# LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA [1]

**1.** Debbo oggi intrattenervi sulle definizioni generali nelle matematiche; così almeno dice il programma, ma non mi sarà possibile limitarmi a questo argomento, quanto esigerebbe la regola dell'unità di azione; non potrò trattarlo senza parlare un poco su altre questioni vicine, e se sarò quindi costretto a camminare di tanto in tanto sui sentieri di destra e di sinistra, vi prego di volermi accordare la vostra indulgenza.

Che cos'è una buona definizione? Pel filosofo, o per lo scienziato, è una definizione che si applica a tutti gli oggetti definiti e ad essi soli; è quella che soddisfa le regole della logica. Nell'insegnamento però, non si tratta di questo; una buona definizione è quella che vien compresa dagli scolari.

Perchè avviene che tante intelligenze ricusino di comprendere le matematiche? Non vi è in ciò alcunchè di paradossale? Ecco una scienza che fa appello ai soli principî fondamentali della logica, al principio di contraddizione, per esempio, a ciò che forma per così dire lo scheletro del nostro intendimento, a ciò di cui non potremmo spogliarci senza cessare di pensare, e si trovano persone che la dicono oscura! e sono anche in maggioranza! Che essi sieno incapaci d'inventare, passi; ma che essi non comprendano le dimostrazioni che vengono loro esposte, che essi restino ciechi, quando noi presentiamo loro una luce che ci sembra brillare d'un puro splendore, è una cosa che ha assolutamente del prodigioso.

Eppure non occorre essere molto pratici di esami per sapere come quei ciechi non sono affatto esseri eccezionali! Ecco un problema di non facile soluzione, ma che deve preoccupare tutti coloro che vogliono darsi all'insegnamento.

---

(1) Questa conferenza, letta al Museo pedagogico di Parigi nella primavera del 1904, fu pubblicata nell'ottima rivista *L'enseignement mathématique* del luglio 1904. Le considerazioni acutissime e profonde svolte dall'illustre autore sull'insegnamento della matematica, interessano i professori italiani non meno di quelli francesi, e siamo certi che i lettori del *Periodico* saranno al pari del sottoscritto, riconoscenti all'illustre prof. Poincaré ed ai direttori dell'*Enseignement mathématique* proff. Laisant e Fehr di avere gentilmente accordato il permesso di pubblicare una traduzione dell'articolo in questo giornale.

(*Nota di* G. LAZZERI.)

Che significa capire? Questa parola ha lo stesso significato per tutti? Comprendere la dimostrazione di un teorema, vuol forse dire esaminare successivamente tutti i sillogismi di cui si compone e constatare che è corretto, conforme alle regole del giuoco? Ed anche capire una definizione, significa semplicemente riconoscere di sapere già il senso di tutti i termini adoperati e constatare ch'esso non implica contraddizione di sorta?

Sì, per alcuni i quali, dopo fatta tale constatazione, diranno: ho capito. No, per la massima parte. Quasi tutti sono molto più esigenti, vogliono sapere, non solo se tutti i sillogismi di una dimostrazione sono corretti, ma perchè si incatenano in un certo ordine, piuttosto che in un altro. Finchè sembrano loro generati dal capriccio, e non da un'intelligenza costantemente conscia dello scopo da raggiungere non credono aver compreso.

Certo non si rendono bene conto essi stessi di ciò che vogliono, e non saprebbero formulare il loro desiderio, ma se non restano soddisfatti, sentono che qualche cosa manca loro. Allora che avviene? Sul principio scorgono ancora le evidenze che si mettono loro sott'occhio; ma poichè queste non si collegano che per un filo troppo sottile alle precedenti ed alle seguenti, passano dal loro cervello senza lasciarvi traccia, vengono tosto dimenticate, e dopo aver brillato un istante, ricadono subito in una notte eterna. Quando saranno più innanzi, non scorgeranno più neppure quella effimera luce, poichè i teoremi si appoggiano gli uni sugli altri e quelli che occorrerebbero sono già dimenticati; è così che divengono incapaci a comprendere le matematiche.

Non è sempre colpa del loro professore; spesso la loro intelligenza, cui occorre scorgere il filo conduttore, è troppo pigra per cercarlo e per trovarlo. Ma per venir loro in aiuto, occorre prima comprender bene che cosa li trattiene.

