# SUL TETRAEDRO A FACCE EGUALI

Fra i tetraedri particolari sono notevoli quelli che hanno gli spigoli opposti a due a due eguali, e quelli in cui gli spigoli opposti sono a due a due perpendicolari. Nei primi sono fra loro eguali le quattro facce, e quindi le quattro altezze, nei secondi le quattro altezze passano per uno stesso punto. La proprietà, da ultimo menzionata, è dimostrata nel trattato del *Baltzer*, insieme alla sua inversa; altre proprietà del tetraedro in cui le quattro altezze passano per uno stesso punto, sono esposte in una Memoria pubblicata nel 1838 dal Sig. *Michele Reiss*, (*) ed anche in un recente lavoro del Sig. *Gellenthin*. (**)

Nel presente scritto sono esposte alcune proprietà del tetraedro a facce eguali.

## I.

**1.** S'indichino con S, A, B, C i quattro vertici d'un tetraedro, e pongasi:

$$SA = a,\ SB = b,\ SC = c,\quad BC = a_1,\ CA = b_1,\ AB = c_1,$$

$$\text{ang}\, BSC = \alpha,\quad \text{ang}\, CSA = \beta,\quad \text{ang}\, ASB = \gamma,$$

$$\text{area}\, ABC = S_0,\ \text{area}\, SBC = S_1,\ \text{area}\, SCA = S_2,\ \text{area}\, SAB = S_3,$$

$$\text{diedro}\, SA = A,\quad \text{diedro}\, SB = B,\quad \text{diedro}\, SC = C,$$

$$\text{diedro}\, BC = A_1,\ \text{diedro}\, CA = B_1,\ \text{diedro}\, AB = C_1,$$

$$\cos A = \lambda,\quad \cos B = \mu,\quad \cos C = \nu,$$

$$\cos A_1 = \lambda_1,\ \cos B_1 = \mu_1,\quad \cos C_1 = \nu_1.$$

---

(*) *Essai analytique et géometrique*, par Michel Reiss (*Correspondance Mathématique et physique* publiée par A. Quetelet, Bruxelles, 1838).

(**) H. Gellenthin, *Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders* (*Archiv der Mathematik und Physik*, gegründet von I. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe, Leipzig 1885).

Si hanno, com'è noto, le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1 \\ S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu \\ S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda \\ S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda \end{array}\right\} \quad (1)$$

le quali si dimostrano facilmente projettando ciascun vertice sul piano della faccia opposta, ed applicando il teoréma sul rapporto dell'area d'un triangolo a quella della sua projezione.

Moltiplicando queste quattro equazioni ordinatamente per $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, poi dalla somma di due delle risultanti togliendo la somma delle altre due, si ottengono le:

$$\left.\begin{array}{l} S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda \\ S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu \\ S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu \end{array}\right\} \quad (2)$$

che sono relazioni fra le aree delle quattro facce e i coseni di due diedri opposti.

2. È noto che la funzione:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

è sempre positiva, e che, indicando con V il volume del tetraedro, si ha:

$$36V^2 = a^2b^2c^2 \,\mathrm{sen}^2\beta \,\mathrm{sen}^2\gamma \,\mathrm{sen}^2 A$$
$$= a^2b^2c^2M,$$

ed anche

$$144V^2 = 4Ma^2b^2c^2 = a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)+b^2b_1^2(a^2+a_1^2+c^2+c_1^2-b^2-b_1^2)+$$
$$+c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)-(a^2c^2b_1^2+b^2a^2c_1^2+c^2b^2a_1^2+a_1^2b_1^2c_1^2) \quad (*)$$

Rammento inoltre che, indicando con R il raggio della sfera circoscritta al tetraedro, si ha:

$$576V^2R^2 = (aa_1+bb_1+cc_1)(bb_1+cc_1-aa_1)(cc_1+aa_1-bb_1)(aa_1+bb_1-cc_1).$$

(*) Eguagliando a zero quest'espressione si ottiene la nota relazione fra le distanze di quattro punti d'un piano.

