Prime considerazioni sopra una classe di assiomi per un gruppoide

1. *Assiomi elementari per un gruppoide.* Assumiamo il termine « gruppoide » in un senso molto generale. Chiamiamo, cioè, *gruppoide*, un insieme G nel quale, per qualche coppia di elementi, x e y, sia definita una *composizione binaria*, ^{0}, non necessariamente univoca. In altri termini: a ogni coppia ordinata x, y di elementi di G si associa un s.i. (sottoinsieme) $\{z_\alpha\}$ di elementi di G, che può essere anche vuoto; se tale s.i. non è vuoto, si scriverà

$$x^0y=z_\alpha \text{ (per ogni } z_\alpha\text{)},$$

e si dirà che z_α è *un* composto (mediante la composizione binaria ^{0}), di x e y (nell'ordine scritto).

Dato allora il gruppoide $G(^0)$ (insieme G munito di operazione binaria ^{0}), resta univocamente determinato il s.i. $O(G)$ del « cubo cartesiano » di G

$$O(G)\subseteq G\times G\times G=G^3,$$

costituito da tutte e sole le terne (ordinate) x, y, z tali che « z è un composto di x e y »; viceversa — come è ben chiaro — ogni sottoinsieme $O(G)$ di G^3 munisce l'insieme G di un'operazione binaria ^{0}, definita ponendo $x^0y=z$ se e solo se $(x, y, z)\subseteq O(G)$.

$G(^0)$ può quindi essere *identificato* con $O(G)$, che viene chiamato l'*operativo* di $G(^0)$.

Questa ben nota (ed elegante) rappresentazione insiemistica di un gruppoide ci sembra possa essere utilizzata (didatticamente: anche a livello di un corso universitario di Algebra per il primo anno) per definire, e costruire, una classe di assiomi che possono essere imposti a un gruppoide, classe che comprende gli assiomi più comunemente usati, e che perciò chiameremo « classe degli assiomi elementari ».

Per darne la definizione, qualche premessa è indispensabile.

Innanzitutto, prendiamo in considerazione *una* composizione binaria, ^{0}. Ad essa sono associati tre *predicati a due posti*

$$x\ y\ /, \qquad x\ /\ z, \qquad /\ y\ z,$$

che hanno rispettivamente il seguente significato: (1) alla coppia ordinata x, y è associato uno e un solo $z = x\ y\ /$ tale che $x^0 y = z$; (2) alla coppia ordinata x, z è associato *uno e un solo* $y = x\ /\ z$ tale che $x^0 y = z$; (3) alla coppia ordinata y, z è associato *uno e un solo* $x = /\ y\ z$ tale che $x^0 y = z$. Parleremo talvolta di *univocità destra, centrale, sinistra* della operazione ^{0} (per determinare coppie di elementi di G). Sono questi i tre soli predicati a due posti che faremo entrare in gioco.

Ancora: una lettera latina minuscola denoterà una variabile, cioè un elemento che può percorrere tutto l'insieme G o una parte di G (vedi oltre). Una lettera latina maiuscola denoterà invece una costante, cioè un *ben determinato* elemento di G (in altri termini, ammettiamo tutte le « operazioni nullarie », consistenti appunto nella scelta di *un* elemento in G).

Infine, faremo entrare in gioco solo quei predicati a un posto che derivano dai predicati di univocità destra, centrale e sinistra *fissando* una delle due variabili libere (sostituendo ad essa una costante).

Possiamo ora proporre la seguente

Definizione di assioma elementare di un gruppoide $G(^0)$:

Chiamiamo assioma elementare per un gruppoide $G(^0)$ ogni asserzione, formulabile con l'impiego esclusivo di variabili, di costanti, dei tre predicati binari di univocità (v. sopra), dei predicati unari da essi derivanti per sostituzione di una variabile con una costante, che affermi la esistenza nell'operativo $O(G)$ di $G(^0)$ di uno o più « punti » (elementi), eventualmente sotto ipotesi di esistenza di altri punti, anche esse esprimibili cogli stessi strumenti. Le variabili della asserzione esistenziale sono vincolate dalle ipotesi.

