Le origini dei primi concetti della geometria differenziale [1]

La concezione della geometria che ha dominato nei secoli scorsi è quella della geometria come *scienza dell'estensione: disciplina magnitudinis immobilis*, o *amplissima et pulcherrima scientia figurarum*, e così via. Definizioni che hanno accontentato, chi più chi meno, i nostri antenati: i quali comunque hanno creduto di sapere che cosa è la geometria. Noi sotto questo aspetto siamo molto meno informati. L'astrazione sempre maggiore dei concetti che è la premessa necessaria di ogni scienza matematica — e che già ai tempi di Platone era giunta a tal punto nella sua evoluzione da fargli mettere in ridicolo il nome di geometria preso nel senso etimologico —, i vari sistemi geometrici che si sono venuti formando successivamente, e i vari spazi che si sono creati, e infine il progressivo sovrapporsi delle due concezioni opposte della geometria come interpretazione di altre parti della matematica, e di queste come traduzioni di quella, hanno oggi condotto la geometria a una condizione tale, che dobbiamo confessare di ignorare che cosa significhi in modo preciso la parola *geometria*. Il Veblen e il Whitehead che proprio recentemente si sono domandati quale parte della matematica sia quella che

---

[1] Nella preparazione di questa conferenza (che fu tenuta nel ciclo delle *Conferenze di Fisica e di Matematica* organizzato dalla R. Università e dalla R. Scuola d'Ingegneria di Torino), oltre che delle opere originali, in quanto mi sono state accessibili, mi sono ampiamente servito dei vol. III (2ª ed.) e IV delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, pubblicate da M. Cantor (Leipzig 1901, 1908) e dei due lavori di P. Stäckel: a) *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien* (Leipz. Berichte, Band 45, 1893); b) *Gauss als Geometer*, in *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band X, 2. te Abt., 1922.

oggi noi chiamiamo geometria, hanno risposto (¹) « It is likely that there is no definite answer to this question, but that a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people ».

Così vaga e soggettiva è dunque oggi una definizione della geometria; e il male è che probabilmente tutti i geometri del '900 non sarebbero in grado di rispondere in modo diverso. Ma, se lasciamo da parte quei loro confratelli dell' 800 che sono stati gli autori e i responsabili di questa trasformazione della geometria, gli altri nostri predecessori — e pensiamo qui proprio a quelli che hanno creato la geometria differenziale — si stupirebbero certamente della nostra ignoranza e la considererebbero come scandalosa. In queste condizioni ho pensato che possa avere qualche interesse di riavvicinarci per un momento a loro, e di cercare con quale visione delle figure geometriche, a contatto di quali problemi concreti, e con quali ragionamenti matematici si sia venuta costituendo la geometria differenziale; argomento del quale ci occuperemo soltanto in relazione colla teoria delle superficie, e anche per questa compatibilmente con la brevità del tempo disponibile.

Diciamo subito che nel periodo delle origini le superficie erano concepite come superficie di corpi solidi: p. es. ancora in EULERO, presso il quale il primo capitolo della *Appendix de superficiebus* con cui si chiude la *Introductio in Analysin infinitorum* si intitola *De superficiebus corporum*, la Memoria dedicata alle superficie applicabili sul piano, posteriore di molti anni, porta il titolo: *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet.* Il concetto di superficie non si era dunque ancora svuotato del solido che la superficie può contenere. Lo svuotamento è avvenuto in modo completo soltanto quando GAUSS (²) ha concepita la superficie *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur.*

Il mezzo analitico di studio che ha servito alla teoria delle superficie per tutto il periodo delle origini è stata l'equazione cartesiana; soltanto con GAUSS si è affermato l'uso sistema-

---

(¹) *The foundations of differential geometry,* Cambridge 1932; cfr. p. 17.

(²) *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* n. 13.

tico delle coordinate curvilinee, che aveva fatta sporadicamente la sua apparizione in una ricerca di EULERO. Le equazioni cartesiane per le superficie sono apparse timidamente intorno all'anno 1700, e si sono diffuse più largamente intorno al 1730, con le ricerche di EULERO sulle geodetiche, e con quelle di CLAIRAUT sulle curve sghembe: quasi un secolo era così passato dalla *Geometria* di CARTESIO. Rileviamo poi esplicitamente che, almeno in parte, il nuovo concetto dell'equazione di una superficie è maturato non per lo spirito di astratta generalizzazione di qualche lontano continuatore di CARTESIO, ma a contatto del problema concreto e preciso concernente la ricerca delle geodetiche [1].

Venendo al primo concetto di natura propriamente differenziale, quello di piano tangente, si possono distinguere nel periodo delle origini tre correnti. Gli uni — e particolarmente i più lontani da noi — hanno parlato di piano tangente o, ciò che è lo stesso, di retta normale, come di una cosa nota a tutti, senza spiegare in che modo la concepivano; presso di loro il piano tangente è qualche cosa di reale, di preesistente, di concreto, la cui essenza matematica non è ancora analizzata. Così quando leggiamo p. es. negli *Opuscoli* di NEWTON che il raggio rifratto da una superficie curva è lo stesso che si ottiene sostituendo a questa il piano tangente nel punto di incidenza, oppure quando nella sua *Ottica* l'angolo di incidenza è definito ricorrendo senz'altro alla normale, *linea ad reflectentem aut refrigentem superficiem perpendicularis*. Così ancora, quando — questo è un passo più importante per noi — GIOVANNI BERNOULLI fin dal 1698, in una lettera a LEIBNIZ, ha enunciato la proprietà geometrica fondamentale delle geodetiche, che il piano osculatore è dappertutto normale alla superficie: « *Alium praeterea invenii solvendi modum* » così egli scrive a proposito del problema delle geodetiche « *qui generalissimus est, quique in eo fundatur, quod planum transiens*

---

[1] Questa affermazione prenderebbe anche maggior consistenza se si potesse ritenere che l'equazione delle superficie era nota a GIOVANNI BERNOULLI fin dal 1698, quando egli — comunicando a LEIBNIZ precisamente la proprietà geometrica fondamentale delle geodetiche di una superficie, come si dirà fra poco — poteva forse essere in possesso di quella equazione (Cfr. su questo punto CANTOR, op. cit. III, pp. 244, 418 e 856).

per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum » (¹).

