dal punto di vista del rigore, a grande distanza da quello di Archimede; può tuttavia essere avvicinato ad esso se si osserva che la considerazione dei poligoni regolari con numero crescente di lati corrisponde al calcolo dell'integrale doppio

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\rho d\rho d\theta,$$

che differisce da quello citato prima per l'ordine delle integrazioni. Tuttavia non si può negare che l'esposizione imperfetta di Savasorda suggerisce chiaramente un metodo abbastanza generale, che può essere considerato come un remoto progenitore di quelli del calcolo integrale (¹).

Torino, 15 novembre 1922.

EMILIO ARTOM

Sulle espressioni del volume del tetraedro e su qualche problema di massimo

La determinazione del volume del tetraedro, comunque possa porsi nella forma negativa di una riduzione all'assurdo, come avviene negli Elementi d'EUCLIDE, fa capo sempre ad un procedimento di divisione infinito. Che questo non sia un difetto dei metodi adoperati, ma tenga ad una intrinseca necessità, ha provato di recente il DEHN (²), facendo vedere che se due poliedri debbono essere equivalenti come somme o differenze di un numero *finito* di parti congruenti, è necessario che esista una relazione lineare omogenea a coefficienti

(¹) Per l'interpretazione dei testi ebraici sono ricorso al valido aiuto del comm. Bolaffio, rabbino maggiore di Torino e del dr. Artom, rabbino maggiore di Tripoli.

(²) Cfr. l'articolo di U. AMALDI: *Sulla teoria dell'equivalenza*, nell'opera: F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, (Bologna, Zanichelli), vol. I, (1912), pp. 173-190, con la bibliografia completa della questione.

interi fra le misure dei loro diedri [1] (riferite al dietro retto): anzi si hanno all'uopo altre relazioni lineari omogenee a coefficienti interi fra gli spigoli, siccome ha provato posteriormente il NICCOLETTI [2].

Il procedimento infinito che vale a determinare il volume del tetraedo, o a dimostrare le condizioni generali d'equivalenza, può assumere, del resto, diverse forme. Così il metodo d'EUCLIDE offre il detto volume come somma di una progressione geometrica, siccome ebbe ad osservare, per esempio, il DUHAMEL. Invece il procedimento d'ARCHIMEDE, — che di solito si costituisce, nelle trattazioni elementari, colla considerazione degli scaloidi — porge una vera integrazione, ove figura come variabile d'integrazione la distanza della sezione parallela alla base dal vertice. E ad un procedimento d'integrazione (prendendo come variabile la distanza d'una sezione parallela ad una coppia di spigoli da uno di questi) conduce pure il procedimento, usato recentemente dallo HALSTED, per esprimere direttamente il volume del tetraedo in funzione di due spigoli opposti e del loro momento, ritrovando così l'espressione dello STEINER.

In questo articolo noi esponiamo anzitutto questi procedimenti diretti e le formule del volume del tetraedro cui essi conducono (nn. 1-2) successivamente nei (nn. 3-11) ne deduciamo varie espressioni del volume del tetraedro contraddistinte progressivamente con numeri romani. Notevoli sono la (III) e $(\mathrm{III})_{\mathrm{bis}}$ del n.° 3 e 10 che esprimono il volume del tetraedro in funzione del quadrato degli spigoli (TARTAGLIA-EULERO), la (V) e la (VI) che esprimono il volume in funzione di tre spigoli o di tre facce e del seno del loro angolo triedro

---

(1) Consideriamo per esempio il tetraedro regolare e il cubo, è subito visto che la misura del driedro θ del tetraedro regolare è incommensurabile con π. È infatti $\cos\theta = \frac{1}{3}$ e supposto $\theta = \frac{m}{n}\pi$ con m ed n interi primi tra loro, n positivo si avrebbe $\cos m\pi = (-1)^m = \frac{1}{3^n} - \binom{n}{2}\frac{8}{3^n} + \binom{n}{4}\frac{8^2}{3^n} \dots$ e riducendo a forma intera: $(-1)^m 3^n \equiv 1 \pmod{8}$ che è assurda, giacchè per essa è necessario che m e n siano pari.

(2) O. NICCOLETTI: *Sulla equivalenza di due poliedri.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [(1914), fascicolo 1°, pp. 47-75].

(Eulero-Staudt), la (XI) che lega il volume del tetraedro col raggio della sfera circoscritta (Lagrange, Legendre, Crelle, Staudt), la (XII) che esprime il volume in funzione delle coordinate dei vertici (Lagrange). Nel n.° 12 e 13 sono esposti due problemi sul massimo del volume del tetraedro di cui siano date le faccie in superficie o la somma degli spigoli.

1. L'ingegnoso metodo di Euclide per il confronto di due tetraedri di uguale base e uguale altezza dà il mezzo, come si è detto, di calcolare il volume v di una piramide $OABC$ (fig. 1) come somma di una serie geometrica. Infatti se D, E, F, G, H, I sono i punti medi degli spigoli OA, OB, OC, BC, CA, AB Euclide dimostra [1] che la piramide $OABC$ si scompone in due piramidi $ODEF$, $FHGC$, uguali tra loro e simili alla data la cui somma Σ_1 è minore di $\frac{1}{2}v$ e di due prismi equivalenti $DEFAIH$, $IBGHEF$. Se f è la misura dell'area della faccia ABC ed è h l'altezza del tetraedro relativa ad f; la misura della base DEF del prisma $DEFAIH$ è $\frac{1}{4}f$, l'altezza relativa $\frac{h}{2}$ e perciò il volume di questo prisma è $\frac{1}{8}fh$ e dei due prismi $\frac{1}{4}fh$. Effettuando l'analoga scomposizione delle due piramidi $ODEF$, $FHGC$ e continuando il procedimento si ha che all'n^{ma} scomposizione la somma dei prismi ottenuti è la somma della progressione geometrica:

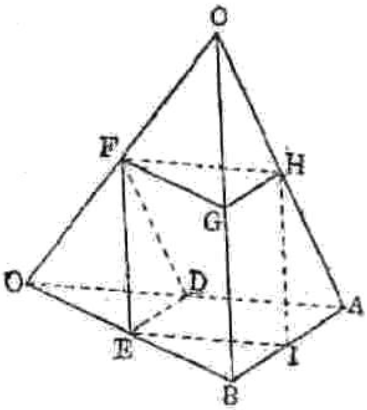

Fig. 1.

$$\frac{1}{4}fh+\frac{1}{4^2}fh+\frac{1}{4^3}fh+\ldots+\frac{1}{4^n}fh=\frac{1}{3}fh-\frac{1}{3\times 4^n}fh,$$

(1) Proposizione 4ª, libro 12. (Cfr. ad es. gli Elementi di Euclide di E. Betti e F. Brioschi). Cfr. il Calcolo del Duhamel, vol. I, pag. 28.

e per il volume v si ha:

$$v = \frac{1}{3} fh - \frac{1}{3 \times 4^n} fh + \sigma_n,$$

con $\sigma_n < \frac{1}{2^n} v$, e al limite:

$$v = \frac{1}{3} fh. \tag{I}$$

Esponiamo ora il procedimento di ARCHIMEDE (¹). Si consideri una sezione del tetraedro parallela alla base ABC e sia x la sua distanza dal vertice 0; la superficie $s(x)$ della sezione è data dalla relazione: $s(x) = \frac{fx^2}{h^2}$ e per il volume v si ha:

$$v = \int_0^h \frac{fx^2}{h^2} dx = \frac{f}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{f}{h^2} \lim_{n \to \infty} h^3 \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{6} fh \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{1}{3} fh,$$

oppure:

$$v = \frac{f}{h^2} \lim_{n \to \infty} h^3 \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{6} fh \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{1}{3} fh,$$

a seconda che si moltiplica ognuno degli n intervalli uguali in cui si scompone l'intervallo d'integrazione per il valore della funzione integranda x^2 preso nell'estremo sinistro o nell'estremo destro di detti intervalli.

I prodotti

$$fh \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}, \quad fh \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^3}$$

rappresentano i volumi degli scaloidi regolari inscritti e circoscritti al tetraedro rispettivamente di $(n-1)$ ed n scalini

(¹) Cfr. E. G. TOGLIATTI: *Sul volume della sfera*, questo Periodico, vol. II, n. 4, pp. 310-311.

ed il procedimento archimedeo viene ridotto elementarmente, con il metodo di esaustione di EUDOSSO, alla considerazione della coppia di classi contigue formata dagli scaloidi inscritti e circoscritti al tetraedro la quale conduce al confronto di due tetraedri di ugual base e uguale altezza e al confronto di un tetraedro con un prisma [1].

