scopi della matematica vengano compresi più chiaramente, traverso un modo d'insegnamento che si ritiene non ne sacrifichi neppure l'aspetto scientifico.

Infine il movimento di riforma, intrapreso dai matematici, mira a superare le difficoltà psicologiche di chi si avvicina alle matematiche, ad eliminare ciò che non può essere ragionevolmente giustificato dall' insegnamento, e a rafforzare le naturali disposizioni di coloro che mostreranno abilità per lo studio della scienza.

DAVID EUGENE SMITH

(Traduzione dall' inglese di ALMA ENRIQUES).

Le definizioni in Matematica

Aristotele diede delle regole per le definizioni e dimostrazioni in generale, le quali regole sono riprodotte, nei trattati di logica scolastica, fino ad oggi quasi inalterate. Ma negli ultimi tempi, i cultori della logica matematica, o simbolica, riesaminarono questa questione, trovando che parecchie regole scolastiche non si applicano alle definizioni matematiche, e che queste soddisfano a regole non prima enunciate.

Esaminerò qui successivamente le varie regole [1].

§ 1. **Ogni definizione è una eguaglianza.** — Ogni definizione ha la forma:

$$\text{definito} = \text{definiente},$$

---

[1] Alcune delle osservazioni che seguono furono già da me pubblicate in un articolo collo stesso titolo francese, in *Congrès international de philosophie*, Paris 1900, tradotto poi in polacco, e ripubblicato a Varsavia nel 1902; poi in un altro più ampio, nell'*Institut de Ciencies de Barcellona*, 1911. Molti altri autori trattarono contemporaneamente, e poi, la stessa questione; essi saranno citati in seguito.

ove il definito è un nuovo segno, o parola o frase o proposizione, ed il definiente è un'espressione composta con segni noti. La definizione esprime la convenzione di usare il definito invece del definiente più lungo.

Ciò è chiaro nelle eguaglianze:

$$2 = 1 + 1,\quad 3 = 2 + 1,\quad 4 = 3 + 1,\ \text{ecc.}$$

che si possono considerare come le definizioni delle cifre 2, 3, 4, ecc. supposta nota la cifra 1, e il segno d'addizione $+$, anche limitato al caso in cui il secondo termine della somma è 1, cioè l'operazione $+1$.

Sono pure eguaglianze le definizioni comuni dei numeri trascendenti:

$$e = \lim (1 + 1/m)^m \text{ per } m \text{ infinito},$$

e della costante di Eulero:

$$\gamma = \lim (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \log n), \text{ per } n \text{ infinito}.$$

Se il segno ideografico $=$ non è scritto fra i due membri della definizione, esso è espresso con termini del linguaggio comune, cui si può sostituire.

Per esempio, la prima definizione di Euclide « punto è ciò che non ha parti » si può scrivere

punto = « ciò che non ha parti ».

La seconda definizione può essere scritta:

linea = « lunghezza senza larghezza ».

Il definito può essere composto di più parole. Sono tali le comuni definizioni di « linea retta », di « numero primo », ecc.

Il definito può anche essere una proposizione o una relazione.

Così la definizione del parallelismo fra due rette, in Euclide, I, 23, si scrive:

« Due rette sono fra loro parallele » = « Esse giacciono in un medesimo piano, e comunque prolungate hanno nessun punto comune ».

Parimente, la definizione di Euclide, VII, 13, può essere scritta:

« Due numeri sono primi fra loro » = « Essi hanno nessun divisore comune, oltre l'unità ».

Quindi, per ridurre ogni definizione all'eguaglianza, è necessario usare il segno =, non solo fra due numeri, ma pure fra due classi, fra due proposizioni, e fra ogni specie di enti.

Una proposizione della forma:

$$\pi = 3{,}1415....$$

non può essere una definizione, quantunque si presenti come un'eguaglianza; essa è un'eguaglianza impropria, indicando solo le prime cifre di π, o meglio essa significa in modo preciso:

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416,$$

che non è un'eguaglianza, e quindi non può essere una definizione.

