Teoria elementare della misura delle figure

(Da una conferenza tenuta dal prof. M. PICONE presso l'Istituto Romano di Cultura Matematica, il 28 aprile 1945)

In una conversazione che ebbe luogo nell'indovinatissimo Istituto Romano di Cultura Matematica, fu trattato un argomento che ha un grande interesse per l'insegnamento elementare della matematica, quello della teoria della misura delle figure nel piano e nello spazio. Parmi opportuno far conoscere ai lettori di questo « Periodico », quanto ebbi a dire in quell'occasione perchè, se si considerano le trattazioni fino ad oggi date a quella teoria in tutti i trattati elementari di geometria, non si può non convenire che esse lasciano molto a desiderare per la difformità che presenta quella che si riferisce ai poligoni del piano, da quella che riguarda i poliedri ed anche da quella delle figure piane con contorni formati d'archi di cerchio ed infine da quella dei coni, dei cilindri, delle sfere.

Si suole dedicare parecchie lezioni alla teoria dell'equivalenza dei poligoni piani, laddove, se si premettesse il modo di misurare le aree di questi, essa non avrebbe assolutamente ragion d'essere. Si persiste insomma a seguire il processo storico di svolgimento della teoria, quando è oggi urgente, per formare rapidamente futuri cultori della scienza o della tecnica, ben preparati, svolgere le teorie fondamentali nel modo più rapido e completo possibile.

Una trattazione, che io vorrei fosse attentamente considerata dagli insegnanti di scuole medie, pienamente uniforme e della massima rapidità e completezza, si fonda unicamente sul concetto di estremi per un insieme numerico, concetto che è da ritenersi elementare, essendo fondamentale per la teoria dei numeri reali e quindi per quella della misura dei segmenti rettilinei. Svolta questa teoria, l'insegnante ha a sua disposizione quanto occorre per svolgere quella della similitudine fra le figure nel piano e nello spazio, e potrà per es. anche, se lo crede utile, svolgere subito la trigonometria e quindi dare le relazioni tra i lati d'un poligono piano ed in particolare per es. anche il teor. di PITAGORA, che si suole assegnare alla teoria dell'equivalenza. Potrà poi passare alla definizione di area per le figure piane e di volume per quelle dello spazio, col metodo che qui esporrò, il quale consente lo svolgimento esauriente della teoria della misura per le dette figure in non più di cinque lezioni, ed anche con una completezza assai maggiore di quella con cui suole oggi essere esposta nei trattati di geometria elementare, nei quali per es. manca (grave lacuna questa per le applicazioni che ne deve fare il professore di fisica) il teorema che dà l'area d'una figura in un piano, proiezione ortogonale di un'altra di area nota, contenuta in un piano inclinato su quello di un angolo noto.

Col notevole guadagno di tempo al quale così perverrebbe il professore di matematica, potrebbe questi accogliere nel suo programma di geometria tutte le teorie geometriche cosiddette complementari, oggi purtroppo ignorate dai nostri giovani delle scuole medie (omotetia e affinità nel piano e nello spazio, fasci di cerchi ed assi radicali fra cerchi, inversione, teoria dei poliedri, geometria sferica, ecc.), attingendo largamente a quella miniera oggigiorno ormai purtroppo dimenticata ch'è l'antico libro di geometria di RICCARDO BALTZER, del quale il nostro grande LUIGI CREMONA dette una classica traduzione per le scuole medie italiane.

Generalità.

1. Diamo fin d'ora la terminologia che ci permetterà di semplificare e d'abbreviare il discorso.

Con una medesima lettera minuscola latina rappresentiamo, senza possibilità d'equivoco, un segmento rettilineo e la sua lunghezza. Col termine « *parallelepipedo* » intendiamo sempre un parallelepipedo rettangolo, aggiungendo l'attributo di « *obliquo* » solo quando si sarà nel caso contrario. « *Dominio rettangolare* » è un rettangolo coi lati paralleli agli assi cartesiani prefissati nel piano, oppure un parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani prefissati nello spazio. « *Dominio plurirel-*

tangolare » è l'insieme formato da un gruppo di domini rettangolari (nel piano o, rispettivamente, nello spazio), in numero finito e non aventi punti interni in comune l'uno con l'altro. Naturalmente potrà accadere, come caso particolare, che un dominio plurirettangolare sia costituito da un solo dominio rettangolare.

