NUOVO METODO PER LO STUDIO E PER IL CALCOLO DELLE FUNZIONI TRASCENDENTI ELEMENTARI

I. — Funzioni circolari.

1. - Lemma 1°. — *Essendo a, b due numeri tali che sia $|b| > |a|$, si formi la successione*

(1) $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\ldots a_m, b_m, \ldots\ldots a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} \ldots\ldots$

colla seguente legge. Sia a_1 la media aritmetica di a e di b; sia b_1 la media geometrica di b e di a_1; in generale sia:

$$(2) \qquad a_{m+1} = \frac{1}{2}(a_m + b_m) \qquad\qquad (3) \quad b_{m+1} = \sqrt{b_m \, a_{m+1}}$$

Se tutti i radicali, che ci danno le b_m vengono presi con lo stesso segno del numero b, allora a_n, b_n sono variabili convergenti, che tendono, col crescere di n, ad un medesimo limite $\psi(a, b)$.

Distingueremo due casi secondo il segno di b; sia dapprima $b > 0$, allora tutte le b_m sono per ipotesi positive: poichè $|b| > |a|$ ed $a_1 = \frac{a+b}{2}$, il numero a_1 sarà positivo, minore di b e maggiore di a; poichè $b_1 = +\sqrt{a_1 . b}$ e $b > a_1$, si avrà $a_1 < b_1 < b$; quindi $b > b_1 > a_1 > a$. Nell'identico modo si dimostra essere: $b_1 > b_2 > a_2 > a_1$; $b_2 > b_3 > a_3 > a_2$; ecc. dalle quali diseguaglianze risulta che col crescere dell'indice le b vanno diminuendo, le a aumentando; ma le b restano sempre superiori alle a. Inoltre la differenza $a_n - b_n$ decresce indefinitamente: infatti $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$ e per conseguenza $a_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$; e siccome b_n è compreso tra b_{n-1} ed a_n si ha

$$a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

Ne segue che a_n, b_n sono due variabili convergenti, ed hanno un limite.

Sia ora $b<0$, tutte le b_m saranno per ipotesi negative; anzi si riconosce immediatamente che se poniamo: $a'=-a$, $b'=-b$ e formiamo i numeri

$$(\alpha) \qquad a',\ b',\ a'_1,\ b'_1,\ a'_2,\ b'_2,\ldots\ldots$$

in modo che (analogamente a quanto si è indicato per la (1)) ogni a'_n sia la media aritmetica e ogni b'_n sia la media geometrica dei due numeri che lo precedono, un numero qualunque della (1) non differisce che nel segno dal corrispondente della (α). Ma per il primo caso il limite di a'_n e di b'_n (per n crescente indefinitamente) esiste ed è positivo, perchè $b'>0$; questo limite cambiato di segno sarà dunque il limite di a_n e di b_n, limite che perciò esiste ed è negativo.

Indicherò con $\psi(a,b)$ il limite delle variabili convergenti a_n, b_n per n crescente all'infinito.

Corollario. — *Il limite $\psi(a,b)$ è dello stesso segno di b e resta moltiplicato per un numero qualunque* K, *se si moltiplicano per* K *i numeri a, b.*

Lemma 2°. — *Se $b>0$, il limite $\psi(a,b)$ non solo è compreso tra un numero a e un numero b (consecutivi o no) qualunque, ma anche, per ogni valore di m tra $b_m-\frac{1}{3}(b_{m-1}-b_m)$ ed $\frac{1}{3}(a_m+2b_m)$.*

La prima parte di questo lemma, importante non per la teoria ma per il calcolo numerico di $\psi(a,b)$, risulta subito dalla dimostrazione precedente. Per la seconda parte si osservi che seguendo la via indicata nel *Traité de Géométrie* par E. Rouché et Ch. De Comberousse a proposito del teorema di Schwab, si ha

$$b_m-\frac{1}{3}(b_{m-1}-b_m)<\psi(a,b)<a_m+\frac{1}{3}(a_m-a_{m-1})\,;$$

ora, posto nel terzo membro di questa diseguaglianza $m+1$ in luogo di m, otteniamo appunto a causa della (2)

$$b_m-\frac{1}{3}(b_{m-1}-b_m)<\psi(a,b)<\frac{1}{3}(a_m+2b_m)$$

2. - Teorema. — *Se $a^2+c^2=b^2$, sussiste la identità*

$$(3) \qquad \text{arc.}\cos\frac{a}{b}=\frac{c}{\psi(a,b)}\ldots\ldots$$

che dà un arco in funzione del suo coseno. In questa identità il segno di c è indifferente, e per arc cos $\frac{a}{b}$ *s'intende un arco il cui valore assoluto non supera un angolo piatto.*