Chiariamo la definizione introducendo simboli e linguaggio opportuni.

Invece di:

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \in O(G),$$

scriveremo

$$\alpha\ \beta\ \gamma,$$

e parleremo di *allineamento* di tre elementi di G.

Un assioma elementare si presenterà quindi come una *successione* di un numero finito, $n \geq 1$, di allineamenti; i primi n-1 allineamenti sono le *ipotesi*, o *premesse*, dell'assioma, l'ultimo la *conclusione* di esso: tra le ipotesi e la conclusione inseriremo una linea divisoria. Una variabile che compare nella conclusione assume tutti e soli i valori che verificano le ipotesi (se le ipotesi mancano, o se essa non figura nelle ipotesi, la variabile in questione descriverà tutto G).

Per dare un esempio, la scrittura

$$\begin{array}{c} x\ y\ xyf \\ y\ x\ yxf \\ \hline y\ x\ xyf \end{array}$$

è da leggere così: « comunque si prendano due elementi x, y tali che esiste ed è unico tanto composto x^0y (Hp. 1) quanto il composto y^0x (Hp. 2), si ha che $y^0x = x^0y$ (conclusione).

Invece la scrittura

$$\begin{array}{c} x\ y\ xyf \\ \hline y\ x\ xyf \end{array}$$

ha significato diverso, e precisamente si legge: « comunque si prendano x e y tali che esista e sia unico il composto x^0y (unica ipotesi), allora *uno* dei composti y^0x è xyf (conclusione); non viene più escluso, cioè, il caso in cui la composizione y^0x non sia univoca, al che provvedeva la seconda ipotesi, che si è scartata.

L'ufficio delle ipotesi è (soltanto) quello di precisare quali sono i valori che possono assumere le variabili che figurano nella conclusione (in primo luogo, perchè la conclusione stessa abbia un senso ([1])); chiameremo pertanto *ridondante* una ipotesi se non influisce sul campo di variabilità delle variabili che compaiono nella conclusione.

Chiameremo *basamento* dell'assioma il complesso delle ipotesi che rimangono dopo avere eliminate le ipotesi *ridondanti*, e chiameremo *rango* dell'assioma il numero delle ipotesi che compare nel suo

---

([1]) Nell'esempio ora dato, la conclusione non ha senso se non si presuppone che « xyf » esista, cioè — appunto — che il composto di x e y esista e sia unico.

basamento. Chiameremo infine *categorico* un assioma di rango 0, cioè un assioma senza premesse, che predica senz'altro l'esistenza di uno o più punti dell'operativo.

2. *Classificazione degli assiomi categorici,* A_{0i}.

Si tratta di esaminare senza omissioni tutte le possibilità che si presentano di scrivere un allineamento utilizzando: (a) variabili $x, y, \ldots$, su tutto G; (b) i tre predicati binari di univocità associati alla operazione ^{0}; (c) i predicati unari da essi derivati, e con ciò (o in modo autonomo); (d) costanti.

I. *Assiomi per i quali si impiegano tre variabili.*

I, 1. Le tre variabili sono distinte; si ha l'assioma

A_{01} $$x\ y\ z$$
(« quali che siano x, y, z in G, $x^0y=z$ »; $O(G)=G^3$).

I, 2; 3; 4. Solo due variabili sono distinte; si ottengono gli assiomi:

A_{02} $x\ x\ y$; A_{03} $x\ y\ x$; A_{04} $y\ x\ x$,

che asseriscono l'esistenza nell'operativo di tutti i punti per i quali sono uguali prima e seconda coordinata, rispettivamente prima e terza, rispettivamente seconda e terza.

I, 5. Le tre variabili coincidono; si ha l'assioma di *idempotenza*

A_{05} $$x\ x\ x$$
(ogni elemento di G è idempotente).

II. *Assiomi con due variabili, e un predicato binario.*

II, 1; 2; 3. Variabili distinte. Tre assiomi:

A_{06} $$x\ y\ xyf$$
(esistenza ed unicità del composto x^0y per ogni coppia ordinata x, y)

A_{07} $$x\ xfy\ y$$
(esistenza e unicità del « quoziente a destra » per ogni coppia ordinata x, y)

A_{08} $fxy\ x\ y$

(esistenza e unicità del « quoziente a sinistra » per ogni coppia ordinata x, y).