2. Esponiamo ora il procedimento integrale che conduce all'espressione del ***volume del tetraedro in funzione di due spigoli opposti e del loro momento.*** Sia δ_a la minima distanza degli spigoli opposti $OA = a$, $BC = a_1$ del tetraedro $OABC$, e θ_a l'angolo di questi spigoli. Consideriamo una sezione $PQRS$ (fig. 2) del tetraedro ottenuta con un piano parallelo alla coppia di spigoli opposti a, a_1 e sia x la sua distanza da a_1. $PQRS$ è un parallelogrammo i cui lati hanno per misura rispettivamente $\frac{ax}{\delta_a}$, $\frac{a_1(\delta_a - x)}{\delta_a}$, talchè la superficie $s(x)$ di $PQRS$ è espressa dalla relazione:

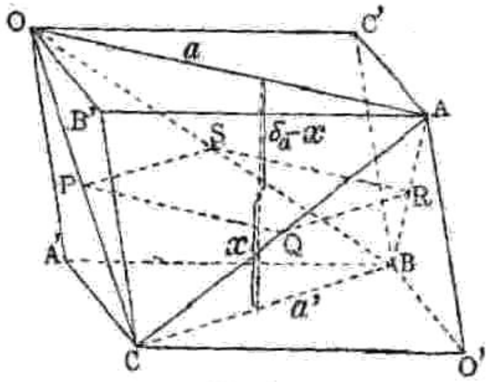

Fig. 2.

$$s(x) = \frac{a\, a_1 \operatorname{sen} \theta_a}{\delta_a^2}\, x(\delta_a - x),$$

e per il volume v del tetraedro si avrà:

$$v = \frac{a\, a_1 \operatorname{sen} \theta_a}{\delta_a^2} \int_0^{\delta_a} x(\delta_a - x)\, dx = \frac{a\, a_1 \operatorname{sen} \theta_a}{\delta_a^2} \left(\frac{\delta_a^3}{2} - \frac{\delta_a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} a a_1 \delta_a \operatorname{sen} \theta_a,$$

cioè:

(II) $$v = \frac{1}{6} a\, a_1\, \delta_a \operatorname{sen} \theta_a \quad [2].$$

---

[1] Cfr. ad es. ENRIQUES e AMALDI: *Elementi di geometria*, penultima edizione.

[2] *Ann. Gergonne* 18, p. 250. STEINER, G. di Crelle 23, p. 279.

Si chiami (con Cayley) il prodotto $\delta_a \operatorname{sen} \theta_a$ *momento delle due rette OA, BC* e la (II) ci dice che il volume di un tetraedro è uguale ad $\frac{1}{6}$ del prodotto di due spigoli opposti per il loro momento.

Si osservi che per $a = a_1 = 2\sqrt{\pi} r$; $\delta_a = 2r$; $\theta_a = \frac{\pi}{2}$ si ha il confronto dell' HALSTED che identifica la cubatura di una sfera con quella di un tetraedro (1).

Possiamo dedurre la (II) dalla (I) partendo dalla seguente considerazione geometrica di MONGE (2). *Un tetraedro OABC è la terza parte del parallelepipedo circoscritto AB'OC'O'CA'B* (le facce opposte del parallelepipedo passano per gli spigoli opposti del tetraedro). Infatti ogni faccia del tetraedro stacca dal parallelepipedo una piramide che è un sesto del parallelepipedo avendo essa per base metà della base del parallelepipedo e la stessa altezza. Ora il parallelogrammo $A'CO'B$ ha le diagonali rispettivamente uguali ad a e a_1 ed è θ_a il loro angolo, la superficie di $A'CO'B$ è perciò $\frac{1}{2} a a_1 \operatorname{sen} \theta_a$, il volume del parallelepipedo $\frac{1}{2} a a_1 \delta_a \operatorname{sen} \theta_a$ e il volume del tetraedro $OABC$ è dato quindi dalla (II).

Possiamo trasformare la (II) osservando che la sezione media del tetraedro equidistante dagli spigoli a ed a_1 ha la sua superficie $s_a = \frac{1}{4} a a_1 \operatorname{sen} \theta_a$ e la (II) può scriversi:

$$\text{(II)}_{bis} \qquad v = \frac{2}{3} s_a \delta_a .$$

3. Ai brevi cenni premessi per stabilire le formule (I) e (II) facciamo ora seguire le espressioni del volume v del tetraedro in funzione di alcuni suoi elementi, spigoli, angoli piani, angoli driedri, facce, ecc.

---

(1) G. B. HALSTED: *The elements of geometry.* London, 1886, p. 250.
Cfr. FISICHELLA: *Sulla teoria dell' equivalenza secondo* G. B. HALSTED, questo Periodico, vol. I, fasc. 2 (1921), pp. 101-108.
E. G. TOGLIATTI: *Sul volume della sfera.* Periodico, vol. II, fasc. 4 (1922), p. 321.

(2) MONGE: *Corresp. sur l' Ecole polyt.que*, I, p. 441.

Il metodo per calcolare il *volume v in funzione degli spigoli del tetraedro* è dovuto a Niccolò Tartaglia [1]; noi lo seguiremo per stabilire la formula di Eulero [2].

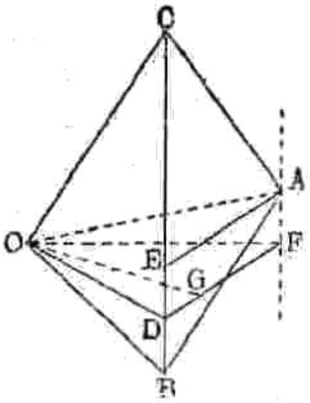

Fig. 3.

Indichiamo con a, b, c le misure degli spigoli OA, OB, OC, con a_1, b_1, c_1 la misura degli spigoli opposti BC, CA, AB e siano D, E le proiezioni ortogonali di O ed A sullo spigolo BC, F la proiezione ortogonale di O sulla parallela per A alla BC (fig. 3). Il piano ODF è normale alla retta BC, segue che $AFDE$ è un parallelogramma e inoltre il piede G della normale condotta da O al piano ABC appartiene a DF. Si ha allora:

$$(1) \qquad BD = x = \frac{b^2 + a_1^2 - c^2}{2a_1}, \quad BE = y = \frac{a_1^2 + c_1^2 - b_1^2}{2a_1} \;{}^{3})$$

$$OD = \sqrt{b^2 - x^2}, \quad DF = EA = \sqrt{c_1^2 - y^2};$$

$$OF = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{a^2 - (x - y)^2},$$

e perciò per il triangolo ODF si ha:

$$(2) \qquad OG^2 = OD^2 - DG^2 = b^2 - x^2 - \left(\frac{OD^2 + DF^2 - OF^2}{2DF}\right)^2 =$$

$$= b^2 - x^2 - \frac{(b^2 + c_1^2 - a^2 - 2xy)^2}{4(c_1^2 - y^2)}.$$

Tenuto conto delle (2) si ha per il volume v della piramide:

$$v^2 = \frac{1}{9}(ABC)^2\, OG^2 = \frac{1}{36}\, a_1^2\, DF^2\, OG^2 =$$

$$= \frac{1}{36}\, a_1^2 (c_1^2 - y^2) \frac{4(b^2 - x^2)(c_1^2 - y^2) - (b^2 + c_1^2 - a^2 - 2xy)^2}{4(c_1^2 - y^2)},$$

---

(1) Niccolò Tartaglia: *General trattato di numeri e di misure.* (Venezia, 1560), parte 3ª, libro 2ª, pag. 35, n. 10. Tartaglia considera il caso che gli spigoli di una faccia abbiano per misura i numeri 13, 14, 15 e gli opposti 20, 18, 16.

(2) Nov. Comm. Petrop. 4, pag. 158. Cfr. anche n. 10.

(3) Ai numeri x e y attribuiremo il segno $+$ o $-$ con la solita convenzione.

ed infine per le (1) si ha la formula di EULERO:

$$(\mathrm{III})\quad (12v)^2 = a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)+ \\ +b^2b_1^2(c^2+c_1^2+a^2+a_1^2-b^2-b_1^2)+ \\ +c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)- \\ -(a_1^2\,b_1^2\,c_1^2+a_1^2\,b^2c^2+b_1^2\,c^2a^2+c_1^2\,a^2b^2).$$

4. Determiniamo l' espressione del *volume di un tetraedro in funzione degli spigoli per un vertice e del seno dell' angolo triedro da essi formato.*

Indichiamo con l, m, n le misure degli angoli $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, $\widehat{AOB}$; con λ, μ, ν le misure dei diedri opposti di spigolo OA, OB, OC; con λ_1, μ_1, ν_1 i diedri di spigolo BC, CA, AB; con f_1, f_2, f_3, f_4 le misure delle quattro facce BOC, COA, AOB, ABC e ove occorra le facce stesse, e con h_1, h_2, h_3, h_4 le altezze relative a queste facce. La formula $v=\frac{1}{3}f_1h_1$ tenuto conto che è:

$$f_1=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen} l;\quad h_1=a\operatorname{sen}(a,f_1),$$

si trasforma nell' altra formula di EULERO [1]:

$$(\mathrm{IV})\qquad v=\frac{1}{6}abc\operatorname{sen} l\operatorname{sen}(a,f_1),$$

e analogamente:

$$(\mathrm{IV})^*\qquad v=\frac{1}{6}abc\operatorname{sen} m\operatorname{sen}(b,f_2)=\frac{1}{6}abc\operatorname{sen} n\operatorname{sen}(c,f_3).$$

Dalle (IV) e (IV)* segue:

$$\operatorname{sen} l\operatorname{sen}(a,f_1)=\operatorname{sen} m\operatorname{sen}(b,f_2)=\operatorname{sen} n\operatorname{sen}(c,f_3),$$

ovvero *in ogni triedro il prodotto del seno di una faccia per il seno dell' angolo che lo spigolo opposto forma con la faccia stessa è costante.* Questo prodotto è stato da STAUDT [2] chiamato *seno dell' angolo solido formato dai 3 spigoli a, b, c* e

---

[1] EULERO: Nov. Comm. Petr. 4, pag. 158.