La definizione 3 di Euclide « gli estremi d'una linea sono punti », non può essere una definizione. Non è la definizione di *punto*, definito per la proposizione 1 sopra riportata; non è la definizione di *linea*, definita per la 2; non è la definizione di *estremo*, perchè l'affermare che gli estremi della linea sono punti, esprime una proprietà degli estremi, che non basta a individuarli. La proposizione 3 ora citata ha il nome di *definizione* nella versione di Euclide fatta da Heiberg, in Lipsia 1883, e in quasi tutte le versioni; ma il testo euclideo dà a tutte le proposizioni del capitolo il nome generico di ὅροι, e il greco ὅρος significa *termine*.

Ciò risulta dalla successiva definizione 13 « termine, ὅρος è l'estremo di qualche cosa », e da tutto il libro V, ove ὅρος indica termine di una proporzione ». Quindi giustamente il prof. Vacca, nella sua versione dice: « traduco con *termini* il greco ὅροι, piuttosto che con *definizioni*, come si fa comunemente, perchè queste prime pagine introduttorie, invece che definizioni matematiche, sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si danno oggi nei dizionari » [1].

Del resto conviene ricordare che i libri di Aristotele, di Euclide, e più tardi la grammatica del Donato, l'aritmetica di Boezio, e tutti i libri scolastici, furono trasmessi a noi mediante copie successive fatte dagli insegnanti e dagli studenti; ed ogni copista aggiungeva e modificava il testo a suo arbitrio, sicchè è difficile il riconoscere la parte che spetta ai singoli collaboratori.

La regola che ogni definizione sia un'eguaglianza, si trova implicita in Aristotele, quantunque non vi si trovi la parola *eguaglianza*. Vedasi: A. PASTORE, *Le definizioni matematiche secondo Aristotele e la logica matematica*. Atti Acc. Torino, 10, III, 1912.

L'A., professore di filosofia teoretica nell'Università di Torino, pone ivi a confronto la logica scolastica colla logica matematica.

§ 2. **In matematica tutte le definizioni sono nominali.** — La logica scolastica suole classificare le definizioni in reali e nominali.

In matematica tutte le definizioni sono nominali. Ciò è ben noto. PASCAL, *Pensées*: « On ne reconnaît en géométrie, que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom ».

MÖBIUS, a. 1815, *Werke*, t. I, pag. 388: « Definitionum divisio in verbales et reales omni caret sensu ».

E in generale per tutte le definizioni, in Stuart Mill, a. 1838: « All definitions are of names, and names only ».

Ciò che in Storia naturale, alcuno chiama definizione

---

[1] G. VACCA: *Euclide, il primo libro degli elementi, testo greco, versione italiana, introduzione e note*, Firenze, 1916, L. 2. Raccomando vivamente questo libro ai professori delle scuole medie. Chi ha qualche ricordo del greco vedrà in veste autentica il padre della geometria, e chi non conosce il greco, servendosi del vocabolarietto greco-italiano unito, può portarsi in grado di leggere l'originale, senza impiegare anni nello studio della grammatica. Alcuni giovani dottori, che non seguirono gli studi classici, riuscirono in breve tempo a leggere il greco in questo libro.

reale, è detto da altri, e con maggior ragione, « descrizione » dell'animale o della pianta.

§ 3. La regola del genere e differenza non vale per tutte le definizioni. — Aristotele, *Top.*, I, 8, pone la regola:

Ὁ ὁρισμὸς ἐκ γένους καὶ διαφορῶν ἐστιν,

che Boezio tradusse « per genus proximum et differentiam specificam », ed è riprodotta come regola assoluta in tutti i trattati di logica. L'esempio classico di questa proprietà è la definizione

homo = animal rationale.

Qui « animal » e « rationale » indicano due classi. Fra quelle due classi è sottintesa l'operazione detta congiunzione dai grammatici, moltiplicazione logica dai logici dopo Boole, indicata in generale da *et* nel linguaggio comune, e in logica matematica dal segno $\frown$.

Quindi la regola di Aristotele direbbe che ogni definizione ha la forma:

$$x = a \frown b$$

ove a e b sono classi note, dette genere e specie, e x è la classe che si definisce.