## II.

3. **Se un tetraedro ha gli spigoli opposti a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

L'eguaglianza dei quattro triangoli SAB, SBC, SCA, ABC è un'immediata conseguenza dell'ipotesi: $a = a_1$, $b = b_1$ $c = c_1$.

Dall'eguaglianza dei triangoli SAB, ABC risulta: $a = a_1$, $b = b_1$; oppure: $a = b_1$; $b = a_1$. Nel secondo caso i triangoli SAC, SBC sarebbero isosceli, e dalla loro eguaglianza risulterebbe ancora: $a = a_1$, $b = b_1$. Perciò l'eguaglianza delle quattro facce implica quella degli spigoli opposti.

4. **Se i diedri opposti di un tetraedro sono a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

Poichè i diedri SA, AC sono rispettivamente eguali ai diedri BC, SB, e il diedro AB è comune ai due triedri di vertici A e B, gli angoli SAB, SBA saranno rispettivamente eguali agli angoli ABC, CAB; e in conseguenza saranno eguali i due triangoli SAB, ABC. Similmente si dimostrerà l'eguaglianza degli altri triangoli.

Suppongasi ora che sieno fra loro eguali le quattro facce, e quindi (3) gli spigoli opposti. Dai triedri di vertici A e B si ricaverà l'eguaglianza dei diedri SA, BC, e dei diedri AC, SB; e similmente dai triedri di vertici B e C si ricaverà l'eguaglianza dei diedri AB, SC.

5. **Se un tetraedro ha le facce eguali, queste devono essere triangoli acutangoli; e reciprocamente, dato un triangolo acutangolo, si può sempre costruire un tetraedro colle quattro facce ad esso eguali.**

Se le quattro facce sono eguali, i tre angoli del triangolo ABC sono rispettivamente eguali ai tre angoli del triedro S, epperciò ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Ora sia dato un triangolo acutangolo ABC. Poichè la somma di due dei tre angoli BAC, CBA, ACB è maggiore del terzo, e la somma di tutti e tre è minore di 360°, si potrà costruire un triedro S $(A'B'C')$ coi tre angoli $B'SC'$, $C'SA'$, $A'SB'$ rispettivamente eguali agli angoli BAC, CBA, ACB; poi, presi sugli spigoli i segmenti $SA'=BC$, $SB'=CA$, $SC'=AB$, è chiaro che risulterà $B'C'=BC$, $C'A'=CA$, $A'B'=AB$, e che in conseguenza il tetraedro $SA'B'C'$ avrà le quattro facce eguali al triangolo ABC.

6. **Se le quattro facce d'un tetraedro sono equivalenti esse devono essere eguali.**

Dalle equazioni:

$$S_0^2+S_1^2-2S_0S_1\lambda_1=S_2^2+S_3^2-2S_2S_3\lambda$$
$$S_0^2+S_2^2-2S_0S_2\mu_1=S_1^2+S_3^2-2S_1S_3\mu$$
$$S_0^2+S_3^2-2S_0S_3\nu_1=S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\nu$$

dimostrate al N. 1, posto:

$$S_0=S_1=S_2=S_3,$$

si ricava:

$$\lambda_1=\lambda,\ \mu_1=\mu,\ \nu_1=\nu,$$

le quali provano l'eguaglianza dei diedri opposti, e quindi (4) il teorema enunciato.

7. **Nel tetraedro a facce eguali la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia, è, per ciascuna faccia, eguale all'unità.**

Questa proposizione risulta immediatamente dalle equazioni (1) del N. 1, quando vi si ponga:

$$S_0=S_1=S_2=S_3.$$

8. **Se la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia d'un tetraedro è, per tre facce di esso, eguale all'unità, il tetraedro ha le quattro facce eguali.**