Con la seconda corrente il piano tangente in P è concepito in modo preciso come piano delle infinite rette tangenti in P; concezione che appare, ma in modo vago, in EULERO e in CLAIRAUT; in modo più preciso soltanto molto più tardi, quando DUPIN nei suoi *Développements de Géométrie* (siamo ormai nel 1813) ha sentito il bisogno di dimostrare che quelle rette tangenti stanno effettivamente in un piano. Devo però dire che già prima la necessità di una dimostrazione di questo genere era stata avvertita da un italiano, il TRAMONTINI (²), per quanto alla sua buona intenzione non corrisponda la forza conclusiva della sua dimostrazione. Del resto anche la dimostrazione di DUPIN non è ancora completamente soddisfacente. Nel frattempo però era stato sfruttato un altro concetto del piano tangente (che del resto è richiamato anche da DUPIN quando, dopo aver stabilito che le rette tangenti a una superficie in un suo punto stanno in un piano, aggiunge che « *tout autre plan ne pourrait, à partir de ce point, avoir aucune de ses parties entre elle et lui* »): questo trova i suoi lontani precedenti già negli *Elementi* di EUCLIDE, dove, definita la tangente a un cerchio in un suo punto come la retta che non ha ulteriori punti in comune col cerchio, si dimostra che non esiste nessuna retta che corra fra la tangente e la circonferenza. A questa idea ha fatto capo LAGRANGE quando è giunto al piano tangente a una superficie in P in modo del tutto analogo: piano tale che non ne esiste nessun altro che corra fra esso e la superficie (in prossimità di P). Ma le verità, anche se sono semplici e mature, tardano spesso a diffondersi; e se per curiosità cerchiamo che cosa si insegnava relativamente al piano tangente qualche anno più tardi, troviamo ancora di quelle frasi che oggi ci disgustano se le udiamo dai nostri studenti; così il LOTTERI (³), a Pavia, insegnava che il piano tangente è quello che con la superficie ha un solo punto comune; a questa regola generale facendo

(¹) *Leibnizens math. Schriften*, « Zweite Abth. », Band III, p. 532.

(²) *Delle proiezioni grafiche*, Modena 1811; cfr. § 82.

(³) *Lezioni di introduzione al calcolo sublime*, Pavia 1821-1822, cfr. t. II. p. 364.

eccezione soltanto le superficie rigate. Del resto l'intersezione di una superficie con un suo piano tangente ha continuato a dare luogo ad equivoci anche in trattati molto diffusi, come quello del LACROIX; e così il BEDETTI, professore all'Università di Bologna, ancora nel 1842 ha pubblicato una Memoria *De plano tangente* (1) per chiarire le difficoltà a cui il piano tangente dava luogo.

Veniamo ora alla curvatura. Come è notissimo, il primo lavoro su questo argomento è la Memoria di EULERO: *Recherches sur la courbure des surfaces* (2). La parola *curvatura* che compare nel titolo va intesa in senso generico, come un termine della lingua comune, senza che esso indichi ancora nessuna nozione matematica ben precisa. Il problema è impostato da EULERO con grande chiarezza, sebbene non ancora in quella forma che considereranno soltanto i suoi continuatori. Per le superficie diverse dalla sfera, osserva EULERO « *on n'en saurait même comparer la courbure avec celle d'une sphère comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raison en est évidente puisque dans chaque point d'une surface il peut y avoir une infinité de courbures différentes... Donc la question sur la courbure des surfaces n'est pas susceptible d'une réponse simple, mais elle exige à la fois une infinité de déterminations; car puisque on peut tracer par chaque point d'une surface une infinité de directions il faut connaître la courbure selon chacune, avant qu'on puisse se former une juste idée de la courbure des surfaces* ». EULERO si è limitato, come è ben noto, allo studio dei raggi di curvatura delle sezioni normali, il cui « *assemblage nous donnera la juste mesure de courbure de la surface au point donné* »; non senza aggiungere però un cenno di un'anticipazione qualitativa di quello che noi oggi chiamiamo il teorema di MEUSNIER, dicendo che « *les arcs élémentaires de toutes ces sections appartiennent aux lignes les plus courbes que l'on peut tirer sur la surface* ». E per le sezioni normali egli giunge effettivamente alla « formula di EULERO »

$$\frac{1}{r}=\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r_1}+\frac{\cos^2\varphi}{r_2},$$

(1) « Novi Comm. Ac. Scient. Inst Bon. », t. 5.
(2) « Hist. de l'Ac. Roy », 1760, Berlino, 1767.

dove r_1, r_2 sono quelli che noi chiamiamo *raggi principali di curvatura* (la formula in EULERO si trova scritta non nella forma qui riprodotta, ma in un'altra equivalente). Quello che come concetto vi è di fondamentale in EULERO è l'esplicita osservazione che, se si conoscono i valori estremi r_1 e r_2, si conoscono tutti gli infiniti valori di r; cosicchè se per due elementi superficiali r_1 e r_2 sono gli stessi « *on peut prononcer hardiment, que ces deux éléments sont doués de la même courbure. Pour connaître la véritable courbure d'un élément quelconque de surface, il suffit d'en chercher le plus grand et le plus petit rayon osculateur, puisque ceux de toutes les autres sections en sont déterminés parfaitement, en sorte qu'aucune variété n'y saurait plus avoir lieu* ». Riassumendo, la curvatura di una superficie in EULERO è concepita in modo complesso, e cioè come l'insieme delle curvature delle infinite linee piane sue sezioni normali; figura complessa nella quale proprio la stessa formula di EULERO porta ordine e insieme semplicità.