Qualche definizione matematica soddisfa alla regola Aristotelica. Tale è la definizione 22 di Euclide, che può tradursi:

quadrato = quadrilatero $\frown$ equilatero $\frown$ equiangolo.

Ma questa regola si può applicare al più alla definizione di una classe. Essa non è vera per la definizione $2 = 1 + 1$, per quella del numero e sopra citata, e per le definizioni di enti che non sono classi. Anche le definizioni di classi non hanno necessariamente la forma precedente. Per esempio, nella definizione

numero composto = (numero maggiore di 1)
$\times$ (numero maggiore di 1),

fra le due classi, che in questo caso sono identiche, non è posto il segno di congiunzione logica $\frown$, ma il segno di moltiplicazione aritmetica.

I cultori della logica classica rispondono che nelle definizioni: « 2 = somma di 1 con 1 », « numero composto = prodotto di due numeri », « e = limite di ecc. », il genere è rappresentato dalle parole *somma, prodotto, limite*. Ma queste parole non indicano classi, bensì funzioni; ogni numero è somma e prodotto e limite. La classe corrisponde alla prima categoria οὐσία di Aristotele, mentre la funzione appartiene alla quarta πρός τι. E qui bisognerebbe distinguere questi due concetti. La definizione di *classe* mediante *gruppo* o *insieme* o *proprietà* è un circolo vizioso, come quella di *funzione* mediante *relazione* o *corrispondenza* o *operazione*. Arrivati a queste idee elementari, non si può oltre procedere che coi simboli. Vedasi:

G. VAILATI, *Aggiunte alle note storiche del Formulario*. Rivista di Matematica, anno 1903, pag. 57-58.

G. VAILATI, *La teoria Aristotelica della definizione*. Rivista di Filosofia, anno 1903, Scritti pag. 485.

L. COUTURAT, *Les principes des Mathématiques*. Paris, Alcan 1905, pag. 290.

§ 4. L'esistenza della cosa definita non è necessaria. — Alcuni logici affermano che si deve solo definire cose esistenti. Fra essi lo Stuart Mill, che partendo dalla definizione di cosa non esistente, e supponendola esistente, arriva a risultato assurdo. Ma l'assurdo deriva dal supporre esistente ciò che si è definito, non già dall'aver definito cosa non esistente.

E precisamente l'esempio del Mill, trasformato in geometrico, è il seguente:

Dalla proposizione:

(1) i pentaedri sono poliedri

si deduce:

(2) i pentaedri regolari sono poliedri

da cui, convertendo colla regola « se ogni a è b, allora qualche b è a », si ha:

(3) qualche poliedro è un pentaedro regolare,

il che non è. Il Mill, ritiene falsa la proposizione (2), mentre la logica matematica ritiene giusta la (2), ma non legittimo il passaggio dalla (2) alla (3). Non è vero che la proposizione universale « ogni a è b » si converta senz'altro nella particolare « qualche b è a », bensì « se ogni a è b, ed esistono degli a, allora qualche b è a ». In conseguenza sono incomplete tutte le forme di sillogismo in cui da premesse universali segue una conseguenza particolare; questa tesi segue dalle ipotesi enunciate, e da una esistenziale, sottintesa nella logica scolastica, ed esplicitamente enunciata nella logica matematica. Vedasi:

A. PADOA, *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*. Revue de Métaphysique etc., Paris, 1912.

Anche ARISTOTELE (*Anal. post.*, libro I, cap. 10, n. 9) dice: « le definizioni non sono delle ipotesi, perchè esse non dicono che le cose definite esistano o non esistano ».

Numerose sono le definizioni in matematica di cose non esistenti. Euclide, libro IX, prop. 20 dà un nome al massimo numero primo, e, ragionando su esso, conchiude che non esiste; cioè definisce un nome, allo scopo di provare che esso rappresenta nulla.

Le definizioni di limite, di derivata, di integrale di una funzione, non affermano l'esistenza dell'ente definito. La definizione di integrale è sempre seguita da una serie di proposizioni, della forma:

« Se la funzione è continua, esiste l'integrale ».

« Se la funzione è crescente, esiste l'integrale ».

« Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale è.... ».