II, 8; 9; 10. Variabili coincidenti. Tre assiomi:

A_{09} $x\ x\ xxf$

(esistenza e unicità del quadrato di ogni elemento)

$A_{0,10}$ $x\ xfx\ x$

(esistenza e unicità di un elemento neutro a destra variabile al variare di x)

$A_{0,11}$ $fxx\ x\ x$

(per ogni x, c'è uno e un solo elemento neutro a sinistra, dipendente a priori da x).

III. *Assiomi per i quali si impiegano due variabili e una costante.*

III, 11; 12; 13. Le due variabili sono distinte. Assiomi:

$A_{0,12}$ $x\ y\ A$; $A_{0,13}$ $x\ A\ y$; $A_{0,14}$ $A\ x\ y$.

III, 14; 15; 16. Le due variabili coincidono.

$A_{0,15}$ $x\ x\ N$; $A_{0,16}$ $x\ N\ x$; $A_{0,17}$ $N\ x\ x$

(modificando il linguaggio ordinario, ci converrà chiamarli assioma di esistenza di un « elemento neutro » N *esterno*, rispettivamente *centrale*, rispettivamente *interno*, uguale per tutti gli elementi di G; « centrale » = neutro a destra, « interno » = neutro a sinistra).

IV. *Assiomi nei quali si impiegano una variabile, un predicato unario e* (quindi) *una costante.* Sei assiomi:

$A_{0,18}$ $x\ N\ xNf$; $A_{0,19}$ $N\ x\ Nxf$

$A_{0,20}$ $x\ xfN\ N$; $A_{0,21}$ $N\ Nfx\ x$

$A_{0,22}$ $fxN\ x\ N$; $A_{0,23}$ $fNx\ N\ x$

$A_{0,20}$ e $A_{0,22}$ sono i consueti assiomi della esistenza e unicità di un N-inverso destro (sinistro) per ogni x; nel quadro della nostra impostazione essi non hanno però « carattere privilegiato » nei confronti degli altri 4 assiomi del gruppo IV, assiomi usualmente non presi in considerazione.

V. *Assiomi per i quali si impiegano una variabile e due costanti.*

Si ottengono tre assiomi se le costanti sono diverse

$$A_{0,24}\ x\ M\ N \qquad A_{0,25}\ M\ x\ N \qquad A_{0,26}\ M\ N\ x;$$

si ottengono altri tre assiomi se le costanti coincidono

$$A_{0,27}\ x\ N\ N \qquad A_{0,28}\ N\ x\ N \qquad A_{0,29}\ N\ N\ x$$

(modificando anche in questo caso il linguaggio ordinario, diremo che gli ultimi tre assiomi predicano l'esistenza di uno « zero » rispettivamente *destro, laterale* e *sinistro*).

VI. *Assiomi per i quali si impiegano tre costanti.*

Sono tutti e soli gli assiomi del tipo

$$A_{0,30} \qquad M\ N\ P$$

che asseriscono l'esistenza nell'operativo di *un* determinato punto (M, N, P).

3. *Sistemi di assiomi categorici.*

In queste nostre considerazioni preliminari, non affrontiamo lo studio di assiomi elementari non categorici, cioè di rango maggiore di zero, in modo sistematico. Ci limitiamo a scrivere (nel nostro simbolismo, ma introducendo parentesi quando ciò sia necessario per la chiarezza), l'*assioma di associatività*, che è di rango 4 perchè la sua conclusione può essere enunciata solo dopo 4 ipotesi, e che designeremo con il simbolo A_4:

$$A_4 \qquad \begin{array}{ccc} x & y & (x, y)f \\ (x, y)f & z & ((x, y)f, z)f \\ y & z & (y, z)f \\ x & (y, z)f & (x, (y, z)f)f \\ \hline x & (y, z)f & ((x, y)f, z)f \end{array}$$

Leggiamolo attentamente, ritraducendolo nel linguaggio usuale:

« se per gli elementi x, y, z di $G(^0)$ (Hp. 1) esiste ed è unico il composto x^0y (Hp. 2) esiste ed è unico il composto $(x^0y)^0z$ (Hp. 3) esiste ed è unico (y^0z) (Hp. 4) esiste ed è unico $x^0(y^0z)$, allora (conclusione): $x^0(y^0z)=(x^0y)^0z$ ».