Altri si domanderanno sempre: a che cosa ciò è utile; non intenderanno se non si troveranno intorno, in pratica od in natura, la ragione d'essere di tale o tal'altra nozione matematica. Sotto ogni parola, vogliono mettere un'imagine sensibile; occorre che la definizione evochi tale imagine, che ad ogni stadio della dimostrazione la vedano trasformarsi ed evolversi. A questa sola condizione, comprenderanno e ricorderanno. Costoro si illudono spesso da loro stessi; non ascoltano i ragionamenti, guardano le figure; credono aver compreso ed hanno solo veduto.

**2.** Quante tendenze diverse! Occorre combatterle? Occorre utilizzarle? E volendo combatterle, quale bisognerebbe favorire? A coloro che si contentano della pura logica si deve dimostrare che hanno visto le cose sotto un unico aspetto? Oppure a coloro che non restano tanto facilmente soddisfatti si deve dire che ciò che chiedono non è necessario?

In altre parole, dobbiamo obbligare i giovani a mutare l'indole dell'intelligenza loro? Un simile tentativo sarebbe inutile; non possediamo la pietra filosofale che ci permetterebbe di cambiare gli uni negli altri i metalli preziosi confidatici; la sola cosa che possiamo fare è di lavorarli adattandoci alle loro proprietà.

Molti fanciulli, ai quali pure bisogna insegnare le matematiche, sono incapaci di divenir matematici; ed i matematici stessi non sono tutti plasmati nello stampo medesimo. Basta leggerne le opere per distinguerli in due diverse qualità d'intelligenze, quelle dei logici come per esempio Weierstrass, e degli intuitivi come Riemann. La differenza è uguale tra i nostri allievi. Gli uni preferiscono risolvere i loro problemi *analiticamente*, come essi dicono, gli altri *geometricamente*.

È perfettamente inutile cercar di cambiarvi qualche cosa, e del resto sarebbe ciò desiderabile? È bene vi siano logici ed intuitivi; chi oserebbe decidere se preferirebbe che Weierstrass non avesse mai scritto, oppure che Riemann non fosse esistito? Bisogna quindi rassegnarci alla diversità delle intelligenze, meglio ancora, bisogna rallegrarcene.

**3.** Poichè la parola comprendere ha differenti significati, le definizioni meglio comprese dagli uni non converranno agli altri. Abbiamo quelle che cercano di far nascere un' imagine, e quelle in cui ci si limita a combinare forme vuote, perfettamente intelligibili, ma puramente intelligibili, cui l'astrazione ha tolto ogni materia.

Non so se sia proprio necessario citar degli esempi. Citiamone però, e prima di ogni altro la definizione delle frazioni ci fornirà un esempio estremo. Nelle scuole primarie, per definire una frazione viene tagliata una mela o una torta; viene tagliata mentalmente, s'intende, e non in realtà, perchè non credo che il bilancio dell'istruzione elementare permetta simili prodigalità. Alla scuola normale superiore, invece, o nelle Facoltà, verrà detto: una frazione, è l'insieme di due numeri interi separati da una linea orizzontale: verranno definite convenzionalmente le operazioni che possono subire tali simboli; verrà dimostrato che le regole di queste operazioni sono le stesse che nel calcolo dei numeri interi, e si constaterà finalmente che, facendo secondo tali regole la moltiplicazione della frazione pel denominatore, si ritrova il numeratore. Ciò va benissimo, perchè ci si rivolge a giovani, da lungo tempo famigliarizzati colla cognizione delle frazioni a furia di aver diviso mele ed altri oggetti, e la cui intelligenza raffinata da una forte educazione matematica, è a poco a poco giunta a desiderare una definizione puramente logica. Ma quale sarebbe lo sbalordimento di un principiante cui si volesse servirla?

Di questa specie sono anche le definizioni che trovansi in un libro giustamente ammirato e molte volte premiato, i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert. Vediamo infatti come principia: *Pensiamo tre sistemi di cose che chiameremo punti, rette e piani*. Che sono queste "cose„? non lo sappiamo, e non dobbiamo saperlo; sarebbe anzi dannoso che cercassimo di saperlo; quel che abbiamo diritto di sapere, è quanto ce ne dicono gli assiomi, questo per esempio: *Due punti differenti determinano sempre una retta*, seguito dal commento: *invece di determinano, possiamo dire che la retta passa per questi due punti, o che congiunge questi due punti, o che i due punti sono collocati sulla retta.* Sicchè, " essere collocato sopra una retta „ è semplicemente definito come sinonimo di " determinare una retta „. È questo un libro di cui ho buonissima opinione, ma che non raccomanderei ad uno studente di liceo. Potrei del resto, farlo senza timore, poich'egli non andrebbe troppo oltre colla sua lettura.

