Come si insegnava Algebra nel secolo decimosesto [1]

Una chiara idea del modo col quale si insegnava l'Algebra nel secolo decimosesto, può aversi sfogliando un libro assai diffuso allora e non raro a trovarsi nelle nostre biblioteche attuali: dico il *General trattato de' numeri et misure di* NICOLÒ TARTAGLIA, pubblicato in Venezia da Curtio Troiano dal MDLVI al MDLX.

La sesta parte di questa opera voluminosa e prolissa è appunto dedicata all'Algebra, cioè, secondo l'A. all'arte magna, detta in arabo Algebra et Almucabala, over regola della cosa, trovata da Maumett figliolo de Moìsè arabo » (Mohammed ibn Musa) [2]

1. Dall'algebra geometrica dei Greci, attraverso l'algebra retorica, siamo ormai passati all'algebra sincopata, e l'incognita e le sue potenze vengono indicate con speciali abbreviazioni: co $= x$ (cosa), ce $= x^2$ (censo), cu $= x^3$ (cubo), cece $= x^4$, (censo de censo), rel $= x^5$ (1° relato), cecu $= x^6$ (censo del cubo), 2° rel $= x^7$ (secondo relato) ecc. n° indica numero (noto), es. 7.

---

(1) A complemento degli interessanti studi storici sullo sviluppo dell'Algebra in Italia nel Rinascimento, pubblicati dal Ch.mo prof. E. BORTOLOTTI su questo Periodico (vol. IV, n° 2, pag. 137; V, n° 3; VI, n. 4; VII, n° 4; VIII, n° 5; IX, n° 3), si ritiene non inutile dare notizie del metodo col quale veniva esposta l'Algebra nei trattati del secolo XVI°, prendendo a modello uno dei più diffusi, cioè quello del TARTAGLIA.

(2) Secondo ROUSE-BALL *al-gebr = restaurazione* si riferisce al fatto che la medesima quantità può venire aggiunta ai due membri dell'equazione; *al muka-bala = processo di semplificazione* indica la riduzione dei termini simili.

TARTAGLIA si diffonde con molta larghezza di particolari su quelle che ora chiamansi operazioni con monomî, e sulla riduzione dei termini simili.

Qualche esempio, accanto al quale poniamo la trascrizione in simboli moderni, varrà a mostrare il calcolo algebrico in quei tempi.

> 9 co — 5 co = 4 co $(9x - 5x = 4x)$,
> n° fia co fa co, es. 9 co × 8 = 72 co $(9x \times 8 = 72x)$,
> co fia ce fa cu, es. $2x \times 4x^2 = 8x^3$,

a partir censi per numero vien censi, es. $9x^2 : 3 = 3x^2$,
a partir censi per cose viene cose, es. $12x^2 : 4x = 3x$, ecc.
Si ritrovano qui le note regole degli esponenti

$$x^m \times x^n = x^{m+n}, \quad x^m : x^n = x^{m-n}.$$

Invece « il partire dignità minori per le maggiori » è secondo TARTAGLIA cosa impossibile, per il fatto che egli non introduce esponenti negativi.

2. Quanto alle operazioni su binomî, trinomî (e in generale polinomî) si procede come si fa adesso, salvo la differenza di notazione. Valgano i seguenti esempî accanto ad ognuno dei quali poniamo la trascrizione in simboli moderni.

a summar	9 cu p 8 co	$[9x^3 + 8x +$
con	3 cu ,, 6 co	$3x^3 + 6x$
farà	12 cu p 14 co	$12x^3 + 14x]$

da	9 co p 5	$[9x + 5 -$
a cavarne	7 co men 3	$7x - 3$
restarà	2 co p 8	$2x + 8]$.

Qui è da notare la regola $-(-3) = +3$, ed è da notare altresì che dal simbolo *p* usato per più, ne è venuto probabilmente +.

a multiplicar	10 cu men 2 ce	$[10x^3 - 2x^2$
fia	9 cu p 1 ce	$9x^3 + 1x^2$
	p 10 rel m̃e 2 cece	$10x^5 - 2x^4$
	90 cecu men 18 rel	$90x^6 - 18x^5$
fa	90 cecu m̃e 8 rel m̃e 2 cece	$90x^6 - 8x^5 - 2x^4]$.

3. Lo studio delle equazioni del 1° e 2° grado a un'incognita comprende 6 regole o *capitoli*, destinati i primi tre alle equazioni di 1° grado, gli altri a quelle di 2° grado. Non si ha traccia di studio di sistemi di equazioni; i problemi che richiedono sistemi venivano risolti con regole empiriche note sotto il nome di *regola di falsa posizione* (1).

