Varietà e Questioni proposte

Il positivismo e la critica degli assiomi dell' uguaglianza [1].

Apollonio di Perge, secondo si riferisce Proclo, ha tentato di dimostrare l'assioma che « cose uguali ad una terza sono uguali fra loro ». In mancanza di indicazioni più precise, non ci è dato di apprezzare il vêro valore di questa ricerca. Si può supporre forse che la dimostrazione avesse di mira, non tanto l'uguaglianza propriamente detta, o congruenza, delle figure, quanto l'equivalenza di esse: se di questa si sia offerta, come oggi si fa seguendo il Duhamel, una definizione per mezzo della scomponibilità in parti congruenti.

All' infuori del tentativo sopra accennato non pare che mai, fino ai nostri giorni, il citato assioma dell' uguaglianza abbia fermato l'attenzione dei critici: giacchè esso apparve ed appare a prima vista esprimere un giudizio puramente analitico, che non potrebbe revocarsi in dubbio senza contraddizione. Diventa quindi interessante di spiegare in qual modo la critica più recente è stata attratta su questo soggetto.

Per dare una spiegazione conveniente crediamo si debba richiamare il concetto positivistico delle teorie fisiche, introdotto da Mach, Maxwell ecc.

Si tratti per esempio, di definire la *massa* di un corpo. Per Galileo o per Newton, che fanno propria implicitamente la supposizione atomica democritea, la massa è la « quantità di materia » cioè il numero degli atomi (tutti di uguale qualità) che compongono il corpo, ovvero la somma dei loro volumi. Adottando

---

[1] Dal libro in corso di pubblicazione: « Per la storia della logica: i principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici ».

questa ipotesi, il confronto delle masse conduce a priori a considerare la loro uguaglianza o disuguaglianza, e in particolare l'assioma che « masse uguali ad una terza sono uguali fra loro » deve essere ammesso a priori. Ma Mach vuole porgere una definizione della massa che non dipenda da alcuna ipotesi metafisica sull'unità della materia o sulla sua struttura atomica ecc. Perciò confronta direttamente due masse e definisce il loro rapporto mediante un'esperienza (per esempio d'urto o di azione reciproca). In tali condizioni non è più evidente a priori che la relazione indicata come « uguaglianza di masse », possa effettivamente considerarsi come « uguaglianza di qualche cosa », per modo che sussista la proprietà « masse uguali ad una terza sono uguali fra loro ». Così l'assioma cessa di apparire un puro principio logico, per assumere l'ufficio di una proprietà fisica della relazione sperimentalmente definita.

Lo stesso accade nella definizione dell'uguaglianza delle temperature, secondo Maxwell. Il fisico inglese confronta direttamente due corpi a e b, e dice che hanno uguali temperature se, messi a contatto, l'uno non cede calore all'altro, per modo che non si constati variazione di volumi. Ora chi ci assicura che, se a e b si trovano nelle condizioni predette, e se queste condizioni si verificano pure nel confronto del corpo b con un terzo corpo c, anche a e c, messi a contatto, non cederanno, l'uno all'altro calore? Enunciare questa condizione vuol dire enunciare un fatto fisico, che si traduce nell'assioma dell'uguaglianza delle temperature.

Si comprenderà meglio il significato di codesto assioma, osservando che altre relazioni, apparentemente analoghe, non vi soddisfano. Così, per esempio, se — in luogo dell'equilibrio termico — si prende a considerare l'equilibrio chimico, può accadere che: due sostanze a e b — poste a contatto in determinate condizioni — non reagiscano l'una sull'altra, e così b e c, ma invece a e c dieno luogo a reazione. Perciò la relazione che intercede fra sostanze chimiche non reagenti l'una sull'altra, non può — in alcun modo — ritenersi come uguaglianza di qualche qualità o elemento, che esse abbiano a comune.

Per ciò che sopra è detto, l'assioma « cose uguali ad una terza sono uguali fra loro » si può considerare come una delle proprietà spettanti alle relazioni suscettibili di apparire come « uguaglianze »: De Morgan ha distinto questa proprietà col nome di *proprietà transitiva.*

Egli stesso ha osservato che vi sono altre relazioni, non suscettibili di apparire come « uguaglianze » che pur soddisfano alla nominata proprietà: la quale non basta dunque a caratterizzare le « uguaglianze ». Ciò si desume da semplici esempii come sono quelli delle relazioni « maggiore di », « precedente a » ecc. In questi casi la relazione non può essere ritenuta come un'uguaglianza perchè non è soddisfatto un altro assioma, esprimente la *proprietà simmetrica*: da $a = b$, si deduce $b = a$.

Ora tutte le relazioni che soddisfano insieme alle due proprietà, transitiva e simmetrica, (e di conseguenza anche alla *proprietà riflessiva* $a = a$), possono essere considerate come uguaglianze. Infatti una relazione di tal natura permette di classificare tutti gli oggetti possibili, per modo che quelli (a', a''...) che si trovano con a nella relazione data, appartengano ad una classe ben determinata da a; quindi tutti gli oggetti a, a' a''... avranno a comune l'insieme delle proprietà spettanti al concetto astratto della classe, e potranno dirsi *uguali*, rispetto a queste proprietà.

Per il logico, che intende ad approfondire questa teoria dell'uguaglianza e delle *definizioni per astrazione* che vi si collegano, è interessante ricordare come essa tragga origine da una critica filosofica delle teorie fisiche, senza la quale non pare che — in questo campo — le vecchie vedute sul valore puramente analitico degli assiomi avrebbero potuto essere superate.

Federigo Enriques

Questioni proposte.

30. Per quali valori di n l'equazione

$$(x+1)^n - x^n - 1 = 0$$

ha radici doppie?

G. Belardinelli

31. Sia dato un tetraedro $ABCD$: dimostrare che qualunque piano passante per i punti di mezzo dei due spigoli opposti AB e CD divide il tetraedro in due parti di ugual volume.

(Problema proposto in Francia agli esami di baccellierato).

G. Belardinelli

32. Le normali in quattro punti conciclici di una parabola sono tangenti ad una seconda parabola il cui asse è parallelo a quello della parabola data.

G. Lazzeri