Ho preso esempi estremi, e nessun maestro potrebbe pensare di andare così lontano. Ma pur rimanendo bene al di quà di simili modelli, non si espone egli forse allo stesso rischio?

Siamo in una quarta classe; il professore detta: il circolo è il luogo dei punti del piano che si trovano ad ugual distanza da un punto interno chiamato centro. Il buon studente scrive questa frase sul suo quinterno; il cattivo vi disegna delle figurine; ma nè l'uno nè l'altro ha compreso; il professore prende allora il gesso e traccia un cerchio sulla lavagna. " Ah! pensano gli scolari, perchè non lo diceva subito: un circolo è un tondo, avremmo capito „. Certo, ha ragione il professore. La definizione degli allievi non avrebbe avuto valore, poichè non avrebbe potuto servire a dimostrazione alcuna, e specialmente perchè non avrebbe potuto dar loro la salutare abitudine di analizzare i propri concetti. Ma bisognerebbe dimostrar loro che non capiscono ciò che credono capire, condurli a rendersi conto della grossolanità del loro concetto primitivo, a desiderare essi stessi che venga epurato e dirozzato.

**4.** Tornerò su tutti questi esempi: ho solo voluto dimostrarvi i due concetti opposti: esiste fra loro un contrasto violento. Questo contrasto, ci viene spiegato dalla storia della scienza. Se leggiamo un libro scritto cinquant'anni or sono, la massima parte dei ragionamenti che contiene, ci sembrerà sprovvista di rigore.

Si ammetteva a quell'epoca che una funzione continua non potesse cambiar di segno senza annullarsi; attualmente ciò viene dimostrato. Si ammetteva che le regole ordinarie del calcolo fossero applicabili ai numeri incommensurabili; attualmente ciò vien dimostrato. Si ammettevano tante altre cose, che a volte erano false.

Ci si fidava dell'intuizione; ma ormai si è capito ogni giorno meglio del precedente che l'intuizione non può darci il rigore, e neppure la certezza. Essa ci insegna per esempio che ogni curva ha una tangente, cioè che ogni funzione continua ha una derivata, e ciò è falso. E poichè si teneva alla certezza, è bisognato rendere sempre più piccola la parte della intuizione.

Come è avvenuta questa necessaria evoluzione? Non si è tardato ad accorgersi che il rigore non avrebbe potuto stabilirsi nei ragionamenti, se non fosse stato prima introdotto nelle definizioni.

Per molto tempo gli argomenti di cui si occupano i matematici sono stati mal definiti; si credeva conoscerli, perchè venivano rappresentati coi sensi o l'imaginazione; ma non se ne aveva che un'imagine grossolana e non un'idea precisa sulla quale il ragionamento potesse aver presa.

Su ciò i logici hanno dovuto portare i loro sforzi. Lo stesso pel numero incommensurabile.

La vaga idea di continuità, che dobbiamo all'intuizione, si è risoluta in un complicato sistema di ineguaglianze tra numeri interi. Così sono definitivamente svanite tutte quelle difficoltà che spaventavano i padri nostri, allorchè riflettevano ai fondamenti del calcolo infinitesimale.

Ora non rimangono in analisi che numeri interi, o sistemi finiti od infiniti di numeri interi, legati tra loro da un sistema di uguaglianze ed ineguaglianze. Le matematiche, come è stato detto, si sono aritmetizzate.

**5.** Ma si crede forse che le matematiche abbiano raggiunto il rigore assoluto senza far sacrifici? Niente affatto; ciò che hanno acquistato in rigore, l'hanno perduto in obiettività. Hanno dovuto scostarsi dalla realtà per acquistare questa perfetta purezza. Si può percorrere liberamente tutto il loro dominio, altra volta pieno di ostacoli, ma tali ostacoli non sono scomparsi. Sono stati solo trasportati alla frontiera, e bisognerà tornare a vincerli, se si vuol superare tale frontiera per penetrare nel regno della pratica.