Un progresso notevole è stato realizzato nel 1776 da MEUSNIER, nel suo *Mémoire sur la courbure des surfaces* (1). Prescindendo da quello che anche oggi è conosciuto sotto il nome di teorema di MEUSNIER, vi è qui un'idea nuova: realizzare il concetto generico di curvatura di una superficie non più come una distribuzione di curvature di linee piane, secondo quanto aveva insegnato EULERO, ma mediante una figura elementare che possieda lo stesso elemento del second'ordine della superficie studiata (2). Per le curve piane l'elemento del second'ordine è stato realizzato fin da principio mediante il cerchio osculatore. Per le superficie, mentre EULERO aveva rinunciato senz'altro a fare qualche cosa di analogo, l'idea geniale di MEUSNIER è stata questa: come il cerchio che si ado-

---

(1) Pubblicato soltanto nel 1785 nei « Mém. div. Sav. ».

(2) MEUSNIER esprime chiaramente il concetto che la curvatura di una superficie in un punto P dipende dal modo di variare del piano tangente intorno a P, e quindi dall'elemento del second'ordine uscente da P; e nel corso delle sue considerazioni si serve anche di un paraboloide osculatore. È notevole che l'importanza di questo paraboloide sia sfuggita a EULERO, che nella sua trattazione della curvatura delle linee piane contenuta nella *Introductio in Analysin infinitorum* aveva sostituito alla curva una parabola osculatrice.

pera per approssimare le curve piane proviene dalla rotazione di un punto intorno a un altro, così come figura elementare analoga nello spazio si può prendere quella ottenuta facendo ruotare un cerchio intorno a una retta del suo piano, cioè un toro; più precisamente MEUSNIER è proprio riuscito a sostituire ogni elemento di secondo ordine mediante un elemento appartenente all'equatore o al cerchio di gola di un toro. (Il risultato dimostrato in modo preciso da MEUSNIER riesce senz'altro plausibile a chi paragoni il numero di costanti da cui dipende un elemento superficiale del second'ordine col numero di costanti da cui dipendono quei particolari elementi superficiali che vengono assunti come loro modelli, il quale numero è otto al pari del precedente). Se poi r, ρ sono il raggio del cerchio rotante e la distanza del punto considerato dall'asse di rotazione, r e ρ risultano appunto i raggi (principali) di curvatura r_1, r_2 di EULERO.

Un posto completamente a sè è quello tenuto da MONGE. La sua opera fondamentale sulla teoria della superficie è i *Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie* (anno 3° della Repubblica), opera che riproduce anche almeno parzialmente i suoi risultati precedenti. Essa svolge, per quanto in modo non sistematico, una materia così vasta e in tanta parte originale (famiglie di infinite superficie, la nozione delle caratteristiche e degli inviluppi, lo studio approfondito di tipi particolari di superficie, famiglie di superficie definite da equazioni alle derivate parziali, ecc.) che non ci stupisce di trovarvi fra l'altro anche i due raggi principali di curvatura, da un punto di vista completamente diverso dai precedenti. Fra le tante idee avute da MONGE, vi è stata questa: insieme coi punti di una superficie considerare le relative normali, cioè la congruenza delle normali, e i fuochi dei raggi di questa congruenza, cioè i due centri di curvatura. Valutando la loro distanza dal punto P di partenza del raggio, MONGE ha ritrovato i due raggi di curvatura in P, r_1 e r_2. Ma per uno spirito eminentemente geometrico quale era MONGE, non è tanto la misura di questi raggi quella che ha interesse, ma la nuova figura da lui creata: i due centri di curvatura, i due sistemi di sviluppabili in cui si ordinano le rette della congruenza, le linee di curvatura della superficie intercettate su questa da quelle sviluppabili, le due falde dell'evoluta, luoghi dei centri di curvatura, e così via.

Tutto quanto di bello e di elegante vi è in questa configurazione è stato subito colto da MONGE.

Le congruenze normali, e con esse anche le linee di curvatura erano già state considerate da MONGE in una Memoria più antica, fino dal 1781, e solo in parte riprodotta nei *Feuilles d'Analyse*. Anzi, proprio nella parte non riprodotta di questa Memoria, come ha messo occasionalmente in evidenza CORRADO SEGRE, (1) MONGE ha sviluppato le prime nozioni relative alle congruenze di rette anche non normali; cosicchè risalgono a MONGE quelle prime proprietà delle congruenze che generalmente si attribuiscono a MALUS. La Memoria in questione è il *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* (2), che ha preso origine da un problema pratico.... almeno in teoria. Si tratta di eseguire un movimento di terra, da una prima posizione (*déblai*) a una seconda (*remblai*) nel modo più economico. Il trasporto di ogni particella dal *déblai* al *remblai* ha un prezzo che è proporzionale alla sua massa, e al cammino che le si fa percorrere per trasportarla nella nuova posizione: « *il n'est pas indifférent* » dice MONGE, « *que telle molécule du dèblai soit tranportée dans tel ou tel autre endroit du remblai* »: vi sarà una certa distribuzione da fare in modo che il prezzo sia minimo. MONGE rileva che i cammini percorsi da due particelle non si dèvono mai incontrare, perchè allora si potrebbero sostituire con cammini più brevi, scambiando i punti di destinazione delle due particelle; e così ogni particella che si trova sul cammino di una data deve seguire la stessa strada di questa. I cammini saranno complessivamente non ∞^3, come i punti del *déblai*, ma solo ∞^2, e costituiranno una congruenza di rette (e più precisamente, come trova MONGE, una congruenza normale). Con lo spirito pratico che in MONGE si accompagna alla forza d'invenzione, egli non poteva non riconoscere quanto sia lontana l'impostazione del suo problema dalle condizioni della pratica, non fosse altro per questo, che i cammini delle particelle si svolgono nello spazio anzichè sul terreno. Si può forse dire di lui quello che è stato detto a proposito del suo continuatore, DUPIN « *l'illustre maître, ayons la franchise de le*

---

(1) *Monge e le congruenze generali di rette.* « Bibl. Math. » (3) VIII, 1908.