Il primo dei tre capitoli semplici — ossia, come ora diremmo, la prima regola delle equazioni di 1° grado o riducibili al 1° grado — è quando le cose si eguagliano al numero. Allora basta « partire il numero per le cose » e si avrà il valore di una cosa.

Es. 6 cose eguale a 18 n°. $\left(6x=18;\ x=\frac{18}{6}=3\right)$.

Il secondo è quando che li censi si eguagliano pure al numero. In questo caso si divide il numero per il numero dei censi e si estrae la radice quadrata. Es. $12x^2=48$,

$$x^2=\frac{48}{12}=4,\quad x=\sqrt{4}=2.$$

Il terzo è quando che li censi sono eguali alle cose. « Tal equatione in sostantia è simile alla prima » — dice TARTAGLIA — come risulta dallo *schisare* i termini dell'equazione. *Schisare* significa dividere tutti i termini per una stessa potenza della x.

« Però bisogna partire il numero delle co per il numero delli ce e lo aduenimento sarà il valore della cosa ».

Es. $$10x^2=30x,\quad x=\frac{30}{10}=3.$$

4. Il primo dei capitoli composti è quando che li censi et le cose si eguagliano al numero. Es. $ax^2+bx=c$. TARTAGLIA dà la regola seguente (2): Prima si fa in modo che il coefficiente di x^2 sia 1, dividendo tutto per a; ciò posto per avere x si divide per

(1) A. NATUCCI: In che consiste *la regola di falsa posizione* in « Bollettino di Matematica » n. 4, anno XXVII.

(2) Traduco, per brevità, in linguaggio moderno.

metà $\frac{b}{a}$ coefficiente di x, se ne fa il quadrato, si aggiunge $\frac{c}{a}$ (il numero), si estrae dalla somma la radice e si toglie $\frac{b}{2a}$. Insomma, posto $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, si opera come si fa ordinariamente per risolvere l'equazione $x^2 + px - q = 0$, $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

La radice negativa $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, T. la trascura.

« Il secondo capitolo composito » si riferisce al caso che le cose e il numero se eguagliano alli censi: $bx + c = ax^2$.

Anche qui prima si riduce l'equazione ad avere 1 come coefficiente di x^2, col dividere per a. Ciò fatto « dimezzarai il numero delle cose, et quella mità multiplicarai in sè et a quel quadrato aggiongerai il numero et la radice di quella somma più il dimezzamento delle cose, valerà la cosa ».

Insomma, posto $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$, l'equazione diviene: $px + q = x^2$, ovvero, $x^2 - px - q = 0$, e le operazioni indicate dalla regola sono quelle stesse che sono riassunte dalla formula

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Anche qui viene trascurata la radice negativa.

Il terzo capitolo composto si riferisce al caso di censi et numero eguali a cose ($ax^2 + c = bx$). Anche ora per prima cosa si riduce a 1 il coefficiente di x^2 — « prima reccarai tutta la equatione a un censo », — « fatto questo, dimezzerai le cose, et l'una mità multiplicarai in sè, et di quel produtto sempre cava il numero che nell'equation si trova et la radice del rimanente gionta con la mità delle cose, over tratta dalla detta mità valerà la co ». Anche qui le operazioni indicate dalla regola equivalgono a risolvere l'equazione, posta sotto la forma $x^2 - px + q = 0$, secondo la formula $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Siccome in questo caso quando q è positivo e minore di $\frac{p^2}{4}$ si hanno due radici positive, T. aggiunge: « E però alle volte questo terzo capitolo può haver due risposte ».

5. Date così le regole per i vari casi dell'equazione di 2° grado (manca il quarto caso possibile: $x^2 + px + q = 0$, ma questo, che porta a 2 radici negative, T. lo trascura), l'A. le dimostra coi procedimenti dell'algebra geometrica degli antichi.

Diamo, come esempio, la dimostrazione della 1ª regola, e per fare un caso concreto, consideriamo l'equazione

$$x^2 + 24x = 340; \tag{1}$$

risolta essa dà

$$x = -12 + \sqrt{144 + 340} = -12 + 22 = 10.$$

Disegnato un quadrato $abdc$, dai lati ab, ac di esso tagliamo due segmenti $bg = ce = 12$ unità; le parti rimanenti ag, ae saranno eguali, si che condotte per g, e le parallele ai lati le quali si incontrano in i, $agie$ sarà un quadrato e così $ifdh$, mentre $gbfi$, $eihc$ risulteranno rettangoli eguali. Ora poniamo che $ag = ae$ sia la cosa (x). Allora $agie$ sarà il censo (x^2), e $gbfi$, $chie$ saranno misurati da 12 cose ($12x$) mentre $ifdh$ sarà misurato da 144.

