Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale

1 - Scopo di questo articolo è quello di richiamare l'attenzione dei nostri Lettori su un interessante teorema di logica formale di cui Beppo Levi diede la dimostrazione in una nota a piè di pagina di una sua memoria dal titolo « Fondamenti della metrica proiettiva » comparsa negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ((2), 54 (1904) pag. 284).

Ci sembra interessante richiamare qui il teorema suddetto, perchè secondo i nuovi indirizzi di insegnamento della Matematica nei Licei l'insegnante dovrebbe presentare agli scolari il concetto di « sistema ipotetico deduttivo » che è tipico della matematica modernamente intesa e pertanto dovrebbe presentare ad essi le teorie matematiche secondo lo schema fondamentale: un insieme di assiomi, scelti in modo che non siano contradditori tra loro, ed una catena di teoremi dedotti dagli assiomi posti.

Il teorema di Beppo Levi a cui facciamo riferimento riguarda appunto gli assiomi di una teoria (che Egli chiama, secondo l'usanza della scuola di G. Peano « proposizioni primitive ») e la qualità fondamentale che gli assiomi devono possedere oltre a quella di essere compatibili: quella di essere tra loro indipendenti.

Abitualmente si distingue tra un sistema di assiomi *ordinatamente* indipendenti ed un sistema di assiomi *assolutamente* indipendenti, chiamando ordinatamente indipendenti certi n assiomi $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots \boldsymbol{p}_n$ *enunciati in un certo ordine* quando nessuno di essi può essere dedotto da quelli che lo precedono, e chiamando invece assolutamente indipendenti certi assiomi quando nessuno di essi può essere dedotto dai rimanenti (cioè da quelli che lo precedono oppure lo seguono nell'ordine prescelto).

La prima condizione (quella che gli assiomi siano ordinatamente indipendenti) è ovviamente meno restrittiva della seconda; e corrispondentemente la impresa di costruire un sistema di assiomi ordinatamente indipendenti appare molto meno faticosa della seconda; nel primo caso invero basta garantire che un determinato assioma tra gli n enunciati non dipenda da quelli che lo precedono nell'ordine prescelto ed a questo scopo basta trovare per ogni indice i (che non sia superiore ad n) una interpretazione dei primi $(i-1)$ assiomi che non soddisfi quello di posto i-esimo; nel secondo caso invece occorre escogitare per ogni assioma una interpretazione che non lo soddisfi, mentre soddisfa a *tutti* gli altri $(n-1)$.

Orbene il teorema di Beppo Levi dimostra che quando si sia costruito un sistema di assiomi ordinatamente indipendenti è possibile costruire un secondo sistema di assiomi che ha le due proprietà di essere equivalente al primo e di essere formato da assiomi assolutamente indipendenti.

Ci è piaciuto qui richiamarlo perchè, oltre all'interesse del teorema in sè, esso (come abbiamo già detto) appare enunciato e dimostrato come semplice osservazione in una nota a piè di pagina di una memoria che è dedicata a tutt'altro argomento e la dimostrazione è condotta con un simbolismo che non coincide più pienamente con il simbolismo della logica formale oggi in uso.

Vorremmo anche osservare che il teorema di Beppo Levi e la sua dimostrazione potrebbero essere presentati ad una scolaresca preparata come un utile esercizio di Algebra di Boole.

2. - Consideriamo un sistema S di n assiomi (n essendo un numero naturale):

$$S = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n\}; \tag{1}$$

sussiste il

Teorema - *Se gli assiomi del sistema S sono ordinatamente indipendenti, sono assolutamente indipendenti gli assiomi del sistema S'*

$$S' = \{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n\} \tag{2}$$

dati da:

$$
(3) \qquad \begin{cases}
\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1 \quad (^1) \\
\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{p}_1 \rightarrow \boldsymbol{p}_2 \\
\boldsymbol{q}_3 = (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2) \rightarrow \boldsymbol{p}_3 \\
\boldsymbol{q}_4 = (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \boldsymbol{p}_3) \rightarrow \boldsymbol{p}_4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \boldsymbol{p}_3 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{p}_{i-1}) \rightarrow \boldsymbol{p}_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{q}_n = (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{p}_{n-1}) \rightarrow \boldsymbol{p}_n .
\end{cases}
$$

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che la condizione che gli assiomi del sistema S siano ordinatamente indipendenti si traduce nella condizione che, qualunque sia l'indice i (purchè ovviamente non maggiore di n), si possa trovare una interpretazione degli assiomi stessi che renda vera la proposizione

$$
(4) \qquad \boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \boldsymbol{p}_3 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{p}_{i-1} \wedge \neg \boldsymbol{p}_i \ ;
$$

infatti la (4) risulta essere la negazione della proposizione

$$
(5) \qquad \boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \boldsymbol{p}_3 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{p}_{i-1} \rightarrow \boldsymbol{p}_i
$$

eseguita in base alla note leggi di De Morgan (²).

(¹) Qui il simbolo «$=$» in ogni riga vuole ovviamente esprimere che il primo membro deve considerarsi come un modo di scrittura abbreviata del secondo.