Sia dapprima $b > 0$; quando a, b tendono ad uno stesso limite t la frazione $\frac{a}{b}$ tende ad 0, l'arc cos $\frac{a}{b}$ tende a zero e perciò il rapporto fra il suo seno $\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$, e l'arco stesso $\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}}$ tende ad 1 e perciò

$$b\,\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}} = \frac{c}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}}$$

tende precisamente a t. In altre parole: *se noi possiamo far sì che a, b differiscano da un numero t di una quantità piccola ad arbitrio, lo stesso accadrà di* $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}}$.

Se in questa frazione pongo ora in luogo di a e di b rispettivamente a_1 e b_1 essa diventa

$$\frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_1}{b_1}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a+b}{2\sqrt{b\frac{a+b}{2}}}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}};$$

ma se $\cos y = \frac{a}{b}$, $\cos\frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{a+b}{2b}}$; quindi

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b} = 2\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}$$

e quindi
$$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_1}{b_1}}$$

Nell'identico modo si prova

$$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_1}{b_1}} = \frac{\sqrt{b_2^2-a_2^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_2}{b_2}} = \ldots\ldots \frac{\sqrt{b_n^2-a_n^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_n}{b_n}} = \ldots\ldots$$

Ma coll'ingrandire abbastanza n posso fare sì che a_n e b_n differiscano da $\psi(a, b)$ di una quantità piccola ad arbitrio; lo stesso, per il già detto, accadrà di $\frac{\sqrt{b_n^2-a_n^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a_n}{b_n}}$, ma questa frazione è eguale a $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}}$, quindi la differenza fra $\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}}$, e $\psi\,(a, b)$ è minore di qualsiasi quantità arbitraria ε, ossia (ricordando che $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

$$\frac{c}{\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}} = \psi\,(a, b)$$

e la (3) è dimostrata. Il segno dato a c è indifferente, perchè archi differenti solo per il segno hanno uguali coseni.

Se $b < 0$ si ha: $-b > 0$ e per il caso precedente

$\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b} = \text{arc cos}\,\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{c}{\psi\,(-a, -b)} = -\dfrac{c}{\psi\,(a, b)}$ e la (4) è ancor vera, sia perchè il segno meno si può anche dare a c, sia perchè, come or ora si fece notare,

$$\cos\left(-\text{arc cos}\,\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}\,.$$

Al lettore poi che chiedesse per qual ragione tra i valori di $\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}$ la (3) ce ne dia uno minore di π in valore assoluto, ricorderò che per la dimostrazione si usò la proprietà, che $\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}$ tende a zero per a, b tendente ad uno stesso valore t e che per $b > 0$ abbiamo supposto, come si vede dal corso della dimostrazione che la metà, il quarto, l'ottavo ecc. del nostro arco abbiano positivo il coseno.

Sia p. es. da trovarsi $x = \text{arc cos}\,\dfrac{3}{5}$ coll'approssimazione di $2:100000$

Si avrà

$$\begin{array}{ll} a = 3 & b = 5 \\ a_1 = 4 & b_1 = 4{,}47214 \\ a_2 = 4{,}23607 & b_2 = 4{,}352500 \\ a_3 = 4{,}294283 & b_3 = 4{,}32329 \end{array}$$

per il secondo lemma $\psi\,(a, b) = \psi\,(3, 5)$ è compreso tra $b_3 - \dfrac{1}{3}\,(b_2 - b_3)$ e $\dfrac{1}{3}\,(a_3 + 2\,b_3)$ cioè tra 4,31355 e 4,313621 e per la (4) l'arc cos $\dfrac{3}{5}$ è compreso tra 0,92729 e 0,92731; la media aritmetica dei due ultimi numeri cioè 0,92730 è il valore cercato; valore ottenuto con la ricerca di tre medie geometriche, una divisione (facilmente esiguibili coi logaritmi) ed altre poche semplicissime operazioni.

L' ampiezza dell' arco x è 9273 : 174,533 = 53°, 7', 49'', essendo 0,0174532925..... la lunghezza dell'arco di 1°.

