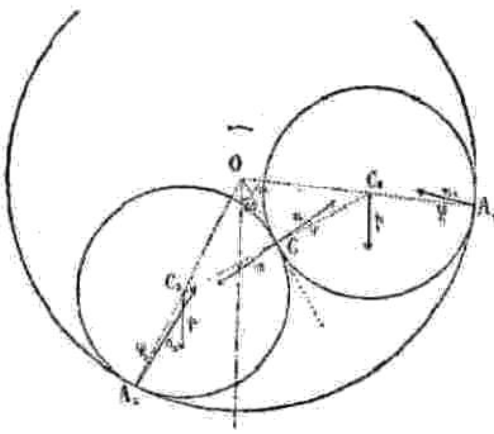
Su di un apparente paradosso meccanico segnalato da Giglio-Tos

Il prof. GIGLIO-TOS in un suo recente lavoro (¹) recante un nuovo contributo alla sua ben nota e suggestiva interpretazione dei fenomeni fondamentali della vita su sole basi fisico-chimiche, è stato indotto a ritenere, per spiegare una particolarità dello sviluppo di certe uova, che, in opportune condizioni, il sistema formato da due sferette pesanti, identiche, poggiate sul fondo di una sfera cava più grande, possa rimanere in equilibrio ancorchè le due sferette non stiano il più in basso possibile e, conseguentemente, la congiungente i loro centri non sia orizzontale. Precisamente il GIGLIO-TOS, realizzando il sistema in discorso mediante due sferette di acciaio da cuscinetti a sfere messe dentro una sfera cava di vetro, ha mostrato sperimentalmente che, se il rapporto del raggio r delle sferette a quello R della sfera cava non è troppo piccolo, sono possibili posizioni di equilibrio in cui l'angolo ω formato dall'accennata congiungente dei centri con l'orizzonte, assume valori di parecchie decine di gradi.

Quest'esperimento, ove — ingannati dalla piccolezza dell'attrito *volvente* di sferette di acciaio lucido fra loro o su vetro — si prescinda completamente dalla considerazione delle forze d'attrito, rimane inesplicabile, chè considerazioni del tutto elementari mostrano immediatamente come (escluso il solo caso di $r = R/2$, nel quale si ha equilibrio indifferente

(¹) *Die Wirkung der Schwerkraft auf die Richtung der ersten Furchungsspindel in Ei des Seeigels.* [Wilhelm Roux's Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen, Bd. 107 (1926)].

perchè il baricentro G del sistema formato dalle due sferette viene a coincidere col centro O della sfera cava) non possa aversi equilibrio senza che il raggio OG sia verticale e, conseguentemente, la congiungente C_1C_2 i centri delle due sferette orizzontale.



L'apparente paradosso si elimina osservando che il sistema in esame è tale che in tutti quegli spostamenti in cui varia l'angolo ω devono necessariamente avvenire degli *strisciamenti* delle sferette fra loro o contro la sfera cava e quindi entra in gioco l'attrito *radente* ch'è tutt'altro che trascurabile. Ne segue che potrà aversi equilibrio ancorchè non sia $\omega = 0$ purchè quest'angolo sia inferiore ad un certo ω_0 che, ancorchè i coefficienti d'attrito siano molto piccoli, raggiunge valori elevati allorchè il rapporto r/R assume valori vicini ad $1/2$.

Mi permetto di pubblicare il breve calcolo necessario per pervenire a questa conclusione, benchè abbia un carattere affatto elementare, considerato l'interesse della questione da cui esso prende origine.