(²) Come è noto si chiamano «leggi di De Morgan» le due seguenti

$$
\neg (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}; \qquad \neg (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}
$$

essendo $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ due proposizioni qualunque.

Osserviamo poi, in secondo luogo, che le proposizioni del sistema S' possono essere scritte nella forma

$$
(3') \qquad \begin{cases} \boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{q}_1 = \neg \boldsymbol{p}_1 \vee \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 = \neg (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2) \vee \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{q}_4 = \neg (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \boldsymbol{p}_3) \vee \boldsymbol{p}_4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{q}_i = \neg (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{p}_{i-1}) \vee \boldsymbol{p}_i \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{q}_n = \neg (\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{p}_{n-1}) \vee \boldsymbol{p}_n. \end{cases}
$$

Segue immediatamente di qui che si ha

$$\boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{q}_1 \wedge \boldsymbol{q}_2$$

e, come si verifica immediatamente per induzione, è, per ogni indice i non superiore ad n:

$$\boldsymbol{q}_1 \wedge \boldsymbol{q}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{q}_i \leftrightarrow \boldsymbol{p}_1 \wedge \boldsymbol{p}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{p}_i \text{ [3]}.$$

Pertanto il sistema S' risulta essere equivalente al sistema S, perchè la proposizione formata dalla asserzione simultanea di tutte le proposizioni di S' risulta essere equivalente (cioè risulta possedere gli stessi valori di verità) di quella che si ottiene con la asserzione simultanea di tutte le proposizioni di S.

Si osservi ora che qualunque sia l'indice i (purchè ovviamente non maggiore di n) è possibile rendere vera la proposizione

$$(6) \qquad \boldsymbol{q}_1 \wedge \boldsymbol{q}_2 \ldots \wedge \boldsymbol{q}_{i-1} \wedge \boldsymbol{q}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{q}_n \wedge \neg \boldsymbol{q}_i$$

cioè constatare che la $\boldsymbol{q}_i$ non è deducibile in base a tutte le rimanenti del sistema S'.

---

(3) La verifica si esegnisce immediatamente tenendo presente che, qualunque siano le proposizioni $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, si ha

$$\boldsymbol{a} \wedge (\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \leftrightarrow (\boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \leftrightarrow \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

A tale fine basta considerare una interpretazione che renda vere tutte le proposizioni del sistema S fino all'indice i escluso e renda false tutte le proposizioni dalla i-esima all'ultima. Ciò è sempre possibile, perchè per ipotesi il sistema S è formato da proposizioni ordinatamente indipendenti; si verifica immediatamente che con una interpretazione cosiffatta la $\boldsymbol{q}_i$ risulta esser falsa, mentre tutte le altre $\boldsymbol{q}$ di indice diverso da i sono vere; pertanto risulta anche vera la (6); con che il teorema è completamente dimostrato.

3. - Per desiderio di completezza ricordiamo anche quanto scrive a proposito del teorema in oggetto ALESSANDRO PADOA (nell'articolo « LOGICA » che fa parte della Enciclopedia delle matematiche elementari - Vol. 1° - Parte 1ª - Milano - 1930 - pag. 21, nota (5) a piè di pagina):

« Quest'osservazione [4] viene invocata da parecchi autori di trattati, per giustificare la negligenza nella scelta dei postulati. Ma pur riconoscendo la esattezza della trasformazione indicata [5] si può obiettare che:

1) il negare importanza al fatto che due postulati, oltrechè ordinatamente, siano assolutamente indipendenti, perchè, altrimenti, se ne possono ricavare (nel modo indicato) due che lo sono, autorizzerebbe similmente a negare importanza al fatto che due numeri naturali siano primi fra loro, perchè, altrimenti, se ne possono ricavare (dividendoli separatamente per il loro massimo comun divisore) due che lo sono;

2) nel caso in cui A e B siano ordinatamente ma non assolutamente indipendenti (cioè: se da A non segue B, ma da B segue A) anzichè conservare A ed assumere $B \vee \neg A$ [6] tra i *postulati* e quindi trasferire B tra i *teoremi*, come propone l'Autore [7], noi conserviamo soltanto B tra i *postulati* e trasferiamo A fra i *teoremi*.

---

(4) Cioè la proposizione che noi chiamiamo qui teorema di Beppo Levi.

(5) Da Beppo Levi per passare dal primo al secondo sistema di assiomi.

(6) Trascriviamo la formula del Padoa con le notazioni che abbiamo deciso di usare in questo articolo.

(7) Beppo Levi.

Pertanto, conclude PADOA, ... in ogni trattato ben fatto le proposizioni primitive dovrebbero essere *assolutamente indipendenti* ... ».

Non riteniamo di dover proseguire la discussione sui criteri per giudicare se un trattato sia oppure no *ben fatto* secondo i gusti del PADOA, perchè riteniamo che sul giudizio debbano influire non soltanto i gusti dell'autore, ma anche opportunità didattiche.

Infatti non è sempre facile conciliare il rigore logico e la efficacia didattica; riteniamo pertanto che ogni aiuto agli insegnanti per conseguire questo doppio scopo, fondamentale per l'insegnamento, sia di estrema utilità.

C. F. MANARA