3. - Problema. — *Trovare arc sen $\frac{a}{b}$ per a, b positivi.*

Essendo $a^2 + c^2 = b^2$, si ha

$$\text{arc sen}\,\frac{a}{b} = \text{arc cos}\,\frac{c}{b} = \frac{a}{\psi(c,b)}.$$

Così per es.

$$\text{arc sen}\,\frac{4}{5} = \text{arc cos}\,\frac{3}{5} = \frac{4}{\psi(3,5)} = 0{,}92730 = 53°\,7'\,49''. \tag{4}$$

Similmente si troverebbero arc tg $\frac{a}{b}$, ecc.

4. - Problema. — *Dedurre dalle precedenti formule il teorema di Schwab.* Questo elegantissimo teorema non è che un caso particolare della (3). Poniamo nella (3) $a = 0$ (si noti che non si può porre $b = 0$ perchè per ipotesi $|b| > |a|$) ed otteniamo $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2b}\psi(0,b)$, che per $b = \frac{1}{2}$ ci dice appunto

$$\frac{1}{\pi} = \psi\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

5. - Teorema. — *Se a, b, c sono tre numeri positivi tali che $a^2 + c^2 = b^2$, hanno luogo le identità:*

$$\frac{c}{\psi(a,b)} + \frac{a}{\psi(c,b)} = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \tag{5}$$

$$\frac{1}{\psi(a,b)} + \frac{1}{\psi(-a,b)} = \frac{\pi}{c} \ldots\ldots \tag{6}$$

$$\frac{c}{\psi(-a,b)} - \frac{a}{\psi(c,b)} = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \tag{7}$$

La (5) si ottiene sostituendo in arc cos $\frac{a}{b}$ + arc sen $\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$ i valori che per arc cos $\frac{a}{b}$ e per arc sen $\frac{a}{b}$ ci danno la (3) e la (4).

La (6) si dimostra sostituendo in arc cos $\frac{a}{b}$ + arc cos $\frac{-a}{b} = \pi$ i valori che per arc cos $\frac{a}{b}$ e per arc cos $\frac{-a}{b}$ ci da la (3) e dividendo per c.

La (7) risulta dall'eliminazione di $\psi(a, b)$ tra la (5) e la (6).

Tutte queste identità sono molto più generali del teorema di Schwab, che ne è un particolarissimo caso.

II. — Definizione elementare delle funzioni iperboliche.

6. - Se a, b sono positivi, ma $a > b$ si riconosce facilmente, anche in questo caso, l'esistenza di $\psi(a, b)$; la (3) diventa in tale caso $\operatorname{arc}\cos\frac{a}{b} = i\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\psi(a,b)}$, ed è naturale il definire

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{arc}\cosh\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\psi(a,b)}\cdots\cdots$$

Nello stesso modo s'introdurrebbero le altre funzioni iperboliche. La (8) e le formule analoghe facilmente scopribili ci possono servire a calcolarne i valori e trovarne, come si dirà più avanti, le proprietà; ecco ora un esempio semplicissimo del modo, con cui queste si potrebbero studiare. Per definizione del limite $\psi(a, b)$ si ha

$$\psi(a,b) = \psi(a_1, b_1) = \psi\left(\frac{a+b}{2},\ \sqrt{b\,.\,\frac{a+b}{2}}\right).$$

Sostituendo per il primo ed il terzo membro di queste identità i loro valori dati dalla (8) si ottiene la nota proprietà

$$\operatorname{arc}\cosh\frac{a}{b} = \operatorname{arc}\cosh\sqrt{\frac{a+b}{2b}}\,.$$

III. — Funzione logaritmica.

7. - Lemma. — *Quando x tende ad 1 la frazione $\frac{x-1}{\log x}$ tende ad un limite.*

Questa proprietà è notissima, ma voglio stabilirne qui una elegantissima dimostrazione.

Posto $y = \log x$, per $y > 0$ la frazione $\frac{x-1}{\log x} = \frac{10^y-1}{y}$ è sempre positiva; basta quindi provare che essa diminuisce con y per dimostrare che tende ad un limite.