Il problema in esame è manifestamente riducibile ad un problema piano e precisamente ad un problema nel piano verticale OC_1C_2, che è quello della figura precedente. Inoltre è ben chiaro che la posizione del sistema nel piano predetto resta pienamente determinata non appena sia fissato il valore dell'angolo ω. Pertanto, fissato che sia questo angolo, devono rimanere pienamente determinate le reazioni vincolari che si sviluppano nei tre punti A_1, A_2 e G e, in particolare, gli angoli φ_1, φ_2 e ψ che le rette secondo cui si esercitano dette reazioni formano con le rispettive normali alle superficie a contatto; in altre parole: gli angoli φ_1, φ_2 e ψ dovranno risultare funzioni univoche di ω:

$$\varphi_1 = \varphi_1(\omega), \quad \varphi_2 = \varphi_2(\omega), \quad \psi = \psi(\omega),$$

e se ne conclude che sono possibili tutte e sole quelle posizioni di equilibrio del sistema per cui ω soddisfa alle tre disuguaglianze

$$(1) \qquad |\varphi_1(\omega)| \leq \varphi_0, \quad |\varphi_2(\omega)| \leq \varphi_0, \quad |\psi(\omega)| \leq \psi_0,$$

dove φ_0 e ψ_0 denotano rispettivamente le semiaperture dei coni d'attrito delle sferette contro la sfera cava e delle sferette fra loro.

Come si vede, tutto sta a determinare le tre funzioni $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ e $\psi(\omega)$. A tale scopo cominciamo con l'osservare che — dette rispettivamente n_1 ed n le intensità delle reazioni vincolari in A_1 e G — le componenti orizzontali e verticali di dette forze e i loro momenti rispetto a C_1 hanno, con una conveniente scelta dei versi positivi (¹), le espressioni seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l}
\quad \text{comp. orizz. di } n_1 = n_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\omega+\varphi_1\right) = -n_1 \operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1) \\
\quad \text{comp. vert. di } n_1 = n_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\omega+\varphi_1\right) = n_1 \cos(\alpha+\omega+\varphi_1) \\
\text{mom. di } n_1 \text{ risp. a } C_1 = -n_1 r \operatorname{sen}\varphi_1 \\
\quad \text{comp. orizz. di } n = n\cos(\omega+\psi) \\
\quad \text{comp. vert. di } n = n \operatorname{sen}(\omega+\psi) \\
\text{mom. di } n \text{ risp. a } C_1 = -nr \operatorname{sen}\psi,
\end{array}\right.$$

dove α denota l'angolo invariabile $GOC_1 = GOC_2$, determinato manifestamente dall'uguaglianza

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{R-r}.$$

Conseguentemente, per l'equilibrio della sferetta di centro C_1, occorre e basta che si abbia:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l}
-n_1 \operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1) + n\cos(\omega+\psi) = 0 \\
\quad n_1 \cos(\alpha+\omega+\varphi_1) + n \operatorname{sen}(\omega+\psi) = p \\
-n_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - n \operatorname{sen}\psi = 0,
\end{array}\right.$$

(¹) Il verso positivo delle componenti orizzontali delle forze è quello che — nella figura — procede da sinistra verso destra mentre quello delle componenti verticali procede dal basso verso l'alto. Quanto al verso positivo delle rotazioni esso deve essere fissato in modo che l'angolo dei due anzidetti versi positivi, nell'ordine in cui sono stati nominati, risulti uguale a $+\pi/2$; esso è quindi quello contrario alle lancette dell'orologio. Gli angoli φ_1, φ_2, ψ ed ω sono considerati in valore ed in segno.

dove p denota il peso di ciascuna delle sferette. Similmente — detta n_2 l'intensità della reazione in A_2 e tenuto conto che la reazione della sferetta di centro C_1 su quella di centro C_2 dev'essere uguale e contraria a quella della seconda sulla prima — si trova che per l'equilibrio della sferetta di centro C_2 è necessario e sufficiente che si abbia:

$$(3) \qquad \begin{cases} n_2 \operatorname{sen}(\alpha - \omega - \varphi_2) - n \cos(\omega + \psi) = 0 \\ n_2 \cos(\alpha - \omega - \varphi_2) - n \operatorname{sen}(\omega + \psi) = p \\ -n_2 \operatorname{sen} \varphi_2 - n \operatorname{sen} \psi = 0. \end{cases}$$