2. Un punto d'una figura piana si dice « *interno* » ad essa (nel piano), se è interno ad un rettangolo contenuto nella figura. Un punto d'una figura si dice « *spazialmente interno* » ad essa, oppure « *interno nello spazio* », se è interno ad un parallelepipedo contenuto nella figura. Evidentemente una figura piana è priva di punti ad essa spazialmente interni.

Date due figure F e G, si dice che F è interna alla G nel piano (nello spazio), se ogni punto di F è interno a G nel piano (nello spazio).

Data una figura F piana, dicesi suo « *contorno piano* » la figura costituita da tutti i suoi punti che non sono ad essa interni, nel piano. Per una figura F dicesi « *contorno spaziale* » la figura costituita dai suoi punti che non sono ad essa spazialmente interni. Evidentemente: una figura piana ha per contorno spaziale sè medesima.

3. Data una qualunque figura limitata F del piano (o, rispettivamente, dello spazio), consideriamo un qualunque dominio rettangolare R che la contenga nel proprio interno (n. 2). Decomponiamo R in un numero finito di domini rettangolari parziali, mediante due sistemi di rette, paralleli rispettivamente all'asse x ed all'asse y (o, rispettivamente, mediante tre sistemi di piani paralleli, rispettivamente, al piano xy, al piano yz e al piano zx). Nel caso d'una figura piana, se $m-1$ sono le rette attraversanti R e parallele all'asse y ed $n-1$ sono le rette attraversanti R e parallele all'asse x, i domini rettangolari parziali in cui R viene decomposto sono in numero di mn. Analogamente nel caso d'una figura dello spazio. Indicheremo perciò con una lettera dotata di due indici, per es. con R_{hk} (o, rispettivamente, con R_{hkl}), uno generico dei detti domini rettangolari parziali, intendendo che $h=1, 2, \dots, m$; $k=1, 2, \dots, n$. Orbene si dirà che il dominio plurirettangolare D, costituito da tutti e soli i domini rettangolari R_{hk} (o, rispettivamente, R_{hkl})

che contengono, nell'interno o sul contorno, punti della figura F, « *ricopre* » F.

Se il dominio plurirettangolare D ricopre F, decomponendo ulteriormente R mediante rette parallele agli assi coordinati (o piani paralleli a quelli coordinati) fra le quali figurino quelle condotte per costruire D, si viene a decomporre ogni R_{hk} (ogni R_{hkl}) parziale di D, in domini rettangolari più piccoli e prendendo, di tali domini più piccoli, tutti e soli quelli che contengono, nel proprio interno o sul contorno, punti della F, si ottiene un nuovo dominio plurirettangolare D', ricoprente F e interamente contenuto in D. Diremo che D' « *segue* » D.

4. Sono evidenti le proprietà:

a) Se D, D', D'' sono tre domini plurirettangolari ricoprenti F, tali che: D' segue D e D'' segue D', anche D'' segue D.

b) Se D, D' sono due domini plurirettangolari ricoprenti F, ogni dominio plurirettangolare ricoprente F, ottenuto prendendo le rette (i piani) adoperante per costruire tanto D che D', seguirà D e D'

5. Per un qualunque dominio rettangolare R, diciamo « *area* » di R (o, rispettivamente, « *volume* » di R) il prodotto delle dimensioni di R, cioè:

$$\text{area } R = ab \qquad (\text{rispettivamente vol } R = abc)$$

se a, b sono le lunghezze dei lati di R (se a, b, c sono le lunghezze degli spigoli di R). Si riconosce subito che: operata una qualunque decomposizione di R in domini rettangolari parziali nel modo indicato al n. 3, la somma della aree (o, rispettivamente, dei volumi) dei domini rettangolari parziali nei quali R risulta decomposto, risulta uguale all'area di R (o, rispettivamente, al volume di R).

6. Per un qualunque dominio plurirettangolare D, diciamo « *area* » di D (o, rispettivamente, « *volume* » di D), la somma delle aree (dei volumi) dei singoli domini rettangolari che compongono D. Indicheremo questa somma col simbolo $\sigma(D)$. Dunque, per definizione,

$$\sigma(D) = \text{area } D = \sum_{hk} \text{area } R_{hk}$$

$$(\text{rispettivam. } \sigma(D) = \text{vol } D = \sum_{hkl} \text{vol } R_{hkl}).$$

È immediato che, se D' è un dominio plurirettangolare che segue D (n. 3), si ha sempre

$$\sigma(D') \leq \sigma(D),$$

il segno d'uguaglianza sussistendo quando e solo quando non esiste alcun punto di D che non appartenga a D'.