Moltiplichiamo y per la frazione $\frac{h}{k}$ minore di 1 ed a termini interi. Ponendo $y_1 = \frac{y}{k} = \log x_1$ ed $y_2 = \frac{h}{k}y = hy_1 = \log x_2$ otteniamo poichè $x = x_1^k$

$$(\beta) \qquad \frac{y}{10^y-1} = \frac{x-1}{\log x} = \frac{x_1^{k-1}+x_1^{k-2}+\ldots\ldots+x_1+1}{k}\cdot\frac{x_1-1}{\log x_1}\cdots\cdot$$

e poichè $x_2 = x_1^h$

$$(\gamma) \qquad \frac{10^{y_2}-1}{y_2} = \frac{x_2-1}{\log x_2} = \frac{x_1^{h-1}+x_1^{h-2}+\ldots\ldots+x_1+1}{h} \cdot \frac{x_1-1}{\log x_1} \cdots\cdots$$

Ma essendo $x_1 > 1$, la frazione $\frac{x_1^{m-1}+x_1^{m-2}\ldots\ldots+1}{m}$ con m intero aumenta, se si accresce m di una unità, perchè

$$\frac{x_1^m+\ldots\ldots+1}{m+1} - \frac{x_1^{m-1}+\ldots\ldots+1}{m} = \frac{m x_1^m - x_1^{m-1} - \ldots\ldots -1}{m(m+1)} =$$

$$= \frac{(x_1^m - x_1^{m-1}) + \ldots\ldots + (x_1^m - 1)}{m(m+1)} > 0,$$

ed aumenta a fortiori anche se si accresce m di più unità. Quindi, essendo $k > h$, si ha

$$\frac{x_1^{k-1}+x_1^{k-2}+\ldots+x_1+1}{k} > \frac{x_1^{h-1}+x_1^{h-2}+\ldots+x_1+1}{h},$$

ed in virtù delle (β) e (γ) la $\frac{10^y-1}{y}$ è diminuita moltiplicando y per la $\frac{h}{k} > 1$.

Coi metodi con cui si trattano ora i numeri irrazionali si dimostra che ciò avviene anche se $\frac{h}{k}$ è irrazionale.

8. - Teorema. — *Se a, b sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica dei due numeri a_0 e b_0, esiste l'identità*

$$(9) \qquad \log\frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{b_0}\frac{a_0-b_0}{\psi(a,b)} \cdots\cdot$$

dove $\frac{1}{q}$ è una costante per un medesimo sistema di logaritmi.

Per dimostrare la (9) seguiremo la stessa via tenuta per dimostrare la (3). Quando a e b tendono ad un medesimo limite t, i numeri a_0 e b_0 tendono pure allo stesso limite t, la frazione $\frac{a_0}{b_0}$ tende ad 1 e la frazione

$$\frac{a_0-b_0}{\log\frac{a_0}{b_0}} = b_0\,\frac{\frac{a_0}{b_0}-1}{\log\frac{a_0}{b_0}}$$

tende quindi al numero t moltiplicato per il limite q di $\frac{x-1}{\log x}$ quando x tende ad 1.

In altre parole: *Se si possono rendere a e b tanto poco differenti, quanto si vuole, da un numero t, la frazione* $\varphi = \dfrac{a_0 - b_0}{\log \dfrac{a_0}{b_0}}$ *differisce di quanto poco si vuole da $q\,t$.*

Di più, se nella φ poniamo in luogo di a, b rispettivamente a_1 e b_1 essa diventa (essendo $a_0 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$, $b_0 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{b\, a_1}$).

$$\frac{2\sqrt{a^2 - b}}{2\log\dfrac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\log\left(\dfrac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2} = \frac{a_0 - b_0}{\log\dfrac{a_0}{b_0}},$$

e la frazione φ non è cambiata per effetto di questa sostituzione, e non muterà quindi di valore neppure se in luogo di a_1 e b_1 porrò a_2 b_2 ecc. ecc.

Ma coll'ingrandire abbastanza n posso fare sì che a_n, b_n differiscano da $\psi(a, b)$ di una quantità piccola ad arbitrio; $q.\psi(a, b)$, per il già detto, differirà di quanto poco si vuole da φ, dove in luogo di a, b si sono posti rispettivamente a_n, b_n; ma questa sostituzione, si dimostrò testè, non cambia il valore della φ, quindi la differenza fra φ e $q.\psi(a, b)$ è minore di qualsivoglia numero arbitrario ε, e perciò

$$\varphi = q,\ \psi(a, b)$$

e da questa eguaglianza si deduce la (9).

Così la $\psi(a, b)$ per $a > b$ (che già ci servì per lo studio delle funzioni iperboliche) serve pure per le funzioni logaritmiche.

Anche in questo caso il secondo lemma del § 1 riesce di massima utilità nei calcoli numerici; per la sua dimostrazione in questo caso, in cui $a > b$, basta in tutte le disuguaglianze del *Traité de Géométrie* sopracitato che servirono alla dimostrazione del secondo lemma nel caso di $a < b$, sostituire al segno $<$ il segno $>$ e viceversa. Si noti pure che anche $\sqrt[3]{\frac{1}{2} a_m\, b_m\, (a_m + b_m)}$ è un valore approssimato di $\psi(a, b)$; questo radicale è il limite, a cui si tende particolare da a_{m+1}, b_{m+1} con successive medie geometriche.