[2] STAUDT: G. di Crelle **24**, pag. 252.

lo indicheremo con sen (a, b, c), di guisa che la (IV) diventa:

$$\text{(V)} \qquad v = \frac{1}{6} abc \,\text{sen}\,(a, b, c),$$

cioè il ***volume di un tetraedro è uguale al prodotto di 3 spigoli uscenti da un vertice per il seno del loro angolo triedro.***

Determiniamo l'angolo il cui seno coincide con il seno dell'angolo triedro $O(ABC)$. Sugli spigoli OA, OB, OC si scelgano tre punti A, B, C arbitrari e col tetraedro $OABC$ si consideri il tetraedro equisolido $O'A'B'C'$ con i tre spigoli $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ uguali rispettivamente ad OA, OB, OC e con i diedri di spigolo $O'A'$, $O'B'$ retti. Il triedro $O'(A'B'C')$ è univocamente determinato dalle condizioni imposte (spostando infatti i punti A, B, C sugli spigoli OA, OB, OC i punti A', B', C' per la (V) descrivono punteggiate congruenti sugli spigoli $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ di $O'(A'B'C')$) ed il seno dell'angolo triedro $O(ABC)$ è uguale al seno dell'angolo diedro di $O'(A'B'C')$ di spigolo $O'C'$. La definizione data è anche opportuna: con essa si estende al volume del tetraedro la regola per il calcolo dell'area di un triangolo in funzione di due lati e dell'angolo compreso.

È facile determinare le espressioni dell'angolo triedro in funzione degli angoli l, m, n o degli angoli λ, μ, ν. Infatti per le note formule di triedrometria è: $\text{sen}\,(a, f_1) = \text{sen}\, m \,\text{sen}\, \nu$ e perciò:

$$\text{sen}\,(a, b, c) = \text{sen}\, l \,\text{sen}\, m \,\text{sen}\, \nu = 2 \,\text{sen}\, l \,\text{sem}\, m \,\text{sen}\, \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2},$$

od anche per le formule di BRIGG:

$$\text{(3)} \quad \text{sen}\,(a, b, c) = 2\sqrt{\text{sen}\, s \,\text{sen}\,(s - l) \,\text{sen}\,(s - m) \,\text{sen}\,(s - n)} \ (^1),$$

con
$$l + m + n = 2s.$$

Supposti noti i diedri λ, μ, ν dalla relazione:

$$\text{sen}\,(a, b, c) = 4 \,\text{sen}\, \frac{l}{2} \cos \frac{l}{2} \,\text{sen}\, \frac{m}{2} \cos \frac{m}{2} \,\text{sen}\, \nu,$$

---

(1) Per altro senza ricorrere alle formule di triedrometria la (3) può ricavarsi direttamente dalla (III) tenuto conto della (V) e delle relazioni $a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos l, \ldots$ Cfr. anche il n.° 9 di questa nota.

sempre per le formule di BRIGG, si ha:

$$(3)^* \qquad \operatorname{sen}(a, b, c) = \frac{4 \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}(\lambda - \varepsilon) \operatorname{sen}(\mu - \varepsilon) \operatorname{sen}(\nu - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu},$$

con $$\lambda + \mu + \nu = 2\varepsilon + \pi.$$

Osserviamo infine che dalle (IV) e (IV)* segue che *fra tutti i tetraedri di cui siano dati 3 spigoli uscenti da uno stesso vertice ha volume massimo quello in cui questi 3 spigoli formano un triedro trirettangolo.*

5. *Volume del tetraedro in funzione di 3 facce e del loro triedro (o del triedro polare).*

Prima di stabilire la definizione di triedro polare di un triedro diamo la definizione di *terna destrogira* e *sinistrogira*. Tre raggi a, b, c aventi in comune l'origine e non complanari formano nell'ordine scritto una terna destrogira o sinistrogira secondo che disponendo l'indice ed il medio della mano sinistra nelle rispettive direzioni e versi dei raggi a e b il pollice abbia la direzione ed il verso di c od il verso contrario. Diremo ancora due *terne* entrambe destrogire o entrambe sinistrogire *di ugual verso,* due *terne* una destrogira e una sinistrogira *di verso contrario.* Ciò premesso dato il tetraedro $OABC$ si conducano i raggi r_1, r_2, r_3 di origine O rispettivamente normali alle facce BOC, COA, AOB e tali che ciascuna delle coppie (b, c, a), (b, c, r_1); (c, a, b), (c, a, r_2); (a, b, c), (a, b, r_3) risulti formata di due terne di assi di ugual verso. Il *triedro* $r_1\, r_2\, r_3$ chiamasi *polare* o *supplementare* di (a, b, c) e per la nota relazione tra le facce e i diedri di due triedri polari è:

$$\operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3) = \operatorname{sen}(r_2, r_3) \operatorname{sen}(r_1, r_2) \operatorname{sen}(\widehat{r_2}) = \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} m,$$

ma $\operatorname{sen}(a, b, c) = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} \nu$, è quindi:

$$\frac{\operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3)}{\operatorname{sen}(a, b, c)} = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} l},$$

e analogamente:

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3)}{\operatorname{sen}(a, b, c)} = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} l} = \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} m} = \frac{\operatorname{sen} \nu}{\operatorname{sen} n}.$$

Le (4) forniscono il significato geometrico del teorema dei seni in triedrometria e permettono di calcolare il seno del triedro polare.

Sui raggi r_1, r_2, r_3 prendiamo ora tre segmenti OA_1, OB_1, OC_1 la cui misura sia rispettivamente f_1, f_2, f_3. Il tetraedro $OA_1B_1C_1$ lo diremo per analogia *tetraedro polare* del tetraedro dato; indicandone con v_1 il volume sarà:

$$6v_1 = f_1 f_2 f_3 \operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3). \tag{5}$$

È facile stabilire una relazione tra v e v_1. Essendo:

$$f_1 = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} l; \quad f_2 = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} m; \quad f_3 = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} n$$

la (5) diventa tenendo conto anche delle (4):

$$\begin{aligned} 6v_1 &= \frac{1}{8} a^2b^2c^2 \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} n \operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3) = \\ &= \frac{1}{8} a^2b^2c^2 \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} n \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} l} \operatorname{sen}(a, b, c) = \\ &= \frac{1}{8} a^2b^2c^2 \operatorname{sen}^2 (a, b, c) = \frac{36}{8} v^2 \end{aligned}$$

e perciò:

$$v^2 = \frac{4}{3} v_1 \tag{6}$$

ed infine per la (5):

$$v^2 = \frac{2}{9} f_1 f_2 f_3 \operatorname{sen}(r_1, r_2, r_3), \tag{VI}$$

dove r_1, r_2, r_3 rappresentano, come si è detto, gli spigoli del triedro polare di (a, b, c).

6. Osservazione. — Dal vertice O tiriamo il raggio r_4 normale alla faccia ABC in modo che le due terne b_1, c_1, a, b_1', c_1', r_4, ove b_1' e c_1' indicano i raggi condotti da O paralleli e concordi ai raggi b_1 e c_1, risultino concordi, e su r_4 si prenda il segmento OO_1 la cui misura sia f_4. Geometricamente si vede che tre qualunque dei vettori $A_1 - O$, $B_1 - O$, $C_1 - O$, $O_1 - O$ individuano il triedro polare di uno dei triedri del tetraedro $OABC$, e dalla relazione (6) $v_1 = \frac{3}{4} v^2$ segue che i

volumi dei tetraedri individuati da tre qualunque di essi sono uguali. Facilmente si prova che la risultante dei 4 vettori $A_1 - O$, $B_1 - O$, $C_1 - O$, $O_1 - O$ i cui moduli sono rispettivamente f_1, f_2, f_3, f_4 è nulla. Proiettando infatti le facce f_1, f_2, f_3 del tetraedro $OABC$ sulla faccia f_4 è noto che:

$$(7) \qquad f_1 \cos(\widehat{f_1 f_4}) + f_2 \cos(\widehat{f_2 f_4}) + f_3 \cos(\widehat{f_3 f_4}) = f_4,$$

od anche:

$$(7)^* \qquad -f_1 \cos(\widehat{f_1 f_4}) - f_2 \cos(\widehat{f_2 f_4}) - f_3 \cos(\widehat{f_3 f_4}) + f_4 = 0.$$

Ora $-f_1 \cos(\widehat{f_1 f_4})$, $-f_2 \cos(\widehat{f_2 f_4})$, $-f_3 \cos(\widehat{f_3 f_4})$, f_4 sono le proiezioni dei vettori $A_1 - O$, $B_1 - O$, $C_1 - O$, $O_1 - O$ sul vettore $O_1 - O$ e la (7)* ci dice che la somma di queste proiezioni è nulla; si ripeta il ragionamento proiettando successivamente su due vettori scelti fra i tre $A_1 - O$, $B_1 - O$, $C_1 - O$ e ne verrà quanto si è avanti affermato. Sotto altra forma possiamo dire che se da un punto P parte un vettore $Q - P = A_1 - O$, da Q il vettore $Q - R = B_1 - O$, da R il vettore $S - R = C_1 - O$, sarà $S - P = O_1 - O$, così al tetraedro $OABC$ abbiamo collegato un quadrangolo gobbo $PQRS$ con i lati rispettivamente perpendicolari alle faccie del tetraedro e con la misura di ogni singolo lato uguale alla misura delle facce stesse [1].