Dalla definizione ordinaria:

« Derivata d'una funzione è il limite del suo rapporto incrementale »,

risulta che la derivata esiste o non, secondo che esiste o non questo limite. Alcuni autori, per voler essere più rigorosi, dicono:

« Derivata è il limite, *ove esista*, del rapporto incrementale »,

e allora, se il limite non esiste, non si può più conchiudere che la derivata non esiste.

Del resto, la parola *esiste* ha, nel linguaggio comune, più significati. La classe nulla rappresenta una classe in cui non esistono individui; ma essa esiste; così il numero 0 può indicare o l'assenza di grandezza, o la grandezza 0. In pratica conviene definire non solo cose esistenti, ma importanti.

§ 5. Definizioni possibili. — Diremo « definizione possibile » ogni eguaglianza, che contiene in un membro un segno, che non figura nell'altro.

Sono per esempio definizioni possibili del numero π le seguenti:

$\pi =$ circonferenza : diametro.

$\pi =$ « minima radice positiva dell'equazione

$$« \; x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots = 0 \; ».$$

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

La prima è la definizione storica, ed è intelligibile al lettore che conosce gli elementi di geometria. La seconda è puramente analitica. La terza esige il calcolo integrale.

Immaginiamo disposte le idee che si considerano in un certo ordine. Si dirà definizione possibile relativamente ad un dato ordine, una eguaglianza che contiene nel primo membro un segno, e nel secondo una espressione composta con segni precedenti esso. Per esempio, le tre definizioni possibili date di π, sono rispettivamente possibili a chi conosce la geometria elementare, o la teoria delle serie, o il calcolo integrale.

Fra le varie definizioni possibili di un ente, in un ordine fissato, la scelta della definizione reale dipende dalla volontà dell'autore consigliato da ragioni didattiche. Quindi una proposizione può essere o non una definizione possibile; ciò dipende dalla sua natura. L'essere una proposizione una definizione, dipende dalla volontà dell'autore, e non solo dalla natura della proposizione.

§ 6. La definizione deve procedere dal noto all'ignoto. — È questa una regola evidente. Si trova in Aristotele, *Top.* VI, cap. IV, n. 2, bisogna vedere « se si fa la definizione per le cose anteriori e più no e »:

εἰ μὴ διὰ προτέρων καὶ γνωριμωτέρων πεποίηται τὸν ὁρισμόν.

Qualunque trattato di matematica definisce ogni nuova parola per mezzo di quelle studiate nelle pagine precedenti. Ma ciò non avviene per le prime definizioni, e gli autori non sogliono dire quali idee essi suppongono premesse. Se essi non lo dicono, è però possibile il farne il catalogo. Considero per esempio le prime definizioni di Euclide-Legendre:

« La ligne est une longueur sans largeur ».

« La surface est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur ».

Vediamo in esse definite le parole « linea, superficie » per le idee geometriche non prima definite « lunghezza, larghezza, altezza, spessore ». Le idee che figurano nei secondi membri sono più numerose che quelle nei primi. E allora è naturale il domandarsi, se non convenga sopprimere queste definizioni, assumendo come idee non definite linea e superficie. Ed invero l'idea di lunghezza, che qui si da come intuitiva, è poi definita nei trattati di calcolo, e la definizione non è semplice.

Alcuni autori presuppongono nota la lingua comune. Ma appartengono alla lingua comune i termini « punto, linea, piano, sfera, uno, due, tre », ecc. Perciò l'analisi della questione, se gli elementi più semplici della geometria, e le idee di numero, e le più semplici di aritmetica, si possano definire o non, esige l'analisi della lingua, la enumerazione di tutte le parole e flessioni grammaticali, che si presentano nelle prime pagine di queste scienze, e quindi la ricostruzione della ideografia.

La lingua comune ha numerosi sinonimi; chi definisce uno di essi mediante un altro, e così via, non definisce, nè analizza l'idea, ma fa un circolo vizioso, detto « circulus in definiendo », o « definizione rotatoria ».

Sono sinonimi: *addizionare*, *sommare*, *aggiungere*, *riunire*, e si fa il circolo vizioso definendo una di queste parole mediante un'altra. Lo stesso avviene definendo il *sottrarre* mediante *togliere*, *moltiplicare* mediante *volte*, *dividere* mediante *parti*. Sono viziose le definizioni di *serie* per *successione*, *classe* per *aggregato*, *proposizione* per *giudizio*.