Si possedeva una nozione vaga, fatta di elementi disparati, gli uni *a priori,* gli altri frutti di esperienze più o meno digerite; si credeva conoscerne, mediante l'intuizione, le proprietà principali. Oggi gli elementi empirici vengono scartati per non conservare che quelli *a priori;* una delle proprietà serve alla definizione, e tutte l'altre ne vengono dedotte con un ragionamento rigoroso. Va benissimo; ma resta a provarsi che tale proprietà, divenuta definizione, appartiene proprio agli oggetti reali fattici conoscere dall'esperienza, e da' quali avevamo attinta la nostra vaga cognizione intuitiva. Per dimostrarlo, bisognerà ben ricorrere all'esperienza, o fare uno sforzo d'intuizione, e se non si potesse dimostrare, i nostri teoremi sarebbero perfettamente rigorosi, ma perfettamente inutili.

La logica partorisce a volte dei mostri. Da un mezzo secolo si è visto sorgere una folla di funzioni bizzarre, che sembrano fare ogni sforzo per somigliare il meno possibile alle oneste funzioni, buone a qualcosa. Non più continuità, oppure continuità, ma non derivate, ecc. Non basta; sotto l'aspetto logico, queste funzioni strane sono le più generali; quelle che si incontrano senza averle cercate non appariscono più che come un caso particolare. Non rimane loro che un piccolissimo cantuccino.

Altravolta quando inventavasi una nuova funzione, era per qualche scopo pratico; oggi si inventano espressamente per rendere difettose le dimostrazioni dei padri nostri, e non se ne caverà mai altro.

Se la logica fosse l'unica guida del pedagogo, bisognerebbe cominciare dalle funzioni più generali, cioè dalle più bizzarre. Occorrerebbe mettere il principiante alle prese con quel museo teratologico. Se non lo fate, potrebbero dire i logici, non raggiungerete il rigore che a tappe.

**6**. Sì, forse, ma non si può trattare così alla leggiera colla realtà, e non parlo solo della realtà del mondo sensibile, che pure ha il suo valore, poichè i nove decimi de' vostri scolari vi domandano le armi, unicamente per combattere contro di lei. Vi è una realtà più sottile, che forma la vita degli esseri matematici, ed è tutt'altra cosa che la logica.

Il nostro corpo è formato di cellule e le cellule di atomi; tali cellule ed atomi sono dunque tutta la realtà del corpo umano? Il modo nel quale queste cellule sono disposte, e dal quale risulta l'unità dell'individuo non è esso pure una realtà molto più interessante?

Un naturalista che non avesse mai studiato l'elefante altro che al microscopio conoscerebbe abbastanza quest'animale?

Lo stesso è in matematica. Allorchè il logico avrà scomposto ogni dimostrazione in una folla di operazioni elementari, tutte corrette, non possiederà ancora la completa realtà; quel non so che il quale forma l'unità nella dimostrazione gli sfuggirà completamente.

Negli edifici innalzati dai nostri maestri, a che serve ammirare l'opera del muratore se non possiamo comprendere il piano dell'architetto? Ora questa veduta d'insieme, non può venirci data dalla pura logica, e bisogna chiederla all'intuizione.

Prendiamo per esempio l'idea di funzione continua. Non è in principio che una imagine sensibile, un rigo tracciato col gesso sulla lavagna. Poco a poco si epura; si adopera per costruire un sistema completo d'ineguaglianze, che riproduce tutte le linee dell'immagine primitiva; allorchè tutto è terminato, si è tolta l'armatura come dopo la costruzione di una volta; questa rappresentazione grossolana, appoggio ormai inutile, è scomparsa e non è rimasto che l'edificio stesso, irriprovevole all'occhio del logico. Eppure se il professore non richiamasse l'imagine primitiva, se non ristabilisse momentaneamente la centina, come farebbe l'allievo ad indovinare per qual capriccio tutte quelle ineguaglianze si sono sovrapposte in tal modo le une sulle altre? La definizione sarebbe logicamente corretta, ma non gli dimostrerebbe la vera realtà.

7. Eccoci dunque costretti a tornare indietro; è certo penoso per un maestro dovere insegnare ciò che non lo soddisfa pienamente; ma la soddisfazione del maestro non è lo scopo unico dell'insegnamento; occorre prima pensare a ciò che è l'intelligenza dell'allievo ed a ciò che si vuole ch'egli divenga.

Gli zoologi pretendono che lo sviluppo embrionale di un animale riassuma in un tempo brevissimo tutta la storia de' suoi antenati dei tempi geologici. Sembra avvenga lo stesso delle intelligenze. L'educatore deve far ripassare il fanciullo di dove i suoi padri sono passati; più rapidamente, ma senza omettere tappa alcuna. Su questo argomento, la storia della scienza dev'essere la nostra prima guida.