7. Daremo in questo numero le espressioni del volume del tetraedro in funzione di alcuni suoi elementi.

Volume del tetraedro in funzione di due facce, del loro spigolo comune e del diedro compreso. Dalla formula (V)

$$v = \frac{1}{6} abc \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} \nu$$

essendo $\frac{1}{2} bc \operatorname{sen} l = f_1$, $\frac{1}{2} ac \operatorname{sen} m = f_2$ si ha:

$$(\mathrm{VII}) \qquad v = \frac{2}{3} \frac{f_1 f_2 \operatorname{sen} \nu}{c}. \quad [2]$$

---

[1] Per una trasformazione generale di un poliedro in un poligono gobbo con i lati perpendicolari alle facce del poliedro cfr. BALTZER: *Elementi di matematica. Trigonometria*, pag. 102, n. 5.

[2] *Ann. Gergonne* 3, pag. 323.

Volume in funzione di quattro facce, di due diedri opposti e degli spigoli di questi diedri. Per la (VII) possiamo scrivere:

$$(\mathrm{VII}^*) \qquad v = \frac{2}{3}\frac{f_3 f_4 \operatorname{sen} \nu_1}{c_1},$$

e moltiplicando la (VII) e (VII)* si ha:

$$(\mathrm{VIII}) \qquad v^2 = \frac{4}{9}\frac{f_1 f_2 f_3 f_4 \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \nu_1}{cc_1}. \text{ (1)}$$

Volume in funzione dei tre spigoli di una faccia, della superficie della faccia e dei tre diedri adiacenti alla faccia stessa. È per la (VII):

$$\frac{f_1 f_4 \operatorname{sen} \lambda_1}{a_1} = \frac{f_2 f_4 \operatorname{sen} \mu_1}{b_1} = \frac{f_3 f_4 \operatorname{sen} \nu_1}{c_1},$$

ed anche tenuto conto della (7):

$$\frac{f_1 \cos \lambda_1}{a_1 \operatorname{ctg} \lambda_1} = \frac{f_2 \cos \mu_1}{b_1 \operatorname{ctg} \mu_1} = \frac{f_3 \cos \nu_1}{c_1 \operatorname{ctg} \nu_1} = \frac{f_1 \cos \lambda_1 + f_2 \cos \mu_3 + f_3 \cos \nu_1}{a_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + b_1 \operatorname{ctg} \mu_1 + c_1 \operatorname{ctg} \nu_1} =$$

$$= \frac{f_4}{a_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + b_1 \operatorname{ctg} \mu_1 + c_1 \operatorname{ctg} \nu_1},$$

da cui:

$$f_3 \operatorname{sen} \nu_1 = \frac{c_1 f_4}{a_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + b_1 \operatorname{ctg} \mu_1 + c_1 \operatorname{ctg} \nu_1},$$

e la (VII)* diventa:

$$(\mathrm{IX}) \qquad v = \frac{2}{3}\frac{f_4^2}{a_1 \operatorname{ctg} \lambda_1 + b_1 \operatorname{ctg} \mu_1 + c_1 \operatorname{ctg} \nu_1}.$$

Volume in funzione di due facce, del loro spigolo comune e della sezione media del tetraedro parallela a questo spigolo. Si consideri il prisma triangolare $ABC\,OB'C'$ di base ABC

---

(1) BRETSCHNEIDER: *Geometrie*, pag. 677.

e di cui AO sia uno spigolo (fig. 4); segandolo con un piano normale allo spigolo OA le tre facce del prisma:

$$BCC'B' = aa' \operatorname{sen} \theta_a; \quad CC'OA = 2f_2; \quad ABB'O = 2f_3,$$

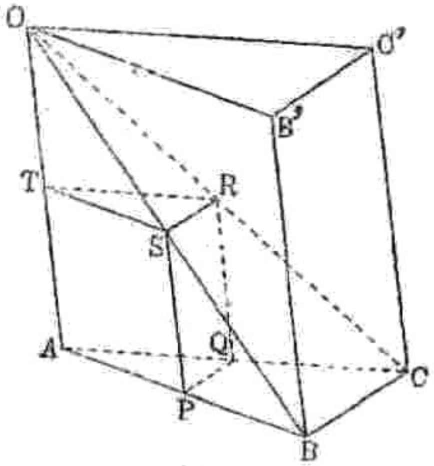

Fig. 4.

stanno tra loro come i lati del triangolo sezione; negli stessi rapporti stanno fra loro le tre facce:

$$PQRS = s_a, \quad QRTA = \frac{1}{2}f_2, \quad PSTA = \frac{1}{2}f_3,$$

del prisma $APQ\ TSR$ simile al dato, in cui P, Q, T, S, R indicano i punti medi degli spigoli AB, AC, OA, OB, OC; ed essendo il diedro di spigolo $OA = \lambda$ sarà in conseguenza del teorema di Carnot:

$$s_a^2 = \left(\frac{1}{2}f_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f_3\right)^2 - \frac{1}{2}f_2 f_3 \cos\lambda,$$

od anche

(8) $$2f_2 f_3 \cos\lambda = f_2^2 + f_3^2 - 4s_a^2.$$

Ma per la (VII)

$$3va = 2f_2 f_3 \operatorname{sen}\lambda,$$

e quadrando tenendo conto della (8) segue:

$$(3va)^2 = 4f_2^2 f_3^2 - (f_2^2 + f_3^2 - 4s_a^2)^2.$$

Il secondo membro rappresenta sedici volte il quadrato dell' *area T del triangolo i cui lati sono*

$$f_2, \quad f_3, \quad 2s_a,$$

sarà quindi:

(X) $$3va = 4T, \quad (^1)$$

cioè *il triplo del volume del tetraedro per uno spigolo è uguale al quadruplo dell' area del triangolo di cui 2 lati hanno per misura le aree delle 2 facce che hanno a comune questo spigolo e il terzo lato ha per misura l' area della sezione media del tetraedro parallela a questo spigolo (e al suo opposto)*

8. *Relazione tra il volume del tetraedro e il raggio della sfera circoscritta.*

L' argomento è stato studiato da LAGRANGE [2], LÉGENDRE, CRELLE, STAUDT; noi esporremo l'elegantissima dimostrazione di STAUDT. Sia α un piano parallelo al piano tangente alla sfera circoscritta al tetraedro $OABC$ nel punto O e distante da esso di un segmento h (fig. 5). Indicando con ρ il raggio della sfera e con S e S' i punti in cui il diametro della sfera uscente da O taglia ulteriormente la sfera ed il piano α è

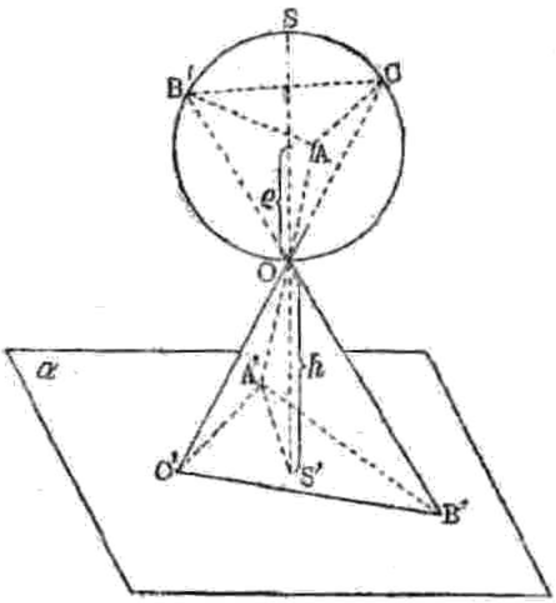

Fig. 5.

$$OS = 2\rho; \quad OS' = h.$$

Chiamando inoltre con A', B', C' i punti in cui le rette OA, OB, OC incontrano il piano α, confrontando le coppie di

(1) J. H. T. MÜLLER: *Trig.* Appendice, pag. 291.

(2) LAGRANGE: *Sur les pyramides* 21. Mém. de Berlin, 1773; LEGENDRE: *Géometrie.* Note V; CRELLE: *Math. aufsätze*, pag. 117; STAUDT: G. di Crelle 57, pag. 88.

triangoli rettangoli OAS, $OS'A'$; OBS, $OS'B'$; OCS, $OS'C'$ si ha:

$$(9) \qquad 2\rho h = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'.$$

Chiamando con a', b', c' i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ del triangolo $A'B'C'$ ed osservando ad esempio che il quadrangolo $BC\,B'C'$ è inscrittibile si ha:

$$a' : a_1 = OC' : b$$

da cui tenuto anche conto della (9):

$$a' = \frac{a_1\,OC'}{b} = \frac{2a_1\,\rho h}{bc} = aa_1\,\frac{2\rho h}{abc},$$

oppure ponendo

$$\frac{2\rho h}{abc} = k$$

è:

$$a' = aa_1 k; \quad b' = bb_1 k; \quad c' = cc_1\,k,$$

di guisa che indicando con σ *l'area del triangolo i cui lati sono* aa_1, bb_1, cc_1 è:

$$A'B'C' = \sigma k^2.$$

Indicando con v' il volume del tetraedro $OA'B'C'$ a causa della (IV) è:

$$\frac{v}{v'} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA' \cdot OB' \cdot OC'} = \frac{(OA \cdot OB \cdot OC)^2}{(2\rho h)^3} = \frac{a^2b^2c^2}{(2\rho h)^3} = \frac{1}{2\rho h k^2},$$

e da questa essendo $v' = \frac{1}{3}\sigma k^2 h$ si ha:

$$v = \frac{1}{6\rho h k^2}\,\sigma k^2\,h = \frac{\sigma}{6\rho}$$

e perciò

$$(\mathrm{XI}) \qquad 6\rho v = \sigma,$$

ossia il *sestuplo del prodotto del raggio della sfera circoscritta al tetraedro per il volume di questo è uguale all' area del triangolo i cui lati sono* aa_1, bb_1, cc_1.