(2) « Hist. de l'Ac. Roy. des Sciences », année 1781, Paris 1784.

dire, en s'élevant trop au dessus des ambitions de la pratique, était resté très éloigné de ses besoins. Les ingénieurs qui dans leurs heures de loisirs abordent ces savants études, doivent les oublier sur le terrain... Chaque parcelle de volume à enlever est l'origine d'une route idéale, organe fictif d'un transport irréalisable, et lorsque le travail par leur ensemble est réduit au minimum l'épargne est toute géométrique (1). « Anche il problema matematico offre difficoltà, per cui è stato poi ripreso da altri, p. es. da APPELL. Comunque proprio questo problema ha interferito con gli inizi della teoria dalle congruenze di rette e della configurazione di cui ho parlato.

Tornando alla teoria della curvatura, una via in certo senso intermedia fra EULERO e MEUSNIER ha tenuto DUPIN nei suoi già ricordati *Développements*. Guidato dalla sua teoria delle tangenti coniugate, egli ha di nuovo considerata la figura complessiva degli infiniti raggi di curvatura delle sezioni normali, ma sintetizzati in una figura geometrica semplice quale è la sua indicatrice. Anche DUPIN ha utilizzato per lo studio della curvatura le quadriche osculatrici.

Ma un progresso più sostanziale è stato fatto quando GAUSS, introducendo la curvatura totale in un punto, è riuscito a cogliere il carattere numericamente più saliente inerente alla curvatura. È notevole anche che i progressi essenziali realizzati da GAUSS trovano la loro origine nella matematica applicata. GAUSS si era già occupato a lungo delle misurazioni eseguite sulla superficie terrestre, e si può dire che le sue ricerche di geometria differenziale culminate con la pubblicazione delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) hanno proceduto di pari passo con calcoli geodetici. Le lettere del periodo preparatorio, con le quali dà notizia ai suoi corrispondenti delle difficoltà di carattere teorico che egli incontrava, parlano anche dei 32 punti e dei 51 triangoli e delle 146 direzioni che comparivano nei suoi calcoli. Ma vi è di più: per quanto riguarda più specificamente la curvatura, l'idea essenziale di GAUSS è stata di ricorrere alla rappresentazione sferica di una superficie — ottenuta conducendo per il centro di una sfera fissa unitaria la parallela a ogni retta normale — (rap-

---

(1) BERTRAND, *Éloges académiques*, Paris, 1890.

presentazione che aveva un precedente in EULERO). Ora questo procedimento, come lo stesso GAUSS ha scritto nell'Annuncio da lui dato sui *Göttinger Gelehrten Anzeigen* della pubblicazione delle *Disquisitiones*, coincide con quello continuamente usato in astronomia, dove tutte le direzioni si riferiscono a una fittizia sfera celeste di raggio infinito.

Fatta la rappresentazione sferica di un' area superficiale, quanto meno quel pezzo di superficie si stacca da un piano, continua GAUSS nel medesimo Annuncio, tanto più piccola sarà la corrispondente parte della superficie sferica, *« und es ist mithin ein sehr natürlicher Gedank zum Maasstabe der Totalkrümmung welche einem Stück der Krummen Flächen beizulegen ist, den Inhalt des entsprechenden Stücks der Kugelfläche zu gebranchen »*.

I punti salienti della teoria della curvatura secondo GAUSS sono precisamente il significato geometrico della curvatura totale in un punto come limite del rapporto della corrispondente area sferica all' area superficiale, quando questa si restringe attorno al punto, la sua espressione $K = \frac{1}{r_1 r_2}$, e sopratutto la sua invarianza per le deformazioni della superficie. Per l' evoluzione storica dei concetti vale la pena di seguire quale è stato lo sviluppo successivo delle idee di GAUSS. Nelle *Disquisitiones* compare una dimostrazione definitiva dell' invarianza per flessioni, fondata sul calcolo della curvatura a partire dalla forma più generale dell' elemento lineare [1] in coordinate curvilinee qualunque; ma questa dimostrazione è venuta soltanto in un secondo tempo, ed è costata a GAUSS molta fatica. Inizialmente, secondo la ricostruzione fatta dallo STÄCKEL, GAUSS era partito dal teorema di LEGENDRE sui piccoli triangoli sferici: un piccolo triangolo sferico *ABC* si

---

[1] Il ds^2 di una superficie, che acquista una particolare importanza con GAUSS, era già stato sostanzialmente usato p. es. da EULERO nella sua ricerca, già da noi ricordata, delle superficie applicabili sul piano: in essa si ricorre appunto all' eguaglianza del ds^2 per quelle superficie e per il piano. Come è notissimo, GAUSS ha poi introdotto anche i coefficienti della seconda forma fondamentale; e, dopo che MAINARDI e CODAZZI hanno completato lo studio delle relazioni che intercedono fra essi e i coefficienti della prima forma, l' importanza fondamentale del sistema delle due forme quadratiche è stato posto in piena luce da BONNET.

può sostituire in un certo ordine di approssimazione con un triangolo piano avente gli stessi lati, i cui angoli si ottengono da quelli del triangolo sferico diminuendoli di un terzo dell'eccesso sferico. GAUSS ha cercato qualche cosa di analogo per triangoli geodetici situati su una superficie qualunque, e lo ha trovato: qui però la ripartizione dell'eccesso fra i tre angoli non va più fatta in parti uguali, ma dipende dai valori assunti dalla curvatura totale nei tre vertici. Per gli angoli del triangolo piano $A^* B^* C^*$ con gli stessi lati del triangolo superficiale ABC si hanno i valori approssimati

$$A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2\alpha + \beta + \gamma),$$

ecc., dove α, β, γ sono i valori assunti dalla curvatura totale nei vertici, e σ è l'area del triangolo ABC. Diciamo subito che nelle *Disquisitiones* questo teorema compare invece alla fine; e notiamo anche incidentalmente che ancora nelle *Disquisitiones* accanto al geometra si sente il geodeta, quando subito dopo aver dedotto quella formula, GAUSS assegna i piccoli valori numerici dei termini sottratti, poco meno di cinque secondi per ciascuno, ottenuti nel più grande dei triangoli, *in triangulo maximo inter ea quae annis praecedentibus dimensu sumus*, e cioè fra i punti Hohehagen, Brocken e Inselberg (1).