I nostri padri credevano sapere che cosa fosse una frazione, o la continuità, o l'area d'una superficie curva; ma noi ci siamo accorti che non lo sapevano. Così i nostri allievi credono saperlo quando cominciano a studiare seriamente le matematiche. Se, senza altra preparazione io dico loro: " No, non lo sapete; ciò che credete capire, non lo capite; bisogna ch'io vi dimostri ciò che vi sembra evidente "; e se nella dimostrazione mi appoggio su premesse che sembrano loro meno evidenti della conclusione, che penseranno questi infelici? Penseranno che la scienza matematica non sia che un ammasso arbitrario di sottigliezze inutili; oppure se ne disgusteranno, o ci si divertiranno come ad un giuoco, ed arriveranno ad una condizione di spirito simile a quello dei sofisti greci.

Più tardi, invece, quando l'intelligenza dell'allievo, familiarizzata col ragionamento matematico, sarà maturata da questa lunga frequenza, i dubbi nasceranno spontaneamente e la vostra dimostrazione sarà allora la benvenuta. Susciterà ancora dubbi nuovi, e le questioni si presenteranno successivamente al giovanetto, come si presentavano successivamente ai nostri padri, fino a quando il rigore perfetto potrà solo soddisfarlo. Non basta dubitare di tutto, bisogna sapere perchè si dubita.

8. Scopo principale dell'insegnamento matematico è lo sviluppo di certe facoltà dell'intelligenza, fra le quali, l'intuizione non è la meno preziosa. Per mezzo di quest'ultima il mondo matematico rimane a contatto con quello reale, e quand'anche le matematiche pure potessero farne a meno, bisognerebbe pur sempre ricorrervi per colmare l'abisso che separa il simbolo dalla realtà. Al pratico occorrerà sempre, e per ogni geometra puro vi devono essere cento pratici.

L'ingegnere deve ricevere una completa educazione matematica, ma a che cosa deve servirgli? a vedere i varî aspetti delle cose ed a vederli presto; egli non ha tempo di cercare il pel nell'uovo. Bisogna che negli aspetti fisici complessi che gli si presentano, riconosca subito i punti ne' quali potrà servirsi degli istrumenti matematici che gli abbiamo dato. Come potrà farlo, se lasceremo tra gli uni e gli altri quel profondo abisso scavato dai logici?

**9.** Accanto ai futuri ingegneri, altri allievi, meno numerosi, debbono alla loro volta divenire maestri; debbono quindi andare fino al fondo; una cognizione profonda e rigorosa dei principi fondamentali è per loro indispensabile prima di ogni altra. Questa non è però una ragione per non coltivare in essi l'intuizione; poichè si formerebbero una falsa idea della scienza, se non l'osservassero mai che da un lato, e non potrebbero d'altronde sviluppare nei loro scolari una qualità che non possiedono essi stessi.

Anche al geometra puro, questa facoltà è necessaria, poichè colla logica si dimostra, e coll'intuizione si inventa. È bene saper criticare, ma è meglio saper creare. Voi sapete distinguere se una combinazione è corretta; ma ciò non giova a nulla se non possedete l'arte di scegliere fra tutte le combinazioni possibili. La logica ci insegna che su tale o tal'altra strada siamo sicuri di non trovare ostacoli; non però quale è quella che ci conduce allo scopo. Bisogna per ciò vedere lo scopo da lontano, e la facoltà che ci insegna a vedere è l'intuizione. Senza questa il geometra sarebbe simile ad uno scrittore forte in grammatica, ma senza idee. Ora, come si svilupperebbe questa qualità, se appena si mostra si scaccia e proscrive, se si impara a non fidarsene prima di sapere ciò che ha di buono?

E qui, permettetemi di aprire una parentesi per insistere sull'importanza dei compiti scritti. I componimenti scritti non hanno forse assai importanza in certi esami, alla Scuola Politecnica, per esempio. Mi si dice che vieterebbero l'ingresso a buonissimi scolari che sanno benissimo il loro corso, lo capiscono perfettamente, ma sono incapaci di farne la minima applicazione. Ho detto or ora che la parola comprendere ha vari sensi: questi non capiscono che nella prima maniera, ed abbiamo veduto come questo non basti a formare nè un ingegnere, nè un geometra. Ebbene, poichè bisogna fare una scelta, preferisco scegliere coloro che capiscono tutto.