Inoltre per la (1) l'area del quadrato $agie$ sommata con quelle dei rettangoli $gbfi$, $eihc$ dovrà dare 340, sicchè sommata a 144 farà 484. Ora è chiaro come si possa ottenere $x = ag = ae$. Fatto il quadrato di 12 (metà delle cose), gli si aggiunge il numero (340), dal risultato (484) si estrae la radice e si ha il lato ab; tolto 12 (metà delle cose) risulta il valore della cosa e la regola è giustificata.

6. TARTAGLIA aggiunge i capitoli:

1°) De censi de censi eguali a numero.

Es. $$8x^4 = 128, \quad x = \sqrt{\sqrt{128/8}} = 2.$$

2°) De censi de censi et censi eguali a numero.

3°) De censi et numero eguali a censi de censi.

4°) De censi de censi et numero eguali a censi.

Tratta cioè i 3 casi seguenti dell'equazione biquadratica:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 &= c, \\ bx^2 + c &= ax^4, \\ ax^4 + c &= bx^2, \end{aligned}$$

che risolve come i corrispondenti casi dell'equazione di 2°

grado, trovando prima x^2 e poi — con un'estrazione di radice — x.

Il quarto caso possibile $ax^4 + bx^2 + c = 0$, non viene considerato da Tartaglia, perchè — riguardandosi in quei tempi i coefficienti come numeri positivi (altrimenti la distinzione dei vari casi sarebbe stata inutile) — tale caso dà per x^2 valori entrambi negativi e però non porta a valori reali della x.

7. Il famoso capitolo di cubo e cosa eguali a numero, che espone in versi la regola di risoluzione dell'equazione cubica in un caso particolare, non trovasi nel General Trattato ma bensì in Quesiti et inventioni diverse — Quesito XXXIII (1).

8. A foglio 11 e seg. della parte VI^a, dopo la trattazione delle equazioni che abbiamo riassunto, troviamo « alcuni documenti utilissimi et necessarî per instruttione de gli ordini che si hanno da osseruare in l'arte di Algebra ».

In questi documenti T. tratta prima « della positione de gli casi over quesiti », ossia dà norme per porre in equazione i problemi; poi tratta « del levare gli superflui et ristorare gli diminuti delle equazioni ».

« Ristorare gli diminuti » significa far si che spariscano i termini negativi aggiungendo i loro opposti ad entrambi i membri dell'equazione. Si ha qui una conferma della cura che ponevano gli antichi nell'evitare i termini negativi, ciò che dipende dal fatto che essi non possedevano ancora concettualmente questa estensione del concetto di numero, e se i negativi li chiamavano numeri, aggiungevano l'aggettivo « surdi o ficti ».

Le necessità algoritmiche hanno spinto i matematici a considerare come numeri anche i negativi, ma la vera giustificazione di questa estensione del concetto di numero si è avuta soltanto quando si sono potuti applicare i numeri relativi alle grandezze dotate di doppio senso (2).

---

(1) Vedasi: Ettore Bortolotti: *L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI.* « Periodico di Matematiche », vol. V della IV^a serie, n. 3.

(2) A. Natucci. *Il concetto di numero e le sue estensioni.* Editori F.lli Bocca, Torino, § 26-29.

« Li superflui sono quelle quantità de uno medesimo genere [ora diremmo: termini simili] che si trovano in l'uno et l'altro estremo [membro dell'equazione], le qual quantità si abbatteno sempre l'una dall'altra, acciochè il rimanente resti solamente in uno de essi estremi, cioè in quello nel quale se ne attrovano più di esse quantità di uno medesimo genere ». Questo si chiama « levare li superflui ». Esempio: Data l'equazione: $4x + 10 = (20 - x)^2$, che risulta dal problema « dividere 20 in due parti tali che il quadruplo dell'una aumentato di 10 eguagli il quadrato dell'altra », sviluppando si ha:

$$4x + 10 = 400 - 40x + x^2,$$

e « ristorando gli diminuti »:

$$44x + 10 = 400 + x^2,$$

e levando i superflui:

$$44x = 390 + x^2.$$

Ci si riduce così al terzo capitolo composito « censi et numero eguali a cose ».

9. Se si osserva che in T. si trovano altresì regole per « leuare le radici de gli estremi delle equationi », ossia per liberare le equazioni dai radicali; per « leuare gli rotti delle equationi » (liberare le equazioni dai denominatori), e per « degradare ouer schisare delle equationi », cioè per abbassare il grado delle equazioni divisibili per una potenza di x, bisogna concludere che gli algebristi del 500 conoscevano tutte le regole essenziali del calcolo algebrico relative alla risoluzione delle equazioni.

Pertanto la mancata riduzione ad unico tipo delle equazioni di 2° grado va attribuita — come sopra è detto — alla ripugnanza di introdurre coefficienti negativi.

A. Natucci