# Sul principio d'identità dei polinomi

Diversi autori hanno scritto, di recente, su questo principio, per renderne indipendente la dimostrazione dalla teoria della divisione dei polinomi.

Infatti la dimostrazione diretta del principio discende dal teorema « se un polinomio $f(x)$ s'annulla per $x = \alpha$, esso è divisibile per $x - \alpha$, ed il teorema stesso si suole giustificare sulla base della anzidetta teoria generale ».

Ma, trovandomi commissario in un concorso per scuole medie, mi è occorso di osservare che l'indicato teorema si può dimostrare semplicemente come segue.

I) Se il polinomio $f(x)$ s'annulla per $x = 0$, esso è divisibile per $x$.

Infatti per $x = 0$ spariscono tutti i termini del polinomio salvo il termine costante $a_n$, che deve perciò annullarsi.

II) Se il polinomio $f(x)$ s'annulla per $x = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$, esso è divisibile per $x - \alpha$.

Infatti si ponga

$$x - \alpha = y, \quad x = y + \alpha.$$

Allora

$$f(x) = f(y + \alpha) = \varphi(y),$$

e poichè $\varphi(y)$ s'annulla per $y = 0$

$$\varphi(y) = y\psi(y)$$

cioè

$$f(x) = (x - \alpha)\psi(x - \alpha) = (x - \alpha)\,\theta(x). \qquad \text{c. d. d.}$$

Nel ragionamento precedente non occorre alcun calcolo: basta sapere (ed è conoscenza ovvia per chi possieda gli elementi dell'Algebra) che, cambiando in un polinomio $x$ in $x \pm \alpha$, si ottiene un altro polinomio dello stesso grado in $x$.

Dal teor. II segue, com'è noto, il principio d'identità dei polinomi. Si può procedere, per esempio, per induzione da $n$ ad $n+1$.

Se il principio è vero per i polinomi d'ordine $n$ si tratta di mostrare che « qualora $f_{n+1}(x)$ s'annulli per $n+2$ valori distinti $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$ di $x$, i suoi coefficienti sono tutti nulli ».

Infatti si avrà

$$f_{n+1}(x) = (x - \alpha_0) f_n(x)$$

dove

$$f_n(\alpha_1) = f_n(\alpha_2) \dots = f_n(\alpha_n) = 0,$$

e perciò $f_n$ è identicamente nullo.

F. Enriques