Estensione piana delle figure piane.
Estensione spaziale delle figure spaziali.

7. Sia F una figura limitata qualunque del piano o rispettivamente dello spazio; indicheremo con $\{\sigma(D)\}$ la classe di tutti i numeri (positivi) ottenuta facendo variare, in tutti i modi possibili e il dominio plurirettangolare D ricoprente F e il dominio rettangolare R, contenente F nel proprio interno, dal quale può pensarsi proveniente D. Chiameremo « *estensione* » di F il numero non negativo

$$\text{est}\, F = \text{estr. inf. di } \{\sigma(D)\}.$$

Talvolta, per evitare ogni equivoco, adopreremo le notazioni

$$\text{est}_p\, F, \qquad \text{est}_s\, F$$

(leggi: « estensione piana » di F, « estensione spaziale » di F), per distinguere i due casi, secondochè F è una figura piana (e considerata come tale, nel piano cui appartiene), oppure una figura dello spazio (cioè una figura tridimensionale o, almeno, considerata come tale).

8. Teor. *Per ogni dominio rettangolare* R, *è*

$$\text{est}_p\, R = \text{area}\, R \qquad (\text{est}_s\, R = \text{vol}\, R).$$

Dim. Sia dapprima R piano. I domini rettangolari R_{hk} d'un qualunque dominio plurirettangolare D ricoprente R, possono considerarsi provenienti da una decomposizione (del tipo indicato al n. 3) d'un dominio rettangolare R' contenente R nel proprio interno. È anche lecito supporre che i lati di R appartengano alle rette di D, quest' ipotesi non portando alterazione alcuna all' area $\sigma(D)$.

Indicati con a', b' i lati di R' rispettivamente paralleli ai lati a, b di R, con δ il massimo lato dei domini parziali R_{hk}, risulta

$$\sigma(D) = a'b', \quad \text{e quindi} \quad ab < \sigma(D) \leq (a + 2\delta)(b + 2\delta).$$

Se ne deduce che $\sigma(D)$ non è mai $< ab$ ma, disponendo di δ, può assumere valori prossimi quanto si vuole ad ab e cioè $\text{est}_p R = ab$. Analoga dimostrazione, nel caso che R sia un parallelepipedo.

9. Sono immediate le due proposizioni:

a) *Se* F *è un punto, si ha* est F $= 0$.

b) *Se la figura* F *è contenuta nella figura* G, *risulta*

$$\text{est}\, F \leq \text{est}\, G.$$

È anche facile dimostrare che

c) *Se* F *è contenuta in una retta, risulta*

$$\text{est}_p\, F = 0.$$

Meno semplice, ma pur facile estensione della dimostrazione di quest'ultima proposizione, è la dimostrazione del

TEOR. *Se* F *è contenuta in un piano* π, *risulta*

$$\text{est}_s\, F = 0.$$

Dim. Supponiamo che π non sia, per es., perpendicolare al piano xy. Indicato con D un generico dominio plurirettangolare ricoprente F, con R_{hkl} un generico dominio rettangolare di D, consideriamo il prisma illimitato T_{hk} che si ottiene, prolungando indefinitivamente i quattro spigoli di R_{hkl} che sono paralleli all'asse z. Il piano π taglia i quattro spigoli di T_{hk} in certi punti A', B', C', D'. Con le rimanenti notazioni della fig. 1,

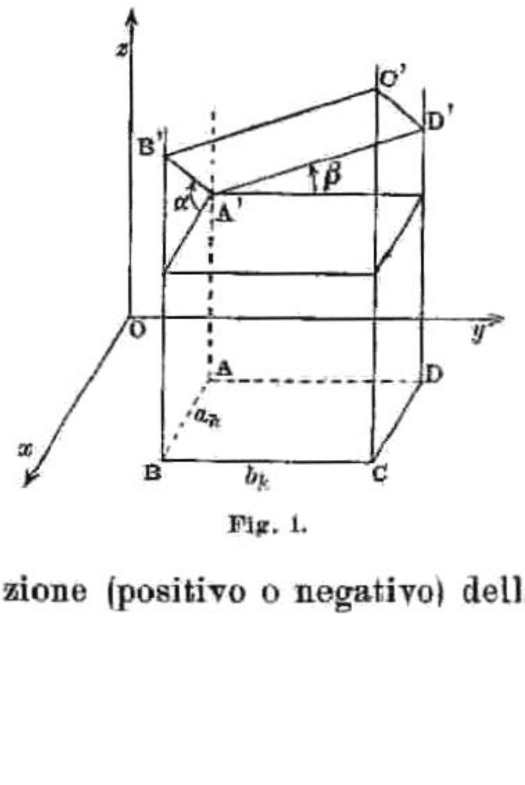

Fig. 1.