Tornando allo sviluppo originario delle idee di GAUSS, la ricerca di questa estensione del teorema di LEGENDRE doveva spingere necessariamente GAUSS molti anni prima delle *Disquisitiones* a studiare per un triangolo geodetico su una superficie qualunque l'eccesso della somma dei suoi angoli rispetto a due retti. Quando GAUSS ha trovato che questo eccesso è dato dall'area del triangolo immagine sferica, GAUSS era giunto al teorema classico sulla curvatura totale di un triangolo geodetico. E allora era già geometricamente evidente che l'eccesso e quindi la curvatura totale di un triangolo geodetico è invariante per deformazioni. È bastato fare un passaggio al limite per avere il teorema della invarianza della curvatura totale in un punto. Così dunque GAUSS è giunto a stabilire questa invarianza. Di tutta questa concatenazione di idee non

---

(1) *Disquisitiones*, n. 28.

rimane più nessuna traccia nella redazione definitiva delle *Disquisitiones*; dove invece il calcolo della curvatura totale in un punto è fatto in coordinate generali, e l'estensione del teorema di LEGENDRE, che era il punto di partenza, compare invece come il punto d'arrivo.

In questa forma definitiva è certo molto meno appariscente la genialità del pensiero di GAUSS, quasi nascosta dietro alla poderosa, alla sapiente sistemazione. Anche il BLASCHKE, (1) — che è un conoscitore di gusto — ha scritto relativamente alla teoria delle superficie, come è svolta in GAUSS, che essa è *etwas unnahbar*. Torna alla memoria, salvo il rispetto dovuto a GAUSS, la descrizione della sapiente e togata Gottinga di quegli anni che nei suoi *Reisebilder* ci ha lasciata Enrico Heine, con la sua *grundgelehrte Abhandlung* sui piedi degli antichi e degli elefanti e delle abitatrici di Gottinga; e il dotto di cui egli ci parla, il quale sognava un giardino con le aiuole dove crescevano soltanto dei cartellini con citazioni. Ma in GAUSS c'è un pensiero potente e profondo; e sotto ai cartellini con i nomi nuovi (2) ci sono dei concetti essenziali che resteranno per sempre nella storia della matematica.

Per quanto riguarda la curvatura totate di un pezzo di superficie devo ricordare che GAUSS ha avuto un predecessore in OLINDO RODRIGUES, il quale in una Memoria (3) pubblicata fin dal 1815, più nota perchè contiene quelle formule sulle linee di curvatura che vanno sotto il suo nome, ha anticipato uno dei risultati fondamentali di GAUSS, dimostrando che l'integrale

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1 r_2}$$

---

(1) *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I, 3a « Aufl. », p. 117.

(2) Ricordiamo che qualche anno prima, scrivendo a OLBERS della sua perplessità relativamente allo sviluppo che — nell'opera da lui progettata sull'alta geodesia — era opportuno dare alle sue ricerche generali sulla teoria delle superficie, ricerche che andavano prendendo nelle sue mani uno sviluppo sempre più ampio, GAUSS accenna oltre che ad alcuni argomenti determinati, a « *eine Menge anderer Gegenstände die ich hier nicht anführen kann, weil die Begriffe davon noch nicht gangbar sind, und selbst keine Nahmen dafür existieren* » (GAUSS, *Werke*, Band VIII, p. 398).

(3) *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, « Corresp. sur l'École Polytecnique », 3e vol.

esteso ad un pezzo di superficie coincide con l'area ottenuta da quel pezzo mediante rappresentazione sferica sulla sfera di raggio unitario (¹). Ma l'origine del risultato di RODRIGUES è soltanto casuale: POISSON si era accorto che la variazione di quell'integrale, scritto in coordinate cartesiane, era nulla; e allora aveva invitato RODRIGUES a calcolare l'integrale stesso esteso a un ellissoide. RODRIGUES ha trovato, come oggi per noi è ovvio, il valore 4π; e proprio in questa ricerca ha incontrato il teorema sulla curvatura totale.

Con la considerazione della curvatura totale in un punto si sostituisce un dato numerico singolo alla figura complessa della curvatura. Questa sostituzione non può naturalmente essere completa. Quindi si è formata una copiosa letteratura o per dimostrare che la curvatura totale è effettivamente il numero più importante connesso col concetto geometrico di curvatura, o per dimostrare il contrario, e si è tentato in tanti modi diversi di estendere il concetto numerico di curvatura dalle linee piane alle superficie in modo da ritrovare o la curvatura di GAUSS, o la curvatura media, o ancora altre curvature (²).

(¹) BINET ha subito giustificato geometricamente il risultato in modo intuitivo, osservando che se ds_1, ds_2 sono i due elementi delle linee di curvatura uscenti da un punto della superficie, $ds_1 : r_1$ e $ds_2 : r_2$ sono ovviamente, sulla sfera unitaria, gli elementi di due cerchi massimi, ortogonali, il cui prodotto dà dunque l'elemento d'area della sfera.

(²) Non si è così risolta, nè si poteva risolvere, la questione, quale sia la vera misura che si deve adottare per la curvatura di una superficie; ma si sono ottenuti tanti significati diversi per la curvatura totale, per la curvatura media, ecc. Ricordiamo p. es. il significato che per la curvatura media di una superficie nel punto P ha trovato R. STURM (*Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen*, « Math. Ann. », Bd. XXI, 1883) con un procedimento del tutto simile a quello usato da GAUSS per la sua curvatura totale, ma sostituendo il perimetro di una curva (ottenuta tagliando la superficie con una sferetta di centro P) e quello della sua immagine sferica alle aree che esse racchiudono. Ricordiamo anche il presentarsi della curvatura media (ancora come un'estensione della curvatura di una linea piana) in base alla variazione di un'area, quale appare in una classica formula di BERTRAND (cfr. *Mémoire sur les surfaces isothermes* « Journ. de Math. », t. 9, 1844, e *Mémoire sur la théorie des phènomènes capillaires*, ibid., t. 13, 1848): alla generalizzazione di questo concetto per un'ipersuperficie immersa in uno spazio di RIEMANN ha poi contribuito il nostro SOMIGLIANA (*Intorno ai parametri differenziali*, « Rend. Ist. Lomb. », serie II, vol. XXI, 1889).