Infatti dalle:

$$\lambda_1 + \mu + \nu = 1 \,,$$
$$\mu_1 + \nu + \lambda = 1 \,,$$
$$\nu_1 + \lambda + \mu = 1 \,,$$

che si suppongono verificate, e dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu \,,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda \,,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda \,,$$

si ricava:

$$-(S_1 - S_0) + (S_2 - S_0)\nu + (S_3 - S_0)\mu = 0 \,,$$
$$(S_1 - S_0)\nu - (S_2 - S_0) + (S_3 - S_0)\lambda = 0 \,,$$
$$(S_1 - S_0)\mu + (S_2 - S_0)\lambda - (S_3 - S_0) = 0 \,,$$

le quali equazioni richiedono che sia

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3 \,,$$

poichè il determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu & \mu \\ \nu & -1 & \lambda \\ \mu & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu$$

è diverso da zero. (*)

(*) Infatti nel triedro S(ABC) si ha:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}\right)^2$$
$$= \frac{1 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}{\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C}$$

**9. Se la somma degli angoli piani d'un triedro è eguale a 180°, la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità; e reciprocamente.**

Indicati con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i tre angoli piani, e con A, B, C i diedri rispettivamente opposti, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma\operatorname{sen}\alpha$$
$$-\cos\gamma\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma,$$

ossia

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)+\operatorname{sen}(2\gamma)-$$
$$-2\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)-4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$$

e questa, con facili trasformazioni, diviene:

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$=2\left\{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\gamma\right\}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\right\}$$
$$=8\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right).$$

Dall'eguaglianza ora dimostrata risulta che nell'ipotesi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°,$$

dev'essere:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1.$$

E dalla stessa eguaglianza risulta pure che, se la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità, si deve annullare il coseno che sta al secondo membro, e in conseguenza la somma dei tre angoli piani dev'essere eguale a 180.°

**10. Se la somma dei tre angoli piani è eguale a 180° in tre triedri d'un tetraedro, questo ha le quattro facce fra loro eguali.**

Se la somma degli angoli piani è eguale a 180° in ciascuno dei triedri A, B, C, si ha, pel teorema precedente:

$$\lambda+\mu_1+\nu_1=1\,,\quad \mu+\lambda_1+\nu_1=1\,,\quad \nu+\lambda_1+\mu_1=1\,,$$

nediante le quali si possono eliminare $\lambda$, $\mu$, $\nu$ dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu \,,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda \,,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda.$$

ffettuata quest'eliminazione, e avuto riguardo alla:

$$S_0 = S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1 \,,$$

otteugono le:

$$(S_0 + S_2 - S_1 - S_3)\lambda_1 = S_0 + S_1 - S_2 - S_3 \,,$$
$$(S_0 + S_2 - S_3 - S_1)\mu_1 = S_0 + S_2 - S_3 - S_1 \,,$$
$$(S_0 + S_3 - S_1 - S_2)\nu_1 = S_0 + S_3 - S_1 - S_2 \,,$$

alle quali risulta:

$$+ S_1 - S_2 - S_3 = 0, \quad S_0 + S_2 - S_3 - S_1 = 0, \quad S_0 + S_3 - S_1 - S_2 = 0,$$

ssia:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3 \,,$$

quali provano (6) il teorema enunciato.

1. **Se i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, le facce stesse devono essere fra loro eguali.**

Indicati con $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, gli angoli BAC, CBA, ACB del iangolo ABC, si avrà, per l'ipotesi fatta,

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha_1 \,, \quad \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta_1 \,, \quad \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\gamma_1 \,,$$

quindi:

$$\cos\alpha = h\cos\alpha_1 \,, \quad \cos\beta = k\cos\beta_1 \,, \quad \cos\gamma = l\cos\gamma_1 \,,$$

endo $h$, $k$, $l$ eguali ad 1 od a $-1$.

Perciò sarà:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 + 2hkl\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1 \,,$$

ossia:

$$M = 2(1 + hkl)\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1,$$

dalla quale risulta che il prodotto $hkl$ non può essere eguale a $-1$, e che, in conseguenza, la quantità positiva M è eguale al quadruplo prodotto dei coseni dei tre angoli del triangolo ABC; epperciò è chiaro che questi tre angoli devono essere acuti.