Nelle frasi « cinque dita », « cinque metri », « cinque cento », l'apposizione delle due parole ha il valore del *moltiplicato*, ed è impossibile il definire l'apposizione mediante più apposizioni. La comunissima definizione della moltiplicazione: « il prodotto di due numeri è la somma di tanti termini eguali al moltiplicando quante sono le unità del moltiplicatore », è una frase sonora, ma che non può dare l'idea a chi non l'abbia prima. Vedasi:

R. Frisone, *Le varie definizioni di prodotto*, Atti Acc. Torino, 10-III-1918., Ivi l'A. fa vedere in quale punto di questa frase si trovi l'apposizione che ha lo stesso significato di quella che si vuol definire, ed esamina le varie definizioni del prodotto. Vedasi pure lo scritto della stessa A. *Le prime definizioni in aritmetica*, Bollettino di matematica, Pavia, 1917, pag. 80.

Un concetto di matematica, che qui è espresso coll'apposizione, altrove può essere indicato da altra forma grammaticale.

Keplero a. 1605, Cavalieri a. 1639, Wallis a. 1655, usarono la frase « le ordinate », « tutte le ordinate », per indicare ciò che oggi si chiama « integrale dell'ordinata » (1); cioè l'idea complessa di integrale era espressa dalla desinenza del plurale, e non la si definiva. Anche in Euclide (e nella versione del Vacca) il plurale indica la somma.

§ 7. **Definizioni per induzione.** — I cultori della logica matematica classificano le definizioni matematiche in diversi tipi.

Si definisce per induzione una funzione f dei numeri N_0 (numeri interi a partire da zero), dando il valore $f0$, e poi, qualunque sia il numero n, esprimendo $f(n+1)$ mediante fn.

Così, supposto noto $a+1$ « il successivo di a », si definisce la somma di due numeri:

$$a+0=a,$$
$$a+(n+1)=(a+n)+1.$$

---

(1) Vedansi le citazioni in *Formulario Mathematico*, ed. V, pag. 352, 356, 359.

Def. del prodotto:

$$a \times 0 = 0,$$
$$a \times (n+1) = a \times n + a.$$

Def. della potenza:

$$a^0 = 1,$$
$$a^{n+1} = a^n \times a.$$

Def. del fattoriale:

$$0! = 1,$$
$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Queste definizioni danno $a \times n$, a^n, $n!$, anche per $n = 0$, o $= 1$, casi che si sogliono escludere nelle definizioni ordinarie.

Queste definizioni rigorose sono adottate nei trattati scolastici del prof. CATANIA.

§ 8. **Definizioni per astrazione.** — Alcune volte si definisce una funzione fa, non con una definizione nominale della forma:

$fa =$ espressione composta coi segni precedenti,

ma definendo l'eguaglianza $fa = fb$.

Per esempio la def. 5 del libro 5 di Euclide si traduce:

(ragione della grandezza a alla omogenea $b =$
$=$ ragione della c alla d) $=$

(comunque si prendano i numeri naturali m e n, se ma è minore o eguale o maggiore di nb, sarà mc minore o eguale o maggiore di nd). Questa costituisce anche la moderna definizione dei numeri reali (irrazionali).

Esempi dalla geometria:

(area del poligono $a =$ area di b) $=$
$=$ (a e b si possono scomporre in parti sovrapponibili).

(direzione della retta $a =$ direzione di b) $=$
$=$ (a e b sono parallele).

Altri esempi nel mio articolo « Le definizioni per astrazione » nel *Bollettino della Mathesis*, anno 1915. Vedasi pure l'ampio e profondo trattato: BURALI-FORTI, *Logica matematica*, 2ª ediz., Milano 1919.

§ 9. **Idee primitive.** — Dato un ordine alle idee d'una scienza, non tutte si possono definire. Non si può definire la prima idea, che non ha precedenti; non si può definire il segno =, che figura in ogni definizione. Si dice che una idea è *primitiva*, relativamente a un dato ordine, se, in quest'ordine delle idee, essa non si sa definire. Perciò l'essere una idea primitiva, non è un carattere assoluto, ma solo relativo al gruppo di idee che si suppongono note.