Nel primo ordine di idee voglio ricordare un procedimento poco noto, e in parte precedente alle *Disquisitiones*, dovuto a un italiano, CARLO SERENI, (¹) professore alla scuola degli Ingegneri a Roma, la cui idea è essenzialmente questa. Nell'intorno di un punto P di una superficie (supposto per semplicità ellittico) si sostituisce a questa un ellissoide osculatore di centro O, di cui P sia un vertice, e γ l'ellisse sezione col piano diametrale perpendicolare ad OP. Allora per le varie sezioni normali in P i raggi di curvatura sono, a meno di un fattore, i quadrati dei semidiametri ρ dell'ellisse γ: un'immagine numerica di questo insieme di raggi di curvatura è data dall'insieme dei valori di ρ^2, cioè dall'area dell'ellisse, che a meno di un fattore è proprio il prodotto dei semiassi dell'ellisse, cioè $r_1 r_2$. Si ritrova così la curvatura di GAUSS.

Nel secondo ordine di idee è particolarmente noto che SOFIA GERMAIN ha invece insistito sull'opportunità di considerare come carattere numerico saliente la curvatura media

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$

che, senza portare ancora un nome, era già comparsa ripetutamente nella matematica pura e applicata; p. es. per caratterizzare col suo annullarsi identico le superficie d'area minima, o in relazione colla teoria della capillarità. L'idea saliente di SOFIA GERMAIN dal punto di vista geometrico, quale risulta dalla Memoria alquanto verbosa pubblicata dall'autrice nel 1831, (²) è questa. Per giudicare della maggiore o minor cur-

(¹) *Sulla curvità delle superficie*, « Raccolta Palomba », I, 1845. Ma fin dal 1826 il SERENI aveva pubblicato il *Trattato di geometria descrittiva*, dove si trovano svolte, per quanto in modo poco chiaro e poco soddisfacente, varie considerazioni inerenti alla curvatura delle superficie; in particolare vi si parla (§ 346 e sgg.) di una sfera che ha « *il contatto più intimo* » e di una che ha « *la maggior conformità di curvezza* ». La prima « *è quella del massimo avvicinamento assoluto, cioè quella in cui la somma di tutte le curvature parziali si accosta alla somma di tutte le parziali curvature della superficie, più che in qualsiasi altra sfera* », e per questa si trova che ha il raggio medio proporzionale fra r_1 e r_2; la seconda è la sfera che « *nella direzione del massimo allontanamento si discosta dalla superficie meno di tutte le altre* », (*i* punti iperbolici sono considerati a parte).

(²) *Mémoire sur la courbure des surfaces*, « Journ. für Math. », Bd. 7.

vatura di una linea piana nel punto P, basta osservare se, riportato su questa un archetto PQ di data lunghezza, la *linea di distanza*, cioè la distanza QQ' di Q dalla tangente in P, è più o meno lunga. Per una superficie portiamo su tutte le linee sue sezioni normali in P degli archetti PQ aventi una stessa lunghezza ottenendo così una linea (Q). Abbassando da ogni posizione di Q la perpendicolare QQ' sul piano tangente in P avremo infinite *linee di distanza* QQ' tracciate su una superficie cilindrica. L'analogo di quello che era prima la distanza QQ' è ora la superficie (cilindrica) formata da tutti gli attuali segmenti QQ'; è quindi naturale di misurare la curvatura della superficie in P in dipendenza dall'area della superficie cilindrica considerata. La misura così ottenuta della curvatura risulta appunto la curvatura media.

È stato più volte rilevato l'inconveniente che la curvatura totale si annulla già per tutte le superficie sviluppabili, che pure non sono superficie piane; cosicchè sarebbe meglio adottare per la curvatura una misura tale, che essa, per una superficie non piana, risulti sempre diversa da zero. È quello che ha fatto in un lavoro, passato quasi inosservato, un rumeno, E. BACALOGLO [1], che ha modificato il procedimento di GAUSS della rappresentazione sferica in un piccolo particolare, e cioè l'ha applicato alla linea (Q) che abbiamo usata un momento fa, considerando però le normali nei punti Q non alla superficie, ma alle sezioni (normali). Molti anni dopo (1889) si è proposto uno scopo analogo FELICE CASORATI: il titolo della seconda Memoria da lui pubblicata « *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune* » [2] esprime già l'idea dell'Autore: il metodo usato da GAUSS per misurare la curvatura, per quanto sembri « *avoir satisfait la pluspart des mathéma-*

---

(1) *Über die Krümmung der Flächen*, « Zeitschrift f. Math. u. Phys. », Bd. 4, 1859, p. 312. In quanto segue modifichiamo un po' la breve esposizione di BACALOGLO, come è necessario fare per darle un significato, che nel testo originale manca, certamente per svista dell'A. La misura della curvatura di BACALOGLO risulta

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2.$$

(2) Acta Mat. XIV; v. anche *Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss*, « Rend. Ist. Lomb. » (2), XXII.

ticiens, jusqu' à présent ne saurait satisfaire les hommes en général; car elle ne s' accorde pas avec l' idée que tout homme, ayant ou non des connaisances spéciales de mathématiques, conçoit d' une manière plus ou moins vague ». Secondo CASORATI la definizione di GAUSS è nata sotto l'influenza della concezione della superficie come velo flessibile, e quindi già pregiudicata dalla condizione di dover rimanere invariata per flessioni: altrimenti, secondo CASORATI, GAUSS avrebbe misurata la curvatura in un modo diverso. Si ottiene la curvatura di CASORATI se su ognuno degli archetti PQ segnamo anche un punto R in modo che l'arco PR misuri l'angolo delle normali in P e Q. Facciamo allora il rapporto fra l'area racchiusa dentro (R) e quella racchiusa dentro (P) — rapporto che effettivamente generalizza quello mediante il quale si definisce la curvatura di una linea —: si ottiene così la curvatura di CASORATI, per la quale risulta il valore

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right).$$

Lo scopo di CASORATI è raggiunto; ma a prezzo di un inconveniente che CASORATI non ha rilevato: è vero che soltanto più per i piani la curvatura risulta nulla dappertutto: ma in compenso, non comparendo nella formula che i quadrati di r_1 e r_2, la natura ellittica o iperbolica del punto — che pure tanto influisce sulla nostra nozione di curvatura — scompare completamente dalla formula.