Similmente si dimostrerà che ciascuno degli altri tre triangoli è acutangolo, e che, in conseguenza, la somma dei tre angoli piani, in ciascuno dei quattro triedri, è eguale alla somma dei tre angoli della faccia opposta; e, in forza del teorema precedente, si conchiuderà quello che ora si trattava di dimostrare.

12. **Nel tetraedro a facce eguali il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta coincidono in uno stesso punto.**

Indicati con A′, B′, C′, S′ i centri di gravità delle facce rispettivamente opposte ai vertici A, B, C, S, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{SS'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\\
\overline{AA'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b_1^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b^2 + c^2)\\
\overline{BB'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b_1^2 + c^2)\\
\overline{CC'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c_1^2)
\end{aligned}\right\} (\alpha)$$

dalle quali risulta che, se gli spigoli opposti sono a due a due eguali, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, e che, in conseguenza, il centro di gravità del tetraedro è equidistante dai quattro vertici. Inoltre la distanza del centro di gravità da una faccia è un quarto dell'altezza corrispondente a quella faccia, epperciò, essendo eguali le quattro altezze, il centro di gravità sarà equidistante dalle quattro facce.

**13.** **Se in un tetraedro coincidono due dei tre punti: il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta, quel tetraedro ha le facce eguali.**

1) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, epperciò, dalle formole ($\alpha$) del N°. precedente, risulta:

$$b_1^2 - b^2 = c^2 - c_1^2\,,$$
$$c_1^2 - c^2 = a^2 - a_1^2\,,$$
$$a_1^2 - a^2 = b^2 - b_1^2\,,$$

e in conseguenza:

$$a = a_1\,, \quad b = b_1\,, \quad c = c_1\,.$$

2) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera inscritta, devono essere fra loro eguali le quattro altezze; epperciò equivalenti, e quindi eguali (6), le quattro facce.

3) Se il centro della sfera inscritta coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce, epperciò (11) le facce stesse.

**14.** **Espressioni del volume del tetraedro a facce eguali e del raggio della sfera circoscritta.**

L'espressione dei volume del tetraedro in funzione degli spigoli, rammentata al N. 1, diviene, quando gli spigoli opposti sono eguali,

$$144V^2 = 2a^4(b^2+c^2-a^2) + 2b^4(c^2+a^2-b^2) + 2c^4(a^2+b^2-c^2) - 4a^2b^2c^2\,,$$

od anche:

$$72V^2 = (b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)\,(a^2+b^2-c^2).$$

Dalla formola pel raggio della sfera circoscritta, citata nello stesso numero si ha:

$$576V^2R^2 = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

e questa, in forza della precedente, diviene:

$$8R^2 = a^2+b^2+c^2,$$

la quale si può ricavare eziandio dalle formole $(\alpha)$ del N. 12.

15. Se in un tetraedro la somma dei quadrati di due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati di altri due spigoli opposti, il quinto ed il sesto spigolo sono fra loro perpendicolari; e reciprocamente, se due spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, la somma dei quadrati di altri due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati della terza coppia di spigoli opposti. (*)

Guidata dal vertice S la SL parallela alla BC e dalla banda opposta di questa rispetto allo spigolo SC, e indicato con $(aa_1)$ l'angolo LSA, si ha, dal triedro S (ACL):

$$\cos(aa_1) = \cos\beta\cos(\mathrm{LSC}) - \mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}(\mathrm{LSC})\cos\mathrm{C}$$

$$= \cos\beta\cos(\mathrm{SCB}) - \mathrm{sen}(\mathrm{SCB})\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\mathrm{sen}\alpha},$$

ma dal triangolo SCA risulta:

$$\cos(\mathrm{SCB}) = \frac{c-b\cos\alpha}{a_1},\qquad \mathrm{sen}(\mathrm{SCB}) = \frac{b}{a_1}\mathrm{sen}\alpha,$$

epperciò sarà:

$$\cos(aa_1) = \frac{c\cos\beta-b\cos\gamma}{a_1},$$

ossia:

$$\cos(aa_1) = \frac{c^2+c_1^2-(b^2+b_1^2)}{2aa_1},$$

dalla quale si ricavano subito i teoremi enunciati.