ove α indica l'angolo d'inclinazione (positivo o negativo) della retta $A'B'$ sull'asse x, β quello della retta $A'D'$ sull'asse y, ecc., risulta:

$$BB' = AA' + a_h \operatorname{tang} \alpha, \quad DD' = AA' + b_k \operatorname{tang} \beta,$$
$$CC' = AA' + a_h \operatorname{tang} \alpha + b_k \operatorname{tang} \beta.$$

I domini R_{hkl} di D, aventi punti in comune con F e contenuti in T_{hk}, riescono tutti contenuti in un dominio rettangolare $\overline{R}_{hk}$, avente per base un rettangolo uguale al rettangolo $ABCD$ e per altezza un segmento s_{hk} non superiore a

$$a_h \,|\operatorname{tang} \alpha| + b_k \,|\operatorname{tang} \beta| + 2\delta,$$

ove δ indica il massimo lato di tutti i domini rettangolari componenti D. Si ha dunque

$$\sigma(D) = \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_l \operatorname{vol} R_{hkl} \leq \Sigma_h \Sigma_k a_h b_k s_{hk} \leq$$
$$\leq \Sigma_h \Sigma_k a_h b_k (a_h \,|\operatorname{tang} \alpha| + b_k \,|\operatorname{tang} \beta| + 2\delta) \leq$$
$$\leq \delta(2 + |\operatorname{tang} \alpha| + |\operatorname{tang} \beta|) \Sigma_h \Sigma_k a_h b_k \leq$$
$$\leq ab(2 + |\operatorname{tang} \alpha| + |\operatorname{tang} \beta|)\delta,$$

indicando con a, b le dimensioni d'un qualunque dominio rettangolare del piano xy, racchiudente la proiezione della figura F su tale piano.

L'ultima limitazione trovata, in virtù dell'arbitrarietà di δ, dimostra l'asserto.

10. Dalla proposiz. b) del n. 9 si deduce immediatamente che, se per una figura F si possoggono due classi $\{F'\}$ ed $\{F''\}$ di figure, quelle della prima contenute nella F, quelle della seconda contenenti F, le due classi numeriche $\{\text{est } F'\}$, $\{\text{est } F''\}$ riescono separate e est F giace nell'intervallo di separazione di esse, è dunque il numero di separazione della due classi se queste riescono contigue.

11. Diremo che una figura F è la « *riunione* » di più figure $F_1, F_2, \dots, F_n$ e scriveremo

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n,$$

se accade che ogni punto di F appartiene ad una, almeno, delle figure $F_1, F_2, \dots, F_n$. Dimostriamo l'importante

TEOR. *Se la figura* F *è la riunione delle figure* $F_1, F_2, \dots, F_n$, *si ha*

$$\text{est}\, F \leq \sum_{1}^{n}{}_k \,\text{est}\, F_k .$$

Dim. Basterà evidentemente dimostrare il teor. nel caso particolare $n = 2$. Per un generico dominio plurirettangolare D ricoprente F, indichiamo con σ_1 la somma delle aree (dei volumi) dei domini parziali R_{hk} (R_{hkl}) che contengono punti di F_1 ma non punti di F_2, con σ_2 quella delle aree (dei volumi) dei domini parziali che contengono punti di F_2 ma non punti di F_1, infine con σ^* quella delle aree (dei volumi) dei domini parziali che contengono sia punti di F_1, sia punti di F_2.