L'esistenza di idee primitive già è chiaramente espressa in Pascal:

« Il est évident que les premiers termes qu'on voudroit définir en supposeroint des précédents pour servir à leur explication... et ainsi est clair qu'on n'arriveroit jamais aux premièrs. Ainsi en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs, qu'on ne peut plus définir ».

La determinazione delle idee primitive della matematica diede luogo, in questi ultimi trent'anni a numerosissimi studii, quasi tutti fatti col sussidio della ideografia della logica-matematica.

Citerò in modo speciale i lavori di Burali-Forti, Padoa, Pieri in Italia, Korselt in Germania, Gérard in Francia, Russell e Whitehead in Inghilterra, Bôcher, Dickson, Huntington, Veblen in America.

Il compianto Pieri, già prof. all'Università di Parma nel 1899 pervenne a esprimere tutte le idee di Geometria mediante due sole idee primitive: « punto, e distanza fra due punti » [1].

Parlando del lavoro del Pieri, B. Russell, nel suo grande e celebre libro: *The principles of mathematics,* dice: « This is, my opinion, the best work on the present subject ».

Le proprietà fondamentali delle idee primitive sono determinate da « proposizioni primitive », o proposizioni che non si dimostrano, e da cui si deducono tutte le altre proprietà degli enti considerati. Le proposizioni primitive fungono in certo modo come definizioni delle idee primitive. Gli autori citati esposero per le varie parti della matematica, più sistemi completi di idee primitive, e di proposizioni primitive.

---

(1) *Della Geometria elementare, come sistema ipotetico deduttivo.* Memorie Accademia Torino 1899.

Aristotele enunciò l'esistenza delle proposizioni primitive, *Metaph.* 4, 4: « Non tutte le cose possono dimostrarsi ». Ma invano il collega Pastore ed il compianto Vailati cercarono in Aristotele un cenno delle idee primitive.

Vedasi il trattato:

SHEARMAN, *The development of Symbolic Logic*, London, 1906.

§ 10. Omogeneità delle definizioni. — Se il definito dipende da alcune variabili, bisogna che il definiente contenga le stesse variabili, e nessun' altra; cioè definito e definiente debbono essere omogenei nelle variabili.

Non si può definire la risultante di due forze, come quella che ha per componenti rispetto ad assi coordinati le somme delle componenti delle forze date, perchè si definisce la risultante delle due forze non solo mediante queste forze, ma ancora mediante gli assi di riferimento. Si può completare aggiungendo che il risultato non varia, cambiando gli assi.

Se a, b, c, d sono numeri naturali, si ha

$$a/b + c/d = (ad + bc)/(bd).$$

Essa esprime la comune regola per la somma delle frazioni. Ma non si può assumere come definizione. Invero, dati i numeri a e b, resulta determinato il valore della frazione a/b; viceversa, data una frazione x, questa si può mettere sotto infinite forme a/b; ossia, mentre il valore della frazione è funzione del numeratore e del denominatore, invece numeratore e denominatore della frazione non sono funzioni della frazione; poichè $1/2 = 2/4$, e il numeratore della prima non eguaglia il numeratore della seconda. Nel caso della formula precedente, il primo membro è una funzione delle due variabili a/b e c/d; mentre il secondo è funzione delle quattro variabili a, b, c, d. Bisognerà completare la definizione, dimostrando che il secondo membro è solo funzione di a/b e di c/d.

Per vedere meglio che non è permesso di definire una operazione sulle frazioni mediante una loro rappresentazione, permettiamoci di definire, $x \mu y$, medio di due frazioni x e y, la frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore la somma dei denominatori. Cioè poniamo

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, N \cdot \supset \cdot (a/b) \mu (c/d) = (a + c)/(b + d)$$

formula dello stesso tipo precedente. Si avrà $(1/2)\mu(2/3)=3/5$, $(2/4)\mu(2/3)=4/7$, e poichè $1/2=2/4$, risulterebbe $3/5=4/7$, resultato falso.