Questa è la formulazione della associatività che si è costretti ad impiegare quando non si esige che la composizione ^{0} sia definita (e tanto meno univocamente definita) per ogni coppia di elementi di $G(^0)$; è, per esempio, la formulazoine che deve essere introdotta nell'assiomatica della teoria delle categorie, per quel che riguarda la associazione di morfismi.

Nella teoria dei gruppi, invece, accanto ad A_4 vale $A_{0,6}$ (n. 2, II), cioè l'assioma di esistenza e unicità di un composto per ogni coppia ordinata x, y. Ma allora A_4 cambia la sua natura logica; in esso le *ipotesi*, o premesse ipotetiche, divengono *asserzioni preliminari* (« comunque si scelgano x, y, z in G, *esistono* i composti x^0y, ecc., e sono unici »), la *conclusione* si trasforma da *affermazione condizionata* (vera per il campo di variabilità di x, y, z segnato dalle ipotesi) in *affermazione categorica,* cioè valida anche essa in tutto G, senza restrizioni.

La differenza tra le due situazioni logiche mi sembra possa essere efficacemente visualizzata » (espressa in simboli) anteponendo alle ipotesi di A_4 una linea orizzontale, che le trasforma in asserzioni categoriche, e separando la conclusione categorica dalle premesse categoriche mediante una doppia linea orizzontale (si tratta di una *nuova* asserzione categorica di esistenza di un ulteriore « punto » dell'operativo, non deducibile dalle precedenti); otterremo così un *assioma categorico con premesse categoriche*, A_4:

$$\bar{A}_4 \qquad \begin{array}{ccc} \hline x & y & (x, y)f \\ (x, y)f & z & ((x, y)f, z)f \\ y & z & (y, z)f \\ x & (y, z)f & (x, (y, z)f)f \\ \hline\hline x & (y, z)f & ((x, y)f, z)f \end{array}$$

Come assiomi della teoria dei gruppi, possiamo allora assumere:

$$A_{0,6}\,; \qquad A_{0,7}\,; \qquad A_{0,8}\,; \qquad \bar{A}_4\,.$$

Si tratta di quattro assiomi categorici, con o senza premesse categoriche; sarà allora naturale chiamare *categorico* tale sistema di assiomi, e con esso ogni sistema di assiomi nel quale tutte le ipotesi di ogni assioma divengono asserzioni categoriche in virtù di altri assiomi del sistema.

Può forse presentare qualche interesse proporsi la costruzione sistematica (con regole di deduzione di tipo « automatico » da stabilire in modo preciso) di tutte le « proposizioni categoriche » che sono conseguenza di un sistema di assiomi categorico (per es., determinazione di tutti i punti di G^3 che appartengono all'operativo di *ogni* gruppo G).

Una ricerca siffatta presuppone però un suo attento inquadramento nella problematica della metamatematica e della algebra universale (oggi in rigoglioso sviluppo), che va al di là di queste prime annotazioni e proposte, di carattere affatto elementare ([1]).

L. LOMBARDO RADICE

([1]) Più precisamente, si potrebbe forse ridimostrare, sfruttando l'idea qui esposta, la « ricorsività enumerabile » (*rekursive Aufzählbarkeit*) della teoria dei gruppi e di altre teorie relative a sottoclassi di gruppoidi definiti da un numero finito di assiomi categorici. Per una esposizione elementare di tale concetto, vedi la voce *Berechenbarkeit* (Computabilità), in *Mathematik* 2, pubblicato sotto la direzione di Behnke e Tietz dalla Fischer nel 1966 (in corso di stampa la traduzione italiana presso l'editore Feltrinelli, Milano).