(*) Questo teorema si trova, altrimenti dimostrato, nella citata Memoria del Reiss.

**16. Nel tetraedro a facce eguali ciascuno dei segmenti che uniscono i punti di mezzo di due spigoli opposti è perpendicolare a questi due spigoli.**

Infatti, indicati con $L, M, N, L_1, M_1, N_1$ i punti di mezzo degli spigoli $SA$, $SB$, $SC$, $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$, i segmenti $SL_1$, $AL_1$ saranno fra loro eguali, per l'eguaglianza dei triangoli $SBC$, $ABC$, epperciò la $LL_1$ sarà perpendicolare alla $SA$; e così dall'eguaglianza dei triangoli $SAB$, $SAC$, e quindi delle $LB$, $LC$, risulta che la $LL_1$ è perpendicolare alla $BC$. Nell'istesso modo si proverà che la $MM_1$ è perpendicolare agli spigoli opposti $SB$, $AC$, e che la $NN_1$ è perpendicolare agli spigoli opposti $SC$, $AB$.

**17. Se due delle congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti d'un tetraedro sono rispettivamente perpendicolari a quelle due coppie, il tetraedro ha le facce eguali.**

Nell'ipotesi che la $LL_1$ sia perpendicolare agli spigoli $SA$, $BC$, e che la $MM_1$ sia perpendicolare agli spigoli $SB$, $AC$, si hanno le eguaglianze:

$$L_1A = L_1S, \quad LB = LC, \quad M_1B = M_1S, \quad MC = MA,$$

ossia le:

$$b^2 + c^2 = b_1^2 + c_1^2, \qquad a^2 + c^2 = a_1^2 + c_1^2$$
$$b^2 + c_1^2 = b_1^2 + c^2, \qquad a^2 + c_1^2 = a_1^2 + c^2,$$

dalle quali si ricava:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1$$

**18. Se le altezze d'un tetraedro a facce eguali passano per uno stesso punto, quel tetraedro è regolare.**

Infatti se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, gli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, e in conseguenza (15), hanno luogo le eguaglianze:

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

le quali, nell'ipotesi fatta, devono sussistere insieme alle:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1;$$

epperciò sarà:

$$a = b = c = a_1 = b_1 = c_1.$$

19. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro di gravità, o pel centro della sfera circoscritta, quel tetraedro è regolare.**

Nella citata Memoria del Sig. Michele Reiss è dimostrato che, se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, questo punto, e il centro della sfera circoscritta, sono gli estremi d'un segmento il cui punto di mezzo è il centro di gravità del tetraedro. Perciò, nell'una e nell'altra ipotesi, il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, e dai teoremi dei N. 13, 18, si conchiude che il tetraedro dev'essere regolare.

20. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro della sfera inscritta, quel tetraedro è regolare.**

Indicati con A', B', C', S' i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici A, B, C, S sulle facce rispettivamente opposte, e con O il centro della sfera inscritta, si avrà, per ipotesi:

$$OA' = OB' = OC' = OS'.$$

Perciò, se con H s'indica il punto in cui il piano delle AA', SS' incontra lo spigolo BC, le altezze AA', SS' del triangolo SAH, s'incontrano in un punto O equidistante dai lati SH, AH, e in conseguenza saranno eguali questi due lati SH, AH, i quali sono le altezze dei triangoli SBC, ABC, corrispondenti al loro lato comune BC. Di qui risulta l'equivalenza dei due triangoli SBC, ABC; e così si proverà che le quattro facce del tetraedro sono equivalenti, e dai teoremi dei N. 6 e 18 si conchiuderà che il tetraedro è regolare.

D. Besso.