I domini parziali di D che contengono punti di F_1, formano un certo dominio plurirettangolare D_1 ricoprente F_1; così quelli che contengono punti di F_2, formano un certo altro dominio plurirettangolare D_2 ricoprente F_3, e si ha

$$\sigma(D_1) = \sigma_1 + \sigma^*, \qquad \sigma(D_2) = \sigma_2 + \sigma^*,$$

mentre

$$\sigma(D) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma^*$$

e perciò

$$\sigma(D) \leq \sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma^* = \sigma(D_1) + \sigma(D_2).$$

D'altra parte, scelto ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, esistono due domini plurirettangolari D_1, D_2, ricoprenti rispettivamente F_1, F_2 e tali che

$$\sigma(D_1) < \text{est}\, F_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sigma(D_2) < \text{est}\, F_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi, per ogni dominio plurirettangolare D seguente tanto D_1 quanto D_2, risulta

$$\text{est}\, F \leq \sigma(D) \leq \sigma(D_1) + \sigma(D_2) < \text{est}\, F_1 + \text{est}\, F_2 + \varepsilon.$$

Dalla limitazione trovata, in virtù dell'arbitrarietà di ε, segue l'enunciato.

Da questo teor. si deduce in particolare che, *se più figure hanno ciascuna estensione nulla, lo stesso deve accadere per la figura loro riunione.*

Area delle figure piane. Volume delle figure spaziali.

12. Si dice che una figura piana è dotata di « *area* » (rispetto alla coppia prefissata d'assi cartesiani) se: 1°) *essa è dotata di punti ad essa interni sul piano*; 2°) *il suo contorno ha (rispetto alla coppia prefissata d'assi cartesiani) estensione nulla.*

Si dice che una figura è dotata di « *volume* » (rispetto alla terna prefissata d'assi cartesiani) se: 1°) *essa è dotata di punti ad essa spazialmente interni*; 2°) *il suo contorno ha (rispetto alla terna prefissata d'assi cartesiani) estensione nulla.*

In virtù di quanto sopra dimostrato (e in particolare dell'osserv. finale del n. preced.), i poligoni (i poliedri) offrono esempi di figure dotate di aree (di volumi), rispetto a una coppia (a una terna) d'assi cartesiani comunque prefissata.

L'estensione, rispetto ad una coppia (ad una terna) prefissata d'assi cartesiani, d'una figura F piana (spaziale o considerata come tale) dotata d'area (di volume), si dice « *area* » di F (« *volume* » di F) e denotasi con

$$\text{area}\, F \qquad (\text{vol}\, F).$$

13. Sia F una figura piana (spaziale) dotata di punti interni nel piano (nello spazio). Per ogni dominio plurirettangolare D ricoprente F, indichiamo con $s(D)$ la somma delle aree dei domini rettangolari di D, che sono interni nel piano (nello spazio) alla F.

È evidente che, se il dominio plurirettangolare D' ricoprente F segue D, risulta

$$s(D) \leq s(D').$$

Orbene possiamo subito dimostrare l'importante

TEOR. *Se la figura* F *è dotata di area (di volume) rispetto alla coppia cartesiana (alla terna cartesiana) prefissata, al variare del dominio plurirettangolare* D *ricoprente* F, *i due numeri*

$$s(D), \qquad \sigma(D)$$

descrivono due classi $\{s\}$ *e* $\{\sigma\}$ *contigue, delle quali la prima è la minore e* area F (vol F) *è il numero di separazione.*

Dim. Siano infatti D' e D'' due domini plurirettangolari ricoprenti F. Detto D un qualunque dominio plurirettangolare, ricoprente F e seguente tanto D' quanto D'', risulta

$$s(D') \leq s(D) \leq \sigma(D) \leq \sigma(D'')$$

e ciò prova, intanto, che le due classi $\{ s \}$ e $\{ \sigma \}$ sono separate.

Dopo ciò, detto C il contorno della F, comunque si assuma un numero $\varepsilon > 0$, è possibile costruire un dominio plurirettangolare D, ricoprente F, tale che il dominio plurirettangolare D' ricoprente C, costituito da quei soli domini rettangolari parziali di D che contengono punti di C, soddisfi alla condizione $\sigma(D') < \varepsilon$. Si riconosce subito che è

$$\sigma(D') = \sigma(D) - s(D)$$

e ciò basta a dimostrare completamente il teorema.

14. Data una figura F dotata di area (di volume), si dice che *s' è operata una decomposizione di essa in figure* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *o che si è decomposta* F *in figure* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, se: 1°) F è la riunione delle figure $F_1, F_2, \ldots, F_n$; 2°) prese due a due, tali figure non hanno punti interni in comune; 3°) ciascuna delle figure $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ha un' area (un volume). Sussiste il

Teor. *Se la figura* F *è decomposta nelle figure* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *si ha*

$$\text{area } F = \sum_1^n{}_h \text{ area } F_h, \qquad (\text{vol } F = \sum_1^n{}_k \text{ vol } F_k).$$

Dim. Basterà dimostrare il teorema per $n = 2$. E limitiamo anche la dimostrazione al caso delle figure piane, avvertendo che la dimostrazione relativa alle figure spaziali si conduce in modo perfettamente analogo.