Il problema particolare il cui sviluppo ha interferito più profondamente con la teoria delle superficie durante il periodo delle origini è stato senza dubbio quello delle linee geodetiche — che chiameremo senz'altro così in modo un pò anacronistico —. Il problema è stato posto da GIOVANNI BERNOULLI, quasi agli albori del calcolo delle variazioni, per le superficie di rotazione. Il fratello GIACOMO ha risoluto il problema, con risultato esatto ma pare con metodo sbagliato. Comunque GIOVANNI BERNOULLI, forse spiacente del successo di GIACOMO, lo ripropose per le superficie in generale. GIOVANNI BERNOULLI, come ho già ricordato, fin da quel tempo conosceva la proprietà geometrica fondamentale delle geodetiche, che i loro piani osculatori sono normali alla superficie. Quanto al modo in cui egli è venuto in possesso di questa proprietà geometrica fondamentale, pare che egli l'avesse dedotta dalla realizzazione della geodetica come filo teso fra due punti di una superficie materiale, dove per l'equilibrio del filo deve appunto il piano osculatore risultare normale alla superficie. Ma il passaggio da questa proprietà geometrica all'equazione differenziale delle geodetiche doveva dare luogo a difficoltà notevoli quando non era ancora ben chiaro il concetto dell'equazione di una superficie, come ho detto fin da principio. L'equazione differenziale delle geodetiche insieme con l'equazione della superficie si trova soltanto in una Memoria di EULERO del 1728 (¹), ma senza riferimento a quella proprietà geometrica. Il calcolo diretto fatto da EULERO è fondato su questa idea, diffusa fin dagli inizi del calcolo delle variazioni: se G e H sono due punti della superficie, infinitamente vicini fra loro, situati su una geodetica, e M deve essere un punto intermedio, la spezzata $GM + MH$ (sostituita all'arco GMH) deve essere la più breve possibile. Rappresentando convenientemente le differenze fra le coordinate di quei punti mediante differenziali primi e secondi, ne nasce un'equazione del secondo ordine, che è quella richiesta.

Quanto alla proprietà relativa al piano osculatore (che era nota a EULERO perchè gliela aveva comunicata privatamente GIOVANNI BERNOULLI, ma allora ancora inedita) essa è stata dimostrata da EULERO soltanto più tardi, nella sua *Meccanica* (1736), e con una considerazione indiretta: studiando la traiettoria di un punto non soggetto a forze, obbligato a rimanere su una superficie data, EULERO ha trovato, con un ragionamento infinitesimale, che il piano osculatore a questa traiettoria è ovunque normale alla superficie. Partendo da questa proprietà, egli ha allora scritta la condizione perchè una curva di una superficie si comporti in questo modo, ed ha ritrovato proprio tale e quale la sua equazione differenziale delle geodetiche di otto anni prima. È stata questa la prima dimostrazione pubblicata del teorema di BERNOULLI: come si vede, essa è alquanto indiretta.

Ma in quel tempo è stata diffusa un'altra idea che mi pare

(¹) *De linea brevissima in superficie quacumque duo quaelibet puncta jungente*, « Comm. Ac. Petrop. » (pubblicato nel 1732).

dia ragione nel modo più intuitivo di questo teorema. Sono di quell'epoca le celebri misurazioni degli archi di meridiano in Lapponia ed al Perù, per risolvere la dibattuta questione se l'ellissoide terrestre fosse allungato ai poli, come pareva risultare da misure precedenti, o piuttosto schiacciato; e risale a quello stesso periodo il tracciamento della perpendicolare al meridiano di Parigi eseguito da CASSINI [1] per la costruzione della carta della Francia. A questo insieme di ricerche ha partecipato in vari modi CLAIRAUT, sia prendendo parte direttamente alle misurazioni eseguite in Lapponia, sia più tardi mediante la sua *Théorie de la forme de la terre tirée des principes de l'hydrostatique*, sia anche, come dirò subito, con un'osservazione fondamentale a proposito della perpendicolare al meridiano che era stata tracciata da CASSINI. Ma CLAIRAUT, era un uomo eclettico, nella sua attività scientifica non meno che in quella privata, dove passava dalle lezioni di geometria impartite alla sapiente amica di Voltaire, la marchesa di Chatelet, al far di conto che egli insegnava a quella sua governante che, come è stato scritto, morendo egli lasciò nella vedovanza. Dunque CASSINI, per il tracciamento di quella perpendicolare, era partito da Parigi nella direzione voluta, e aveva proceduto, come è uso, collocando dei segnali diciamo così allineati, cioè in modo che, per usare le parole di CLAIRAUT, essi fossero « *tous effacés les uns par les autres* ». CLAIRAUT ha osservato che se la terra non è sferica la linea così ottenuta è generalmente una linea sghemba e, ciò che è essenziale, che essa segna effettivamente il cammino minimo, così come avverrebbe se quei segnali fossero collocati in un piano [2].

---

[1] *De la carte de la France et de la perpendiculaire à la méridienne de Paris*, « Hist. Ac. Roy. » 1733 (pubblicato nel 1735). Nello stesso volume è pubblicata la Memoria di CLAIRAUT: *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini, aves plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre*, di cui si dirà fra poco.