Le (2) e le (3) costituiscono assieme un sistema di 6 equazioni fra le 7 variabili n_1, n_2, n, φ_1, φ_2, ψ e ω fra cui è facile eliminare anzitutto le prime tre variabili. Invero, riguardando la 1ª e la 3ª delle (2) come formanti un sistema di due equazioni lineari ed omogenee in n_1 ed n, si ha senz'altro che dev'essere

$$\begin{vmatrix} -\operatorname{sen}(\alpha + \omega + \varphi_1) & \cos(\omega + \psi) \\ -\operatorname{sen} \varphi_1 & -\operatorname{sen} \psi \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha + \omega + \varphi_1) \operatorname{sen} \psi + \cos(\omega + \psi) \operatorname{sen} \varphi_1 = 0.$$

Analogamente, dalla 1ª e 3ª delle (3), si ha

$$\operatorname{sen}(\alpha - \omega - \varphi_1) \operatorname{sen} \psi + \cos(\omega + \psi) \operatorname{sen} \varphi_2 = 0.$$

Finalmente una terza equazione in φ_1, φ_2, ψ ed ω si ottiene osservando che la 2ª delle (2) e la 2ª delle (3), tenendo conto delle equazioni loro rispettivamente precedenti, possono scriversi

$$\begin{cases} \dfrac{\cos(\omega + \psi)}{\operatorname{sen}(\alpha + \omega + \varphi_1)} \cos(\alpha + \omega + \varphi_1) + \operatorname{sen}(\omega + \psi) = \dfrac{p}{n} \\ \dfrac{\cos(\omega + \psi)}{\operatorname{sen}(\alpha - \omega - \varphi_2)} \cos(\alpha - \omega - \varphi_2) - \operatorname{sen}(\omega + \psi) = \dfrac{p}{n} \end{cases}$$

sicchè dev'essere

$$\frac{\cos(\omega + \psi) \cos(\alpha + \omega + \varphi_1) + \operatorname{sen}(\omega + \psi) \operatorname{sen}(\alpha + \omega + \varphi_1)}{\operatorname{sen}(\alpha + \omega + \varphi_1)} =$$

$$= \frac{\cos(\omega + \psi) \cos(\alpha - \omega - \varphi_2) - \operatorname{sen}(\omega + \psi) \operatorname{sen}(\alpha - \omega - \varphi_2)}{\operatorname{sen}(\alpha - \omega - \varphi_2)}$$

cioè

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1)}{\operatorname{sen}(\alpha-\omega-\varphi_2)}=\frac{\cos(\alpha-\psi+\varphi_1)}{\cos(\alpha+\psi-\varphi_2)}.$$

In conclusione, per determinare le espressioni di φ_1, φ_2 e ψ in funzione di ω, siamo ora in possesso del seguente sistema di tre equazioni nelle quattro variabili in discorso:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1)\operatorname{sen}\psi+\cos(\omega+\psi)\operatorname{sen}\varphi_1=0 \\ \operatorname{sen}(\alpha-\omega-\varphi_2)\operatorname{sen}\psi+\cos(\omega+\psi)\operatorname{sen}\varphi_2=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1)}{\operatorname{sen}(\alpha-\omega-\varphi_2)}=\dfrac{\cos(\alpha-\psi+\varphi_1)}{\cos(\alpha+\psi-\varphi_2)}. \end{cases}$$

Per esplicitare il sistema (4), cominciamo con l'osservare che dalle prime sue due equazioni si ricava immediatamente

$$(5)\qquad \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\omega+\varphi_1)}{\operatorname{sen}(\alpha-\omega-\varphi_2)}=\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_2},$$

il che, congiuntamente con la terza delle (4), fornisce l'equazione *fra le sole* φ_1, φ_2 *e* ψ:

$$(6)\qquad \cos(\alpha+\psi-\varphi_2)\operatorname{sen}\varphi_1-\cos(\alpha-\psi+\varphi_1)\operatorname{sen}\varphi_2=0.$$