In matematica sonvi molte espressioni che hanno la forma grammaticale di funzioni e non lo sono. Oltre a *numeratore* e *denominatore* di una frazione, le parole: *termini* d'una somma, *fattori* di un prodotto, *coefficiente*, *base*, *esponente*, non sono funzioni del valore della espressione, ma della sua forma. Parimenti le parole: *monomio*, *binomio*, *frazione irreduttibile*, esprimono proprietà della forma, non del valore della espressione. Nella ideografia, queste parole non possono essere rappresentate da simboli. Quindi si vede che il numero dei simboli del Formulario mathematico sia molto minore delle parole del linguaggio comune.

§ **11. Utilità delle definizioni.** — Le definizioni sono utili, ma non necessarie, poichè al posto del definito si può sempre sostituire il definiente, e perciò eliminare da tutta la teoria il definito. Questa eliminazione è cosa molto importante. Se eliminando il simbolo definito, la nuova esposizione non è più lunga e più complicata della precedente, ciò significa che quella definizione era poco utile. Se si incontrano difficoltà nella eliminazione, ciò prova che la definizione non fu ben data; anzi questo metodo della sostituzione è ottimo per riconoscere l'esattezza d'una definizione.

Ciò già disse ARISTOTELE, *Top.* 6, 4: « affinchè l'inesattezza della definizione diventi manifesta, devesi porre, al luogo del nome, il concetto ».

I numeri razionali si definiscono mediante i naturali; quindi ogni teorema sui razionali si può trasformare in un teorema sui soli numeri naturali; la cosa è facile, e si ritrova il linguaggio di Euclide.

I numeri irrazionali si definiscono mediante i numeri razionali, quindi ogni teorema di analisi deve in definitiva essere un teorema sui numeri naturali. La trasformazione fu tentata da alcuni autori, ma la cosa non è facile.

Fra i risultati ottenuti, molto elegante è quello contenuto in R. FRISONE, *Una teoria semplice dei logaritmi*, Atti Acc. Torino, 13-V-1917.

Le definizioni e teoremi sui logaritmi sono qui esposti senza parlare di irrazionali, e quindi solo con esponenti interi.

Le definizioni, in teoria sono arbitrarie. Dice Pascal: « les définitions sont très libres, et elles ne sont jamais sujettes à être contredites, car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée, un nom tel qu'on voudra ». Leibniz pone però una limitazione pratica: « Definitiones per se quidem sunt arbitrariae, usui tamen accomodari et communi sociorum consensu probari debent ».

Hobbes, a. 1642, aveva già detto: « se le definizioni sono arbitrarie, tutta la matematica, che basa sulle definizioni, è una scienza arbitraria ». Ma, supposte le definizioni arbitrarie, risulta solo arbitraria la forma della matematica, non il contenuto dei teoremi. Anche nella forma noi dobbiamo seguire l'uso dal linguaggio comune e matematico, astenendosi dal fabbricare nuovi nomi, o dare nuovi significati alle parole note, senza necessità. Se ad una parola del linguaggio comune si da un significato molto diverso, come *differenziale, integrale, vettore,* essa figura come una parola nuova, e non c'è pericolo di confusione.

Ma se ad una parola si da un significato poco diverso, il pericolo di confusione è continuo. Ad esempio, « il valore con 4 decimali di π », secondo la maggioranza è 3,1415; ma alcuni intendono 3,1416; ed altri uno qualunque di questi due numeri; e potrei indicare dei trattati ove l'A., dopo avere per definizione attribuito alla frase uno di questi valori, la usa nel primo significato.

La logica matematica, cui appartiene il presente articolo, fu oggetto di nuovi studi. Menzionerò i trattati:

W. M. Kozlowski, *Podstawy logiki,* Warzawa, 1917.

C. I. Lewis, *A survey of symbolic logic,* University of California, 1918. Questo libro è notevole per la ricchissima bibliografia.

In conclusione, alcune definizioni matematiche, che si trovano nei trattati scolastici, sono illusorie. Sopprimendole senz'altro, si guadagna in rigore e semplicità.

Torino, Università.

Giuseppe Peano