Omettiamo per brevità le formule che legano il volume ai raggi della sfera inscritta e delle sfere exinscritte che sono analoge a quelle dei triangoli.

9. La determinazione del volume del tetraedro in funzione delle coordinate dei vertici è nella memoria di LAGRANGE « Solutions analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires » (1). LAGRANGE premette alcune identità che nel moderno linguaggio algebrico rappresentano i noti teoremi sul prodotto di due determinanti, sui determinanti reciproci, sul quadrato di una matrice e al n.° 15 della memoria citata esprime il volume del tetraedro $OABC$ supponendo in O l'origine degli assi coordinati. Per stabilire la formula cercata procederemo nel seguente modo. Sia x, y, z una terna di assi coordinati ortogonali destrogira e si abbia: $O \equiv (x_1, y_1, z_1)$; $A \equiv (x_2, y_2, z_2)$; $B \equiv (x_3, y_3, z_3)$; $C \equiv (x_4, y_4, z_4)$.

Consideriamo il determinante del 4.° ordine:

$$(10) \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

il cui annullarsi esprime come è noto che i punti O, A, B, C appartengono ad uno stesso piano (2). Sottraendo dagli elementi della 2ª, 3ª, 4ª riga quelli della prima, avremo:

$$(11) \qquad D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1; & y_2 - y_1; & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1; & y_3 - y_1; & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1; & y_4 - y_1; & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Alla terna di assi x, y, z sostituiamo una terna ortogo-

---

(1) *Oeuvres* di LAGRANGE, tom. III, pagg. 661-692.

(2) L'espressione dell'area di un triangolo piano in funzione delle coordinate dei suoi vertici suggerisce lo studio del determinante D relativo a 4 punti nello spazio.

Seguiremo per la dimostrazione quella contenuta nelle « *Lezioni di geometria analitica* » del prof. LUIGI BIANCHI. Ed. 1913, pag. 177 e seg.

Altre opere consultate per la redazione dei numeri 9 e 10 di questa nota sono:

BALTZER: *Théorie et applications des déterminants.*

L. KRONEKER: *Vorlesungen über die theorie der determinanten.* IB. pag. 222 e seg.

nale, anch'essa destrogira, di origine O, tale che l'asse delle X positive coincida con il raggio OA, l'asse delle Y sia nel piano AOB e sia inoltre l'ordinata Y di B rispetto alla coppia di assi X, Y positiva. Se α_1, α_2, α_3 sono i coseni di direzione dell'asse X rispetto alla terna x, y, z; β_1, β_2, β_3 i coseni di direzione di Y; γ_1, γ_2, γ_3 quelli di Z è:

$$(1 \qquad \left\{\begin{aligned} x - x_1 &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ y - y_1 &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, \\ z - z_1 &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z; \end{aligned}\right.$$

ed esprimendo gli elementi del determinante (11) per mezzo delle (12) e ricordando il teorema sul prodotto per righe di due determinanti si ha:

$$(13) \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

essendo $(X_1 Y_1 Z_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2)$, $(X_3 Y_3 Z_3)$ le coordinate dei punti A, B, C rispetto alla nuova terna di assi X, Y, Z. Ma per la nota proprietà del determinante dei nove coseni è:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

è inoltre: $Y_1 = Z_1 = 0$; $Z_2 = 0$ e la (12) diventa:

$$D = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ X_2 & Y_2 & 0 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

ovverosia:

$$D = X_1 Y_2 Z_3.$$

Per il modo come è stata scelta la terna X, Y, Z i numeri X_1 e Y_2 sono positivi ed il loro prodotto esprime il doppio dell'area del triangolo OAB; Z_3 è un numero positivo o negativo a seconda che sia la terna OA, OB, OC destrogira o sinistrogira, di guisa che convenendo di *misurare positivamente o negativamente il volume del tetraedro*

OABC secondo che la terna di assi OA, OB, OC sia destrogira o sinistrogira avremo [1]:

$$v = \frac{1}{6} D,$$

cioè:

$$\text{(XII)} \qquad v = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad [2].$$

Possiamo ora dalla (XII) dedurre facilmente lo sviluppo (3) del seno dell' angolo triedro. Supponiamo l' origine degli assi x, y, z in O, sarà $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, e siano i coseni di direzione dei 3 spigoli OA, OB, OC rispettivamente $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Sarà

$$\begin{aligned} x_2 &= a\alpha_1; & y_2 &= a\beta_1; & z_2 &= a\gamma_1; \\ x_3 &= b\alpha_2; & y_3 &= b\beta_2; & z_3 &= b\gamma_2; \\ x_4 &= c\alpha_3; & y_4 &= c\beta_3; & z' &= c\gamma_3; \end{aligned}$$

e perciò

$$v = \frac{1}{6} abc \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

e confrontando con la (IV) risulta:

$$\text{sen}\,(a, b, c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

---

[1] *Per il segno del volume del tetraedro*: Möbius. Baryc. Calcul 19, Statik 63.

[2] La formula (XII) è di Lagrange. A pag. 672 dell' opera citata egli dà lo sviluppo del determinante secondo membro della (XII) ove si supponga $a_1 = y_1 = z_1 = 0$.

ed elevando al quadrato, ove si osservi ad esempio che $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$; $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=\cos n$ è:

$$\operatorname{sen}^2(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & \cos n & \cos m \\ \cos n & 1 & \cos l \\ \cos m & \cos l & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1-\cos^2 l-\cos^2 m-\cos^2 n+2\cos l\cos m\cos^2 n=$$
$$=\operatorname{sen}^2 l\operatorname{sen}^2 m-(\cos l\cos m-\cos n)^2]=$$
$$=[\cos(l-m)-\cos n][\cos n-\cos(l+m)],$$

ed infine:

$$\operatorname{sen}^2(a,b,c)=4\operatorname{sen}\frac{l+m+n}{2}\operatorname{sen}\frac{-l+m+n}{2}\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{l-m+n}{2}\operatorname{sen}\frac{l+m-n}{2},$$

da cui ponendo al solito $l+m+n=2s$:

$$(3)_{bis}\qquad \operatorname{sen}(a,b,c)=\pm\sqrt{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-l)\operatorname{sen}(s-m)\operatorname{sen}(s-n)}$$

e prenderemo il $+$ o $-$ a secondo che (a,b,c) è un triedro destrogiro o sinistrogiro.

10. Vogliamo dare un' applicazione della formula (XII) determinando il *prodotto dei volumi v e v' di 2 tetraedri $OABC$, $O'A'B'C'$ in funzione dei quadrati delle distanze dei vertici dei tetraedri stessi.*

Si ponga:

$$O'\equiv(x_1',y_1',z_1');\ A'\equiv(x_2',y_2',z_2');\ B'\equiv(x_3',y_3',z_3');\ C'\equiv(x_4',y_4',z_4')$$

e sia

$$OO'=d_{1,1};\ OA'=d_{1,2};\ OB'=d_{1,3};\ OC'=d_{1,4};$$
$$AO'=d_{2,1};\ AA'=d_{2,2};\ AB'=d_{2,3};\ AC'=d_{2,4},$$

e

$$BO'=d_{3,1};\ BA'=d_{3,2};\ BB'=d_{3,3};\ BC'=d_{3,4};$$
$$CO'=d_{4,1};\ CA'=d_{4,2};\ CB'=d_{4,3};\ CC'=d_{4,4}.$$

Si ha:

$$36\,vv' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1' & y_1' & z_1' \\ 1 & x_2' & y_2' & z_2' \\ 1 & x_3' & y_3' & z_3' \\ 1 & x_4' & y_4' & z_4' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' & z_2' - z_1' \\ x_3' - x_1' & y_3' - y_1' & z_3' - z_1' \\ x_4' - x_1' & y_4' - y_1' & z_4' - z_1' \end{vmatrix}.$$