IV. — Definizione elementare dei logaritmi neperiani.

9. - La (9) serve a trovare i logaritmi dei numeri di qualunque sistema, basta perciò (per un noto teorema di algebra elementare) far variare la quantità q; il più naturale dei sistemi di logaritmi è quello corrispondente a $q=1$, la cui base indicherò provvisoriamente con z.

Teorema. — *I logaritmi corrispondenti a $q=1$ sono i logaritmi neperiani.*

Infatti poichè $\log_z \frac{a}{b} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a,b)}$, la (9) si può scrivere

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{q} \log_z \frac{a_0}{b_0},$$

ma d'altra parte

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \log_{10} z \,.\, \log_z \frac{a_0}{b_0}$$

quindi

$$\frac{1}{q} = \log_{10} z; \quad q = \lim_{y=0} \frac{10^y - 1}{y} = \log_e 10$$

e perciò $z = e = 2{,}718\ldots$ base dei logaritmi neperiani come v. d.

Si possono quindi *definire elementarmente i logaritmi neperiani dall'uguaglianza*

$$\log \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a,b)} \tag{10}$$

e dedurne poi in modo assai semplice *il logaritmo neperiano di un numero p eguaglia $\lim\limits_{y=0} \frac{p^y - 1}{y}$ e che la base dei logaritmi neperiani è $\lim\limits_{y=0} (1+y)^{\frac{1}{y}}$.*

Esempio. — Trovare $\log_e 7$.

Nel nostro caso

$$\begin{array}{ll} a_0 = 7 & b_0 = 1 \\ a = 4 & b = 2{,}645751 \\ a_1 = 3{,}3228755 & b_1 = 2{,}965046 \\ a_2 = 3{,}14396075 & b_2 = 3{,}0531931 \\ a_3 = 3{,}0985769 & b_3 = 3{,}0758 \\ a_4 = 3{,}087188 & b_4 = 3{,}08149 \end{array}$$

Per il secondo lemma $\psi(a,b)$ è compreso tra $\frac{1}{3}(a_4 + 2b_4)$ e $b_4 + \frac{1}{3}(b_4 - b_3)$, cioè il suo valore approssimato è 3,083389. Per la (10) si ha che $\log_e 7 = 1{,}9459101485\ldots$ e l'errore è minore di $6:10^{10}$; a questo risultato si giunge con la ricerca di sole quattro medie geometriche.

V. — Osservazioni e conclusione.

Ecco dunque dimostrato e generalizzato in più modi nelle (5), (6), (7) il teorema di Schwab *e col mezzo della sola funzione* $\psi(a, b)$ *espresse tutte le funzioni trascendenti elementari e definite elementarmente alcune* (funzioni iperboliche e logaritmi neperiani), *il cui vero significato manca nei testi elementari.* Questo fatto *di essere tutte queste funzioni esprimibili mediante una sola funzione a variabili reali* è un fatto capitale e credo nuovo; le loro molteplici relazioni sono facilmente dimostrabili col mezzo delle (3), (8), (9), (10); le loro proprietà si riducono tutte a proprietà della $\psi(a, b)$ con $a < b$ oppure con $a > b$: dimostrate queste proprietà per $a < b$ con la (3), per $a > b$ con le (9) ed (10) si possono, come avevamo promesso, *trovare le proprietà delle funzioni iperboliche mediante la* (8); *ammesse queste ultime come naturale estensione delle proprietà delle funzioni circolari si ottiene dalla* (11) *un nuovo metodo per trattare la teoria dei logaritmi.* Ma a tutto questo basta avere accennato, notando che queste proprietà di $\psi(a, b)$ possono riuscire preziose nei calcoli numerici di questo limite e cooperare col secondo lemma del § 1 per una sufficientemente rapida approssimazione. La $\psi(a, b)$ ha pure una notevole importanza pratica perchè offre *un mezzo completo ed elementarmente dimostrabile,* (il che fin ora, credo, mancava affatto) di calcolare le tavole trigonometriche e logaritmiche: specialmente le prime, quando si usino le tavole dei logaritmi.

Venezia, 10 ottobre 1897.

Guido Fubini
studente nella R. Scuola Normale sup. di Pisa.