Sappiamo intanto, dal teor. del n. 11, che

$$\text{area } F \leq \text{area } F_1 + \text{area } F_2. \tag{1}$$

Per un generico dominio plurirettangolare D ricoprente F, indichiamo con $s_1(D)$ la somma delle aree dei domini rettangolari R_{hk} parziali di D che sono interni ad F_1, con $s_2(D)$ la somma delle aree degli R_{hk} che sono interni ad F_2, ed osserviamo che, non avendo F_1 ed F_2 punti comuni, all' infuori, eventualmente, di punti dei loro contorni, sarà sempre

$$s(D) \geq s_1(D) + s_2(D).$$

Prefissato un arbitrario numero $\varepsilon > 0$, costruiamo due domini plurirettangolari D' e D'' ricoprenti F e tali che $s_1(D') >$ area $F_1 - \varepsilon/2$, $s_2(D'') >$ area $F_2 - \varepsilon/2$, e sia D''' un altro dominio seguente tanto D' che D''. Si avrà per D seguente D''',

$$\begin{gathered} s(D) \geqq s(D''') \geqq s_1(D''') + s_2(D''') \geqq \\ \geqq s_1(D') + s_2(D'') > \text{area } F_1 + \text{area } F_2 - \varepsilon\,; \end{gathered}$$

dunque anche area $F >$ area $F_1 +$ area $F_2 - \varepsilon$. Ne segue, data l'arbitrarietà di ε, area $F \geqq$ area $F_1 +$ area F_2, e quindi, in forza della (1), area $F =$ area $F_1 +$ area F_2.

Se una figura F è decomposta in due figure F_1, F_2, si dice anche che $F_1(F_2)$ è la «*differenza*» $F - F_2$ $(F - F_1)$ od anche che $F_1(F_2)$ s'ottiene «*togliendo*» $F_2(F_1)$ da F. Il teorema or ora dimostrato si può evidentemente esprimere anche dicendo che: se è $F_1 = F - F_2$ $(F_2 = F - F_1)$, è anche area $F_1 =$ area $F -$ area F_2, (area $F_2 =$ area $F -$ area F_1). Analoga proposizione sussiste per i volumi.

Aree di poligoni.
Indipendenza delle definizioni di estensione, di area e di volume, dalla scelta degli assi cartesiani.
Volumi di poliedri.

15. Lemma. *L'area d'un triangolo rettangolo* F, *i cui cateti* a, b *siano paralleli agli assi, è uguale ad* $\frac{\mathrm{ab}}{2}$.

Dim. Prefissato un intero $n > 0$ ad arbitrio, suddividiamo

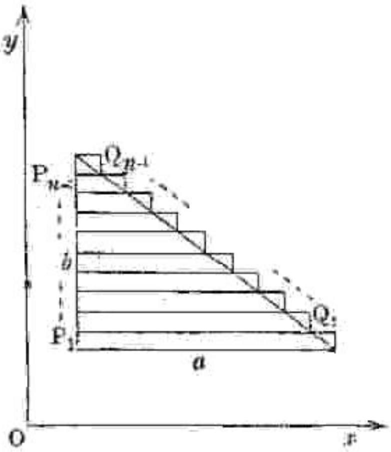

Fig. 2.

il cateto b, parallelo all'asse y, in n parti uguali, mediante i punti P_1, P_2, ..., P_{n-1} (fig. 2). Per tali punti conduciamo le parallele all'asse x, fino a intersecare l'ipotenusa rispettivamente nei punti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$.