**10.** Ma l'arte di ragionar giusto non è essa pure una qualità preziosa, che il professore di matematiche deve coltivare prima di tutto? Mi guardo bene dal dimenticarlo; bisogna preoccuparsene e fino dal principio. Sarei desolato vedendo degenerare la geometria in non so quale tachimetria di bassa lega, e non sottoscrivo affatto le dottrine estreme di certi *Oberlehrer* tedeschi. Ma si hanno abbastanza occasioni di esercitare gli allievi al ragionamento corretto nelle parti delle matematiche, in cui gl'inconvenienti che ho segnalati non si presentano. Si hanno lunghe concatenazioni di teoremi in cui la logica assoluta ha regnato fino dal principio e, dirò così, naturalmente; in cui i primi geometri ci hanno dato modelli che bisognerà sempre imitare ed ammirare.

Nell'esposizione dei primi principî bisogna evitare troppa sottigliezza, che ivi sarebbe più scoraggiante e del resto inutile. È impossibile dimostrar tutto e definir tutto: ἀνάγκη σθῆναι ha detto Aristotile, e bisognerà sempre prendere in prestito dall'intuizione; non importa farlo un po' prima od un po' dopo, o magari chiederle un po' più o un po' meno, purchè adoperando correttamente le premesse che ci ha fornito, impariamo a ragionare giusto.

II. È possibile soddisfare tante opposte condizioni? È particolarmente possibile quando bisogna dare una definizione? Come trovare un enunciato conciso che soddisfaccia contemporaneamente le regole intransigenti della logica, il nostro desiderio di includere il posto della nuova cognizione nell'insieme della scienza, ed il nostro bisogno di pensare mediante imagini? Generalmente non lo troveremo, ed è perciò che non basta enunciare una definizione; bisogna prepararla e giustificarla.

Che voglio dire con questo? Sapete quel che è stato detto spesso: ogni definizione implica un assioma, poichè afferma l'esistenza di ciò che si definisce. La definizione non sarà quindi giustificata, dal punto di vista puramente logico, che quando sarà stato *dimostrato* che non ne consegue contradizione, nè nei termini, nè colle verità precedentemente ammesse.

Ma non basta; la definizione viene enunciata come una convenzione; ma la massima parte degl'intelletti si ribellerà se vorrete imporgliela come convenzione *arbitraria*. Non avrà pace finchè non avrete risposto a varie domande.

Le definizioni matematiche sono il più spesso, come ha dimostrato il sig. Liard, vere costruzioni edificate in ogni loro parte con nozioni più semplici. Ma perchè avere così riunito questi elementi mentre tante altre combinazioni erano possibili? Per capriccio forse? Altrimenti, perchè questa combinazione avrebbe più diritti all'esistenza di tutte le altre? A qual bisogno rispondeva? Come si è previsto che avrebbe parte importante nello sviluppo della scienza, ed abbrevierebbe i nostri ragionamenti ed i nostri calcoli? Esiste in natura qualche oggetto familiare, che ne sia, direi quasi, l'imagine incerta e grossolana?

Nè basta; se risponderete in modo soddisfacente a tutti questi quesiti, vedremo bene che il neonato aveva diritto al battesimo; ma neanche la scelta del nome è arbitraria; bisogna spiegare da quali analogie si è stati guidati, e che se nomi analoghi sono stati dati a cose differenti, tali cose, almeno, non differiscono che nella materia e si avvicinano nella forma; finalmente che le proprietà loro sono analoghe e per così dire parallele.

A tal prezzo tutte le tendenze potranno essere soddisfatte. Se l'enunciato è assai corretto da poter piacere al logico, la giustificazione contenterà l'intuitivo. Ma c'è da fare ancor meglio: ogni volta che ciò sia possibile, la giustificazione precederà l'enunciato e lo preparerà; si verrà condotti all'enunciato generale dallo studio di alcuni esempi particolari.

Inoltre, ogni parte dell'enunciato di una definizione ha per iscopo di distinguere l'oggetto da definirsi da una classe di altri oggetti vicini. La definizione non sarà compresa, se non quando avrete mostrato, non solo l'oggetto definito, ma quelli vicini da' quali conviene distinguerlo, avrete fatto intendere la differenza ed aggiunto esplicitamente: ecco perchè enunciando la definizione ho detto questo o quest'altro.

Ma è tempo di uscire dalle generalità e di esaminare come i principî un po' astratti testè esposti possano venire applicati in aritmetica, geometria, analisi e meccanica.

POINCARÉ.

*(Continua)*