beta^* .$$

Lo prova il seguente controesempio:

$$A = \{ 0;\ 1;\ 4;\ 5;\ 8;\ \ldots;\ 4k;\ 4k+1; \ldots \} ,$$

$$C = 2\,A = \{ 0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10; \ldots; 4k;\ 4k+1; 4k+2;\ \ldots \} ,$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} ,\ \gamma^* = \frac{3}{4} .$$

Notiamo dall'esempio che $\gamma^* = \frac{3}{2}\alpha^*$, ma il fattore $\frac{3}{2}$ non è casuale in quanto Erdös ha dimostrato:

$$1 \in A \Rightarrow \alpha^*(2A) \geqslant \frac{3}{2}\,\alpha^*(A).$$

Opportuni coefficienti compaiono anche nella somma di due successioni, ad es. (disuguaglianza di H. Ostmann) da

$$1 \in A\ ,\ 1 \in B\ ,\ \alpha^* + \beta^* \leqslant 1,$$

si perviene alla seguente limitazione per γ^*:

$$\gamma^* \geqslant \frac{3}{4}\,(\alpha^* + \beta^*) ,$$

risultato perfezionabile nel modo seguente (si confronti con (4) e (5)):

$$\gamma^* \geqslant \frac{3}{4}\,\sigma^* \text{ con } \sigma^* = \underline{\lim}\ \frac{A(n) + B(n)}{n} \leqslant 1.$$

Infine riportiamo il seguente teorema di Erdös che sotto ipotesi poco più restrittive fornisce un risultato più raffinato e non immediatamente migliorabile per la densità asintotica inferiore della somma. Posto

$$0 \in A\ ,\ 0,\ 1 \in B\ ,\ \beta^* \leqslant \alpha^*\ ,\ \alpha^* + \beta^* \leqslant 1\ ,$$

riesce:

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \frac{\beta^*}{2} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. de Finetti, *Riflessioni su una gara matematica*, Archimede, fasc. 6 (1962).

[2] B. Rizzi, *Problemi di Gare matematiche*, Quaderni del Periodico di matematiche, n. 1 (1974).

[3] B. Rizzi, *L'Albero e il Traliccio degli interi*, Periodico di matematiche, Serie V, Vol. 49 (ottobre 1973).

[4] G. Ricci, *Aritmetica additiva: aspetti e problemi*, Seminario Università di Bari (1954).

[5] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. I-II, G. E. Stechert and Co., New York (1934).

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford (1960).

[7] A. Gelfond et Y. Linnik, *Méthodes élémentaires dans le théorie analytique des nombres*, Gauthier-Villars Editeur, Paris (1965).

[8] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, Vol. I, Clerendon Press, Oxford (1966).

Per un primo stimolante approccio alla teoria dei numeri si consiglia la lettura degli articoli di B. de Finetti, B. Rizzi e G. Ricci. Notizie storiografiche, oltre alla dimostrazione dei teoremi principali possono trovarsi nei libri di Dickson e Hardy-Wright
Per un ulteriore approfondimento di concetti e problemi è necessario fare ricorso a metodi analitici più complessi sulla linea dei lavori di Gelfond, Linnik, Halberstam e Roth.