La figura F', riunione degli $n-1$ domini rettangolari di uguale altezza $\frac{b}{n}$ e di basi rispettivamente

$$P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_{n-1}Q_{n-1},$$

è contenuta nel triangolo F. Invece la figura F'' che s'ottiene aggiungendo ad F' il rettangolo d'altezza $\frac{b}{n}$ e di base a, contiene F, talchè (n. 10)

$$\text{est}\, F' \leq F \leq \text{est}\, F''$$

e inoltre

$$\text{est}\, F' = \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n - 1) = \frac{ab(n-1)}{2n},$$

$$\text{est}\, F'' = \frac{ab(n-1)}{2n} + \frac{ab}{n} = \frac{ab(n+1)}{2n}.$$

Ma le frazioni $\frac{n-1}{n}$ hanno per estremo superiore l'unità, mentre le frazioni $\frac{n+1}{n}$ hanno l'unità per estremo inferiore, onde dev'essere simultaneamente

$$\text{area}\, F \geq \frac{ab}{2}, \qquad \text{area}\, F \leq \frac{ab}{2}$$

e perciò area $F = \frac{ab}{2}$, c. d. d.

16. Teor. *L'area d'un qualunque triangolo è uguale al prodotto della lunghezza d'uno qualunque dei tre lati del triangolo per la semialtezza relativa.*

Dim. Ricordiamo intanto, dalla teoria dei triangoli simili, che in ogni triangolo i tre prodotti d'un lato per la rispettiva semialtezza, hanno lo stesso valore.

Ciò premesso, supponiamo dapprima che il triangolo considerato T abbia un lato parallelo ad uno dei due assi cartesiani. Se i due angoli adiacenti a tale lato sono entrambi acuti, la perpendicolare abbassata su quel tato dal vertice ad esso opposto, decompone T in due triangoli rettangoli T_1, T_2 ciascuno dei quali è nelle condizioni del lemma precedente. Poichè

$T = T_1 + T_2$, il teor. è dunque subito dimostrato (n. 14). Se invece, dei detti due angoli, uno è ottuso, la detta perpendicolare permette evidentemente d'individuare due triangoli rettangoli T_1, T_2, nelle condizioni del lemma precedente e tali che $T = T_1 - T_2$. Anche in questo caso, dunque, il teor. è senz'altro dimostrato.

Infine, nel caso d'un triangolo T in posizione del tutto generica, basterà decomporlo in due triangoli T_1, T_2 soddisfacenti alla condizione restrittiva or ora considerata, mediante la parallela ad uno dei due assi cartesiani condotta per uno dei vertici. Il teor., essendo già dimostrato sia per T_1 che per T_2, risulterà subito dimostrato anche per T.

17. Dal teor. preced. si deduce immediatamente che l'area d'un triangolo non dipende dalla coppia degli assi cartesiani ai quali ci si riferisce. E, poichè ogni poligono è decomponibile in triangoli, la stessa proprietà vale per ogni poligono. L'area d'un qualunque parallelogramma è uguale al prodotto d'uno qualunque dei suoi lati per l'altezza ad esso relativa, quella d'un rettangolo è uguale al prodotto dei suoi lati, ecc. E siamo ora in grado di dimostrare il fondamentale

TEOR. *L'estensione piana d'una qualunque figura piana non dipende dalla coppia degli assi cartesiani ai quali ci si riferisce.*

Dim. Sia D un qualunque dominio plurirettangolare ricoprente la figura F considerata. L'area di D e cioè il numero $\sigma(D)$ definito al n. 6, è la stessa (per quanto or ora s'è osservato) sia rispetto alla coppia d'assi cartesiani xy, cui si suppone d'essersi riferiti, sia rispetto ad una qualunque altra coppia $x'y'$. Si avrà dunque $\sigma(D) \geqq \text{est}' F$, indicando con $\text{est}' F$ l'estensione di F rispetto alla coppia $x'y'$. Ma $\text{est}\, F$ è l'estremo inferiore della classe $\{\sigma(D)\}$, e si avrà pertanto $\text{est}\, F \geqq \text{est}' F$.

Invertendo la considerazione delle coppie xy, $x'y'$, si dimostra, in modo del tutto analogo, che $\text{est}' F \geq \text{est}\, F$, dunque $\text{est}\, F = \text{est}' F$, c. d. d.

Immediata conseguenza del teor. ora dimostrato è che, se una figura piana ha un'area rispetto ad una certa coppia d'assi cartesiani, essa l'ha pure rispetto ad una qualunque altra coppia, e il valore dell'area non dipende dalla scelta di tale coppia.