Si effettui il prodotto per righe dei due determinanti e si osservi che è

$$(x_i - x_1)(x_j' - x_1') + (y_i - y_1)(y_j' - y_1') + (z_i - z_1)(z_j' - z_1') =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\Sigma(x_1 - x_j')^2 - \Sigma(x_i - x_j')^2 - \Sigma[(x_1 - x_1')^2 - (x_i - x_1')^2]\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[d^2_{1,j} - d^2_{i,j} - (d^2_{1,1} - d^2_{i,1})\Big];$$

sarà perciò:

$$288\,vv' = \begin{vmatrix} d^2_{1,2} - d^2_{2,2} - (d^2_{1,1} - d^2_{2,1}), & d^2_{1,2} - d_{3,2} - (d^2_{1,1} - d^2_{3,1}), & d^2_{1,2} - d^2_{4,2} - (d^2_{1,1} - d^2_{4,1}) \\ d^2_{1,3} - d^2_{2,3} - (d^2_{1,1} - d^2_{2,1}), & d^2_{1,3} - d^2_{3,3} - (d^2_{1,1} - d^2_{3,1}), & d^2_{1,2} - d^2_{4,2} - (d^2_{1,1} - d^2_{4,1}) \\ d^2_{1,4} - d^2_{2,4} - (d^2_{1,1} - d^2_{2,1}), & d^2_{1,4} - d^2_{3,4} - (d^2_{1,1} - d^2_{3,1}), & d^2_{1,2} - d^2_{4,2} - (d^2_{1,1} - d^2_{4,1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & d^2_{1,1} - d^2_{2,1}, & d^2_{1,1} - d^2_{3,1}, & d^2_{1,1} - d^2_{4,1} \\ 1, & d^2_{1,2} - d^2_{2,2}, & d^2_{1,2} - d^2_{3,2}, & d^2_{1,2} - d^2_{4,2} \\ 1, & d^2_{1,3} - d^2_{2,3}, & d^2_{1,3} - d^2_{3,3}, & d^2_{1,3} - d^2_{4,3} \\ 1, & d^2_{1,4} - d^2_{2,4}, & d^2_{1,4} - d^2_{3,4}, & d^2_{1,4} - d^2_{4,4} \end{vmatrix}$$

od anche:

$$\text{(XIII)} \qquad 288\,vv' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d^2_{1,1} & d^2_{2,1} & d^2_{3,1} & d^2_{4,1} \\ 1 & d^2_{1,2} & d^2_{2,2} & d^2_{3,2} & d^2_{4,2} \\ 1 & d^2_{1,2} & d^2_{2,3} & d^2_{3,2} & d^2_{4,3} \\ 1 & d^2_{1,4} & d^2_{2,4} & d^2_{3,4} & d^2_{4,4} \end{vmatrix}.$$

Supposto $O=O'$; $A=A'$; $B=B'$; $C=C'$ è

$$d_{1,1}=d_{2,2}=d_{3,3}=d_{4,4}=0;\quad d_{1,2}=d_{2,1}=a,\quad d_{3,4}=d_{4,3}=a_1;$$
$$d_{1,3}=d_{3,1}=b,\quad d_{2,4}=d_{4,2}=b_1;\quad d_{1,4}=d_{4,1}=c,\quad d_{2,3}=d_{3,2}=c_1$$

e la (XIII) diventa la *formula di* EULERO *che esprime il volume del tetraedro in funzione dei quadrati degli spigoli:*

$$\text{(II)}^{bis}\qquad 288\,v^2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c_1^2 & b_1^2 \\ 1 & b^2 & c_1^2 & 0 & a_1^2 \\ 1 & c^2 & b_1^2 & a_1^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

11. Vediamo infine come si esprime con linguaggio vettoriale la formula (IV) trovata al n. 4

$$v=\pm\frac{1}{6}\,abc \operatorname{sen} n \operatorname{sen}(c,\ f_3)$$

dove con le nostre convenzioni va preso il segno + o — a seconda che il triedro a, b, c è destrogiro o sinistrogiro. Indicando con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ i vettori $A-O$, $B-O$, $C-O$, si osservi che il prodotto vettoriale $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ ha per modulo $ab \operatorname{sen} n$ e per direzione la direzione normale al piano AOB, in guisa che i tre vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ formino una terna destrogira. Ora il coseno dell'angolo formato dai 2 vettori $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ è uguale a $+\operatorname{sen}(c,\ f_3)$ se anche la terna $(a,\ b,\ c)$ è destrogira ed uguale a $-\operatorname{sen}(c,\ f_3)$ se la terna $(a,\ b,\ c)$ è sinistrogira, quindi il prodotto $\pm\, abc \operatorname{sen} n \operatorname{sen}(c,\ f_3)$ rappresenta il prodotto scalare dei 2 vettori $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, ossia è:

$$v=\frac{1}{6}\,\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

cioè *il volume del tetraedro individuato dai 3 vettori* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *è* $\frac{1}{6}$ *del prodotto misto dei 3 vettori stessi.*

12. Termineremo questa nota con due questioni di massimo. La determinazione del *massimo volume di un tetraedro di cui sono date le faccie in superficie* è stata trattata da

LAGRANGE nella memoria citata [1]. A proposito della equazione che risolve la questione il BALTZER scrive: « Il reste encore á desirer une discussion plus approfondie de cette équation, ainsi que l'étude des propriétés géométriques des tétraèdres qui ont un volume maximum pour des valeurs données des aires de leurs faces » [2]. La questione può essere trattata completamente, seguendo la via tenuta dal chiar. prof. G. BELLACCHI [3].

Abbiamo già visto al n.° 6 come dato un tetraedro $OABC$ di cui le faccie BOC, COA, AOB, ABC abbiano per misura rispettivamente f_1, f_2, f_3, f_4 si possa costruire un quadrangolo $PQSR$ in modo che sia: $PQ=f_1$, $QR=f_2$, $RS=f_3$, $SP=f_4$ e con il vettore $Q-P$ normale alla faccia BOC e le due terne $A-O$, $B-O$, $C-O$ e $A-O$, $B-O$, $Q-P$ di ugual verso, e con analoghe condizioni per $R-Q$, $S-R$, $P-S$. Conoscendo inversamente il quadrangolo $PQRS$ possiamo costruire in uno e in un sol modo il tetraedro $OABC$. Infatti il triedro polare del triedro formato dai 3 vettori $Q-P, R-Q$, $S-R$ individua il triedro di vertice O del tetraedro $OABC$, e il problema si riconduce a segare questo triedro con un piano normale alla direzione del vettore $P-S$ in guisa che l'area ABC del triangolo sezione sia uguale a f_4, problema questo che si risolve con il metodo della similitudine. Le tre faccie del tetraedro ottenuto di vertice O hanno rispettivamente per superficie f_1, f_2, f_3. Costruendo infatti del tetraedro $OABC$ il quadrangolo gobbo $PQ'R'S'$ corrispondente è $S'-P=S-P$ e perciò $S=S'$, ma $Q-P$ e $Q'-P$ hanno ugual direzione e verso, lo stesso dicasi per $R'-Q'$ e $R-Q$, $S-R'$ ed $S-R$ ed allora è $R=R'$, $Q=Q'$. Si osservi che il volume v' del tetraedro $PQRS$ è uguale a $\frac{3}{4}v^2$, poichè questo tetraedro ha i tre spigoli $Q-P$, $R-Q$, $S-R$ uguali ai tre spigoli del tetraedro polare di $OABC$ di vertice O e due tetraedri così fatti, è subito visto geometricamente, sono

---

[1] *Oeuvres* de LAGRANGE. Tome troisième, n. 17, pag. 673-674-675.
[2] BALTZER, *Théorie et applications des déterminants*, pag. 211.
[3] BELLACCHI, *Complementi di geometria e d' algebra*, pag. 21-22.

equisolidi ([4]). La relazione:

$$v' = \frac{3}{4} v^2,$$

ci dice che $OABC$ diventa massimo contemporaneamente col tetraedro $PQRS$. Ora del tetraedro $PQRS$ fissata la base PQR si ha il volume massimo quando il piano PRS è normale al piano PQR (fig. 6); ma lo spigolo OC del tetraedro $OABC$ è normale al piano PQR, lo spigolo opposto AB è normale al piano RSP quindi i due spigoli OC e AB sono normali.

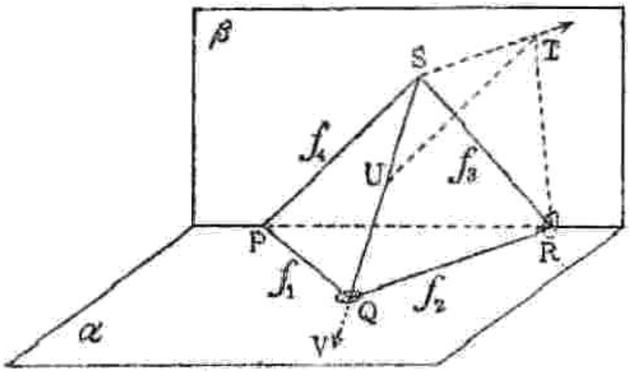

Fig. 6.

Segue che *postulando l'esistenza del massimo il tetraedro* OABC *deve essere normale* (3 coppie di spigoli opposti ortogonali) ed esso si otterrà costruendo il corrispondente quadrangolo $PQRS$ con i lati uguali a f_1, f_2, f_3, f_4 e i piani PQR, RSP; PQS, QRS ortogonali. Proviamo subito che le condizioni imposte al quadrangolo $PQRS$ lo individuano univocamente.