[2] La formulazione che ho adottato nel testo per mettere in evidenza nel modo più chiaro l'idea fondamentale rimasta nella scienza dopo il lavoro di CLAIRAUT, è un po' schematica, e si allontana in un particolare dalla realtà storica. CASSINI, come è usuale nei lavori sul terreno, aveva dovuto girare gli ostacoli esistenti lungo la linea da lui misurata (ma, egli scrive « *il semble que rien ne doit paraître impossible à ceux qui sont chargés d'exécuter les ordres du Roy, lorsqu'ils savent que ce qu'ils entre-*

Ora dire che due consecutivi di quei segnali nascondono il terzo vuol dire che per un osservatore disposto lungo il primo di essi supposto uscente da P, cioè ovviamente disposto lungo la verticale per P, il secondo segnale uscente da P_1 nasconde il terzo uscente da P_2, cioè vi è un piano per quella verticale e per P_1 e per P_2: è proprio il teorema geometrico di GIOVANNI BERNOULLI. Ricordo che nello stesso lavoro di CLAIRAUT dove è contenuta questa osservazione si trova poi anche il suo notissimo teorema sulle geodetiche delle superficie di rotazione. Senza poter ormai più seguire gli ulteriori sviluppi concernenti il concetto di geodetica, concetto che — giunto già ben formato nelle mani di GAUSS, gli ha offerto la materia per la parte forse più rilevante delle *Disquisitiones*, — voglio però ricordare qui sopra tutto perchè sono divenute poco note, le ricerche dell'abate VALPERGA DI CALUSO [1] sulle geodetiche dell'ellissoide di rotazione, ricerche concepite con una certa indipendenza, e occasionate, come ha scritto il CALUSO, da certe *chicanes* suscitate dalla misurazione del gradus taurinensis eseguita dal BECCARIA.

Siamo così giunti al termine della nostra rassegna, dove pure abbiamo dovuto lasciare da parte dei concetti importanti. Così non abbiamo potuto occuparci della curvatura geodetica, che avremmo potuto seguire nella sua evoluzione storica dal particolare al generale: il primo passaggio dalle curve piane a quelle sferiche è stato compiuto da EULERO (il cui nome

---

prennent est agréable à Sa Majesté »). A questa circostanza CLAIRAUT sembra attribuire particolare peso, affermando che se la superficie terrestre fosse perfettamente liscia, per tracciare la perpendicolare al meridiano basterebbe piantare dei picchetti come si è detto nel testo « *pourvu que l'on eût mis les deux premiers dans le plan du premier vertical. Mais les inégalités du terrain ne permettant pas ces opérations, si pour prolonger la perpendiculaire dont on a déja un petit côté on prend des points de cette ligne auxquels on rapporte, par des opérations trigonométriques le prolongement de la perpendiculaire, ces opérations qu'on croirait revenir au même que celle des piquets et conserver la ligne dans le plan vertical, la détournent cependant continuellement de ce plan* ».

[1] *De la navigation sur le sphéroide elliptique, ses loxodromies et son plus court chemin*, « Mem. Acc. Torino », t. IV, 1790; *Application des formules du plus court chemin sur le sphéroide elliptique*; ibid. t. V, 1793. Non vi manca anche un cenno, sia pur vago, — per le geodetiche dell'ellissoide rotondo — a quella che diventerà poi la condizione di JACOBI.

troviamo anche qui, almeno come quello di un precursore), mentre MINDING — preceduto da GAUSS — ha considerato una superficie qualunque. Un altro campo importante su cui non abbiamo potuto trattenerci è quello della rappresentazione delle superficie le une sulle altre; campo di ricerche che — al pari di tanti altri di cui ci siamo venuti occupando — è stato aperto esso pure da problemi di matematica applicata, quali sono quelli della cartografia. Particolarmente istruttivo è lo sviluppo della teoria della rappresentazione conforme, attraverso i lavori di LAMBERT, EULERO e LAGRANGE fino alla Memoria di GAUSS, alla quale fu attribuito il premio della Società delle Scienze di Kopenhagen nel 1822. Quando alcuni di questi lavori furono riuniti in un volume della collezione dei classici di OSTWALD, M. CANTOR, dando notizia della pubblicazione [1] osservava che in esse era venuto acquistando un rilievo sempre maggiore l'intervento delle variabili complesse, mentre « *die praktische Aufgabe ist mehr und mehr in den Hintergrund getreten; die theoretische mathematische Auffassung hat sie zurückgedrängt* »: per GAUSS il problema è divenuto già del tutto matematico cosicchè « *es ist fast Zufall, das die Kartographie seine Ergebnisse verwerthen kann; der übergang hat sich vollzogen* ».

Ma il passaggio dal pratico al teorico, dal particolare al generale, dall'utile all'inutile, o per meglio dire a ciò che è attualmente inutile, e sopratutto dal concreto all'astratto, continuerà sempre nell'evoluzione della matematica. E anche senza uscire dall'ultimo argomento che abbiamo accennato, GAUSS pochi anni dopo, pensando già alle più generali rappresentazioni di una superficie su un'altra alle quali si imponga soltanto la continuità (rappresentazioni in cui venivano a compendiarsi, fra le altre, le rappresentazioni conformi, e quelle equivalenti, e quelle provenienti dall'applicabilità della superficie [2]) scriveva [3] « *es mag wohl etwas Anstrengung kosten, sich zu diesem allgemeinen Begriff zu erheben; dann aber fühlt*

---

(1) « Zeitschr. f. Math. und Phys. », « Hist.-lit. Abth », t. 40, 1895.

(2) Per lo sviluppo di questo concetto anteriormente a GAUSS, cfr. STÄCKEL, op. cit., *a*) II.

(3) In una lettera a HANSEN (11 dic. 1825) riprodotta da STÄCKEL *b*), p. 91.

man sich auch wirklich auf einem höhern Standpunkt, wo alles in vergrösserter Klarheit erscheint ».

La parte che ha la matematica nella storia del pensiero è stata paragonata (1) alla parte che nella tragedia di Amleto ha Ofelia: Ofelia è bella, ma è anche un po' folle. Un po' di follia, di questa estrema lontananza dal concreto, è un elemento fatale nello sviluppo delle matematiche: naturalmente deve trattarsi di follia... ragionevole.

ALESSANDRO TERRACINI

(1) A. N. WITHEHEAD, *La science et le monde moderne* (trad. par A. D' IVERY ET P. HOLLAND) Paris, 1930; v. p. 37.