18. Il teor. preced. ha il suo analogo per le estensioni delle figure spaziali. Anche per le figure spaziali, occorre anzitutto dimostrare che il volume d'un qualunque tetraedro è uguale al prodotto dell'area d'una qualunque delle quattro facce per un terzo dell'altezza relativa, oppure (ciò ch'è lo stesso) che il volume d'un qualunque parallelepipedo è uguale al prodotto dell'area d'una qualunque faccia per l'altezza relativa, o infine che il volume d'un qualunque parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle sue tre dimensioni. Una dimostrazione *diretta* di questa proprietà è stata indicata dal prof. UMBERTO BINI. Una semplicissima dimostrazione indiretta dovuta al prof. TULLIO VIOLA sarà da questi esposta in una Nota del prossimo fascicolo di questo « Periodico », nella quale sarà indicato anche come essa possa venire generalizzata, per ricorrenza, ad uno spazio cartesiano ad un numero qualunque di dimensioni.

Dopo aver dimostrata l'invarianza della definizione il volume per le figure poliedriche, rispetto a un qualunque cambiamento della terna d'assi cartesiani, si può poi dimostrare, in modo perfettamente analogo a quanto s'è fatto nel piano (n. 17), l'invarianza delle definizioni d'estensione e di volume, per figure spaziali del tutto arbitrarie [1].

MAURO PICONE

---

[1] A partire dalle proposizioni precedenti, si può, con i mezzi affatto elementari già adoperati, giungere ai seguenti noti teoremi di geometria elementare, dei quali mi limito a riportare qui i soli enunciati:

a) *Se due figure piane* F *ed* F' *sono simili, detto* ρ *il rapporto di similitudine della prima alla seconda, si ha*

$$\text{est}\, F = \rho^2\, \text{est}\, F'$$

e, se F *è dotata d'area, tale risulterà anche* F'.

b) *Se due figure spaziali* F *ed* F' *sono simili, detto* ρ *il rapporto di similitudine della prima alla seconda, si ha*

$$\text{est}\, F = \rho^3\, \text{est}\, F'$$

e, se F *ha un volume, l'avrà pure* F'.

c) *Se la figura piana* F *appartiene ad un piano* α *inclinato d'un angolo* ϑ *su un altro piano* α', *detta* F' *la figura proiezione ortogonale di* F *su* α', *si ha*

$$\text{est}\, F' = \text{est}\, F \cdot \cos\vartheta.$$

e, se F *è dotata di area, ne sarà pure dotata* F'.

d) *Un settore circolare di raggio* r, *il cui angolo al centro è di* α *radianti, ha un'area data da* $\alpha r^2/2$. *In particolare, per* $\alpha = 2\pi$, *il cerchio di raggio* r *ha un'area data da* πr^2.

e) *L'ellisse di semiassi* a *e* b *ha un'area data da* πab.

f) *Un cilindro d'altezza* h, *la cui base* T *sia dotata di area, possiede un volume dato dal prodotto* h · *area* T.

g) *Un cono d'altezza* h, *la cui base* T *sia dotata di area, possiede un volume dato da* h · *area* T/3.

h) *Ogni segmento ellissoidico è dotato di volume. Precisamente il segmento dell'ellissoide*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

normale all'asse z *e definito dalla doppia limitazione* $z_1 \leq z \leq z_2$ *(essendo* z_1 *e* z_2 *due costanti tali che* $-c \leq z_1 < z_2 \leq c$*), ha volume uguale a*

$$\pi ab\left(z_2 - z_1 - \frac{z_2^3 - z_1^3}{3c^2}\right).$$

i) *Ogni settore ellisoidico è dotato di volume. Precisamente il settore limitato dalla zona competente al considerato segmento ellissoidico, e dalle due superficie coniche proiettanti dal centro dell'ellissoide gli orli della zona stessa, ha volume uguale a*

$$\frac{2}{3}\pi ab(z_2 - z_1).$$

j) *Dato un ellissoide di rotazione*

$$\frac{x^2+y^2}{r^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

si considerino il segmento ed il settore ellissoidici dei precedenti teoremi h) *e* i). *Il volume d'uno spicchio del detto segmento, staccato da due semipiani uscenti dall'asse* z *e formanti fra loro l'angolo di* ϑ *radianti, è dato da*

$$\frac{\vartheta}{2}r^2\left(z_2 - z_1 - \frac{z_2^3 - z_1^3}{3c^2}\right);$$

quello d'uno spicchio del detto settore, staccato dagli stessi semipiani, da

$$\frac{\vartheta}{3}r^2(z_2 - z_1).$$

In particolare, il volume di uno spicchio dell'ellissoide intero è dato da $2\vartheta c r^2/3$.