Assumiamo infatti come assi coordinati una terna di assi x, y, z con l'origine in P con l'asse delle x coincidente con PQ, e gli assi y e z rispettivamente nei piani PQR, PRS. Ponendo:

$$RP = x; \quad RPQ = \alpha; \quad RPS = \beta,$$

sarà:

$$\cos\alpha = \frac{f_1^2 - f_2^2 + x^2}{2 f_1 x}; \quad \cos\beta = \frac{f_4^2 - f_3^2 + x^2}{2 f_4 x}; \tag{14}$$

$$Q \equiv (f_1 \cos\alpha, f_1 \operatorname{sen}\alpha, 0); \quad R \equiv (x, 0, 0); \quad S \equiv (f_3 \cos\beta, 0, f_3 \operatorname{sen}\beta).$$

I coseni di direzione della normale al piano PQS sono proporzionali ai numeri:

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta; \quad -\cos\alpha \operatorname{sen}\beta; \quad -\operatorname{sen}\alpha \cos\beta,$$

([4]) Cfr. relazione (6).

quelli della normale al piano QRS proporzionali ai numeri:

$$f_1 f_3 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta; \quad -f_3 \operatorname{sen}\beta(f_1 \cos\alpha - x); \quad -f_1 \operatorname{sen}\alpha(f_3 \cos\beta - x),$$

e la condizione di ortogonalità dei due piani PQS, QRS è espressa dall'equazione:

$$(15) \quad f_1 f_3(1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta) = x f_3 \cos\alpha \operatorname{sen}^2\beta + x f_1 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\beta,$$

od anche posto:

$$(16) \quad x^2 = u; \; f_2 - f_1 = t_1; \; f_2 + f_1 = t_2; \; f_3 - f_4 = t_3; \; f_3 + f_4 = t_4;$$

$$a_1 = \sum_1^4{}_i t_i^2; \quad a_2 = \sum_{i,h}^{1,4} t_i^2 t_h^2, i \neq h; \quad a_4 = t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2,$$

si ha, tenuto conto delle (14), per u l'equazione:

$$(17) \qquad f(u) = 3u^4 - 2a_1 u^3 + a_2 u^2 - a_4 = 0.$$

Indipendentemente dal postulato del massimo calcolando il volume v' si ha:

$$3^3 \times 2^6 \times v'^2 = \frac{(u - t_1^2)(u - t_2^2)(u - t_3^2)(u - t_4^2)}{u}$$

e derivando il secondo membro rispetto ad u ed uguagliando a 0 si ha l'equazione (17) [1].

La discussione dell'equazione (17) ci proverà che le sue radici sono tutte e quattro reali, una negativa e tre positive e fra queste ($u = x^2$) ad una sola corrisponde un effettivo quadrangolo gobbo $PQRS$.

Supponiamo dapprima $f_1 \neq f_2$; $f_3 \neq f_4$ e inoltre come è lecito supporre $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$. Sarà $t_1^2 < t_2^2$; $t_3^2 < t_4^2$; $t_2^2 < t_4^2$. Perchè il quadrangolo $PQRS$ esista è necessario ed è sufficiente che si abbia

$$t_1 < x < t_2; \quad t_3 < x < t_4$$

od anche $t_1^2 < u < t_2^2$; $t_3^2 < u < t_4^2$, da cui $t_3^2 < t_2^2$, e siccome

---

[1] Nel libro citato del BELLACCHI è seguita questa via, e la discussione dell'equazione (17) è limitata soltanto alla realtà delle radici.

i numeri t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2 possono soddisfare i seguenti sistemi di condizioni:

$a)$ $\quad 0 < t_1^2 < t_3^2 < t_2^2 < t_4^2$, $\qquad a')$ $\quad 0 < t_1^2 = t_3^2 < t_2^2 < t_4^2$

$b)$ $\quad 0 < t_3^2 < t_1^2 < t_2^2 < t_4^2$,

dovrà essere nei casi $a)$ e $a')$ $t_3^2 < u < t_2^2$, e nel caso $b)$ $t_1^2 < u < t_2^2$.

Si osservi ora che è:

$$f(t_1^2) = t_1^2(t_1^2 - t_2^2)(t_1^2 - t_3^2)(t_1^2 - t_4^2);$$
$$f(t_2^2) = t_2^2(t_2^2 - t_1^2)(t_2^2 - t_3^2)(t_2^2 - t_4^2);$$
$$f(t_3^2) = t_3^2(t_3^2 - t_1^2)(t_3^2 - t_2^2)(t_3^2 - t_4^2);$$
$$f(t_4^2) = t_4^2(t_4^2 - t_1^2)(t_4^2 - t_2^2)(t_4^2 - t_3^2);$$

e nel caso $a)$ abbiamo:

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = +\infty;\ f(0) < 0;\ f(t_1^2) < 0;\ f(t_3^2) > 0:$$
$$f(t_2^2) < 0;\ f(t_4^2) > 0$$

e perciò delle radici della (17) una sola soddisfa la condizione $t_3^2 < u < t_2^2$.

Nel caso $a')$ $f(t_1^2) = 0$ e la radice $u = t_1^2$ non è accettabile; è poi, indicando con ε un numero sufficientemente piccolo:

$$\lim_{n=\infty} f(u) = +\infty;\quad f(0) < 0;\quad f(t_1^2 - \varepsilon) < 0;$$
$$f(t_1^2 + \varepsilon) > 0;\quad f(t_2^2) < 0;\quad f(t_4^2) > 0,$$

ed ancora delle quattro radici reali della (17) una sola soddisfa la condizione $t_1^2 = t_3^2 < u < t_2^2$. Omettiamo per brevità la discussione del caso $b)$.

Supposto ora $f_1 = f_2$; $f_3 \neq f_4$ sarà $t_1 = 0$ ed ancora $0 < t_3^2$: $0 < t_3^2 < t_4^2$.

L'equazione (17) ha in questo caso la radice doppia $u = 0$ $(x = 0)$ alla quale non corrisponde un tetraedro $PQRS$, le altre 2 radici soddisfano l'equazione di 2° grado:

$$(18) \quad 3u^2 - 2(t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)u + (t_2^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2) = 0,$$

che ha le 2 radici reali essendo il suo discriminante ridotto

$$\frac{\Delta}{4} = t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 - t_2^2 t_3^2 - t_2^2 t_4^2 - t_3^2 t_4^2 > 0.$$

Esse sono anche positive come si vede dall'esame dei coefficienti della (18). Le condizioni cui deve soddisfare u sono $0 < u < t_1^2$, $t_3^2 < u < t_4^2$ da cui $t_3^2 < t_2^2$. Supposto ad esempio $t_2^2 < t_4^2$ deve essere $t_3^2 < u < t_2^2$. Ora si ha:

$$f(t_3^2) = t_3^2(t_3^2 - t_2^2)(t_3^2 - t_4^2) > 0,$$
$$f(t_2^2) = t_2^2(t_2^2 - t_3^2)(t_2^2 - t_4^2) < 0,$$
$$f(t_4^2) = t_4^2(t_4^2 - t_2^2)(t_4^2 - t_3^2) > 0,$$

e quindi una sola radice della (18) soddisfa la condizione

$$t_3^2 < u < t_2^2.$$

Analogamente si discutono gli altri casi $t_2^2 \geq t_4^2$, $t_1 = t_3 = 0$.

Si osservi ancora come conoscendo i segmenti t_2, t_3, t_4 e un segmento unitario si può costruire con la riga e il compasso la radice dell'equazione (18) che ci conviene per il problema.

Possiamo in ogni caso realizzare il tetraedro $PQRS$ con i due diedri di spigolo PR, QS retti con un sistema articolato [1].

Siano PQ, QR, RS, SP quattro aste di grandezza invariabile, lunghe rispettivamente f_1, f_2, f_3, f_4, con gli estremi P ed R situati sullo spigolo di un diedro retto α, β, l'estremo P fisso e gli estremi Q ed S vincolati a muoversi sulle faccie α e β (v. fig. 6). Si congiunga a questo sistema un'asta SV con un estremo in S vincolata a passare per il punto Q, e tre aste TS, TU, TR tali che gli angoli TSU e TSR siano retti essendo U un punto prestabilito, e del resto arbitrario, di SV. Facendo scorrere l'estremo R lungo lo spigolo del diedro (α, β) allorquando l'asta ST viene sul piano PQS, siccome durante il movimento ST rimane sempre ortogonale al piano QRS, sarà PQS ortogonale al piano QRS e si viene perciò a costruire il quadrangolo richiesto.

Possiamo ora proporci l'altro problema di *determinare fra tutti i tetraedri di cui si conosca la superficie totale quello di volume massimo*. Proviamo subito che esso *è il tetraedro regolare*. Sia infatti $OABC$ un tetraedro di cui sia la somma

---

[1] Cfr. ad es. E. G. Togliatti. *Sui meccanismi articolati.* « Periodico di matematiche ». Serie IV, vol. II, n.° 1, pag. 49 e seg.

delle faccie $f_1+f_2+f_3+f_4=4f$ con f costante. Costruendo il corrispondente quadrangolo $PQRS$ ove non sia $f_1=f_2$, $f_3=f_4$ possiamo sostituire al triangolo PQR un triangolo isoscele $PQ'R$ con i lati $PQ'=Q'R=\frac{f_1+f_2}{2}$, al triangolo PRS un triangolo isoscele PRS' con i lati $PS'=RS'=\frac{f_3+f_4}{2}$ ed essendo $PQ'R>PQR$; $PRS'>PRS$ la piramide $PQ'RS'$ ha il suo volume maggiore di quello della piramide $PQRS$ e il tetraedro corrispondente a $PQ'RS'$ ha la somma delle sue facce uguale a $4f$ e il volume maggiore di quello della piramide $OABC$. Ripetendo la trasformazione sul quadrangolo $PQ'RS'$ prendendo come spigolo fisso $Q'S'$, segue che alla piramide $OABC$ si può sostituire un' altra di volume maggiore e con le 4 faccie tutte di superficie uguale ad f. Ora l' equazione (17) per $t_1=t_3=0$, $t_2=t_4=2f$, diventa:

$$3u^2-16f^2u+16f^4=0,$$

e le sue radici sono $u=4f^2$; $u=\frac{4f^2}{3}$; sola a quest'ultima corrisponde un effettivo quadrangolo $PQRS$ avendosi $x=\frac{2f}{\sqrt{3}}$ facilmente si verifica che due lati consecutivi del quadrangolo $PQRS$ formano un angolo di cui il coseno è $\frac{1}{3}$ perciò i diedri del tetraedro corrispondente $O'A'B'C'$ di volume massimo sono uguali a quelli del tetraedro regolare, ma d' altra parte le facce di $O'A'B'C'$ debbono avere uguali superficie, esse sono perciò triangoli equilateri ed il tetraedro $O'A'B'C'$ (di volume massimo) è esso stesso un tetraedro regolare c. v. d.

13. Studiamo infine il problema di *determinare il massimo dei tetraedri di cui è data la somma degli spigoli* (1).

Postulando che fra tutti i tetraedri di cui è costante la

---

(1) Questo problema, per quanto io abbia cercato, è stato trattato nel solo caso particolare dei *tetraedri equifacciali*, (coppie di spigoli opposti uguali). Cfr. ad es. G. BELLACCHI, opera citata.

somma degli spigoli ne esista uno di volume massimo, facilmente dimostreremo che ***fra tutti i tetraedri di cui è costante la somma degli spigoli ha volume massimo il tetraedro regolare.***

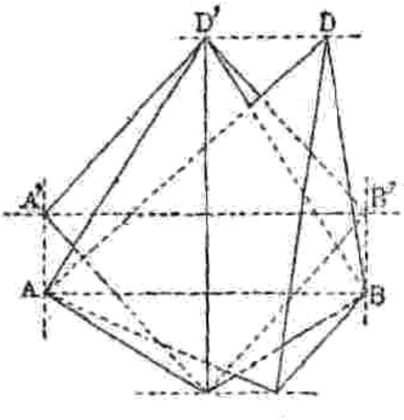

Fig. 7.

Sia $ABCD$ il tetraedro T di volume massimo (fig. 7). Dico ad es. chè $AC = BC$, $AD = BD$. Sia infatti $AC \neq BC$, $AD \neq BD$; sulle parallele condotte da C e D allo spigolo AB si scelgano i punti C' e D' in guisa che i triangoli ABC' ABD' siano isosceli rispetto alla base AB. È:

$$AC' + BC' < AC + BC, \quad AD' + BD' < AD + BD,$$

e poichè $C'D'$ è la distanza delle due rette parallele CC', DD' è anche $C'D' \leq CD$, e perciò il tetraedro $ABC'D'$ ha lo stesso volume del tetraedro $ABCD$ e la somma p' dei suoi spigoli è minore della somma p degli spigoli del tetraedro $ABCD$. Se del tetraedro $ABC'D'$ costruiamo il tetraedro simile T' in guisa che il rapporto di similitudine di 2 spigoli omologhi sia uguale a $\frac{p'}{p}$, T' ha volume maggiore di T e la somma dei suoi spigoli uguale a p, contro l'ipotesi che $ABCD$ abbia volume massimo. Segue che il tetraedro $ABCD$ di volume massimo deve avere due spigoli qualunque appartenenti ad una medesima faccia uguali ed è perciò regolare.

Se ora non si postula l'esistenza del massimo, il ragionamento fatto ci prova che dato un tetraedro $ABCD$ ove non sia $AC = BC$, $AD = BD$, si può costruire un tetraedro $A'B'C'D'$ avente la stessa somma degli spigoli, $A'C' = B'C'$; $A'D' = B'D'$ e volume maggiore. Operando sul tetraedro $A'B'C'D'$ la medesima trasformazione, ove non sia $A'C' = B'D'$ si può costruire un tetraedro $A''B''C''B''$ avente la somma dei suoi spigoli uguale a p; $A''C'' = C''B'' = B''D'' = D''A''$ e volume maggiore. Sia $ABCD$ il tetraedro (fig. 8) avente la somma

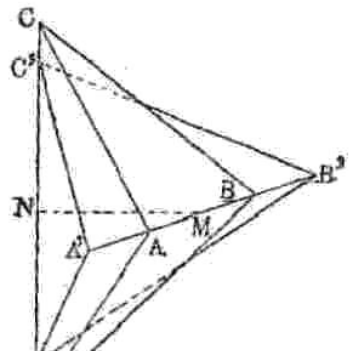

Fig. 8.

dei suoi spigoli uguali a p, e $AC = BC = AD = BD$; dimostriamo che se i due spigoli AB e CD non sono uguali si può determinare un altro tetraedro $A''B''C''D''$ avente la somma dei suoi spigoli uguale a p, $A''C'' = B''C'' = A''D'' = B''D''$; $A''B'' = C''D''$, e volume maggiore di quello di T.

Supponiamo per fissare le ipotesi $CD > AB$, e si prendano internamente a CD i punti C' e D' in guisa che si abbia

$$CC' = DD' = \frac{CD - AB}{4},$$

e sui prolungamenti di AB i punti A' e B' in guisa che sia

$$AA' = BB' = \frac{CD - AB}{4}.$$

Il tetraedro $A'B'C'D'$ che indicheremo con T' ha i quattro spigoli $A'C'$, $B'C'$, $A'D'$, $B'D'$ uguali, e i due spigoli opposti $A'B'$ e $C'D'$ anch'essi uguali, ed inoltre $C'D' + A'B' = CD + AB$. Indicando con M ed N i punti medi di AB e CD è:

$$\begin{aligned} A'C'^2 &= C'N^2 + NM^2 + MA'^2 = (CN - CC')^2 + NM^2 + \\ &+ (MA + CC')^2 = CN^2 + NM^2 + MA^2 + 2CC'^2 - \\ &- 2CC'(CN - AM) = CA^2 + 2CC'^2 - 4CC'^2 = CA^2 - 2CC'^2 \end{aligned}$$

quindi $A'C'^2 < CA^2$ e perciò $C'A' < CA$ da cui

$$A'C' + B'C' + A'D' + B'D' < AC + BC + AD + BD,$$

ossia il tetraedro T' ha la somma dei suoi spigoli p' minore di p. D'altra parte è $T' > T$. Infatti:

$$T' = \frac{1}{6} A'B' \cdot C'D' \cdot MN = \frac{1}{6}\left(\frac{AB + CD}{2}\right)^2 MN > \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot MN = T,$$

e perciò $T' > T$. Costruendo infine il tetraedro T'' simile a T' tale che il rapporto tra uno spigolo di T'' e l'omologo di T' sia uguale a $\frac{p}{p'} > 1$ è $T'' > T'$, ma $T' > T$ è perciò $T'' > T$ e T'' ha le caratteristiche volute.

Possiamo ora provare elementarmente che fra i tetraedri di cui è costante la somma degli spigoli ed uguale a $12s$ ha volume massimo il tetraedro regolare. In virtù di quanto si è detto possiamo limitare il nostro studio ai tetraedri di cui 2 spigoli opposti sono ciascuno $2x$, gli altri 4 spigoli ciascuno uguale a y avendosi poi $4x+4y=12s$ cioè $x+y=3s$. Il volume v di un tale tetraedro è per la formula (IX),

$$\frac{2}{3}x^2\sqrt{y^2-2x^2}=\frac{2}{3}x^2(y-x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}(y+x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}.$$

Sarà

$$v^2=\frac{4}{9}x^4(y-x\sqrt{2})(y+x\sqrt{2})=\frac{4}{9}x^4[3s-x(\sqrt{2}+1)][3s+x(\sqrt{2}-1)].$$

Il massimo di v si otterrà per i valori di x che rendono massimo il prodotto

$$x^4[3s-x(\sqrt{2}+1)][3s+x(\sqrt{2}-1)]=$$
$$=\frac{1}{\lambda\mu}x^4\{[3s-x(\sqrt{2}+1)\lambda\}\{[3s+x(\sqrt{2}-1)]\mu\}.$$

Con il noto metodo dei fattori indeterminati, se scegliamo le costanti λ e μ in guisa che si abbia

$$-\lambda(\sqrt{2}-1)+\mu(\sqrt{2}-1)+1=0 \tag{19}$$

il nostro prodotto diventerà massimo quando sia:

$$\lambda=\frac{x}{4[3s-x(\sqrt{2}+1)]}>0,\quad \mu=\frac{x}{4[3s+x(\sqrt{2}-1)]}>0.$$

L'equazione (19) per questi valori di λ e μ diventa:

$$x^2+5sx-6s^2=0,$$

che ha la radice positiva $x=s$, è allora $2x=2s$, $y=2s$ ed il tetraedro corrispondente ha perciò tutti i suoi spigoli uguali ed è regolare, ma per $x=s$ è

$$\lambda=\frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}>0,\quad \mu=\frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}>0.$$

quindi il tetraedro regolare (di spigolo $2s$) è quello di volume massimo fra tutti i tetraedri la cui somma degli spigoli è costante ($=12s$). c. v. d.

Firenze, R. Istituto Tecnico.

GIOVANNI SANSONE