Una seconda congenere equazione può ottenersi eliminando ω fra le prime due delle (4), pel che conviene scrivere dette equazioni sotto la forma seguente:

$$\begin{cases} [\operatorname{sen}(\alpha+\varphi_1)\operatorname{sen}\psi+\cos\psi\operatorname{sen}\varphi_1]\cos\omega+ \\ \quad+[\cos(\alpha+\varphi_1)-\operatorname{sen}\varphi_1]\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\psi=0 \\ [\operatorname{sen}(\alpha-\varphi_2)\operatorname{sen}\psi+\cos\psi\operatorname{sen}\varphi_2]\cos\omega- \\ \quad-[\cos(\alpha-\varphi_2)+\operatorname{sen}\varphi_2]\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\psi=0. \end{cases}$$

Invero, ponendo uguale a zero il determinante dei coefficienti delle due precedenti equazioni pensate come costituenti un sistema di due equazioni lineari ed omogenee in $\cos\omega$ e $\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\psi$, si ottiene un'equazione in φ_1, φ_2 e ψ che, opportunamente sviluppata, diviene

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}(2\alpha+\varphi_1-\varphi_2)+\operatorname{sen}\varphi_1\cos(\alpha+\psi-\varphi_2)+ \\ &\qquad+\operatorname{sen}\varphi_2\cos(\alpha-\psi+\varphi_1)=0. \end{aligned}$$

Ciò posto eliminiamo ψ fra la (6) e la (7). A tale scopo cominciamo con l'osservare che il sistema formato da queste due equazioni può facilmente semplificarsi per somma e sottrazione; precisamente esso è equivalente all'altro

$$\begin{cases} 2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos(\alpha + \psi - \varphi_2) + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ 2 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos(\alpha - \psi + \varphi_1) + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) = 0, \end{cases}$$

che sarà meglio scrivere sotto la forma

$$\begin{cases} 2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos(\alpha - \varphi_2) \cos \psi + \\ + [-2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen}(\alpha - \varphi_2) + \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2)] \operatorname{sen} \psi = 0 \\ 2 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_1) \cos \psi + \\ + [2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen}(\alpha + \varphi_1) + \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2)] \operatorname{sen} \psi = 0. \end{cases}$$

Invero, scritto così il sistema, possiamo subito affermare che deve essere

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi_1 \cos(\alpha - \varphi_2) & -2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen}(\alpha - \varphi_2) + \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) \\ \operatorname{sen} \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_1) & 2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen}(\alpha + \varphi_1) + \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \begin{vmatrix} \cos(\alpha - \varphi_2) & -\operatorname{sen}(\alpha - \varphi_2) \\ \cos(\alpha + \varphi_1) & \operatorname{sen}(\alpha + \varphi_1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi_1 \cos(\alpha - \varphi_2) & 1 \\ \operatorname{sen} \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_1) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui, sopprimendo il fattore $\operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2)$ ch'è comune ai due termini e non è identicamente nullo [1], sviluppando e

---

[1] Infatti, nell'ipotesi che sia $2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, dalle equazioni (2) e (3) si trae facilmente

$$\alpha + \omega + \varphi_1 \equiv -(\alpha - \omega - \varphi_2) \equiv 0, \quad \omega + \psi \equiv \frac{\pi}{2};$$

d'altra parte, dalle medesime equazioni, si ha pure che

$$-\frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \varphi_1} \cos(\alpha + \omega + \varphi_1) + \operatorname{sen}(\omega + \psi) = -\frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \varphi_2} \cos(\alpha - \omega - \varphi_2) - \operatorname{sen}(\omega + \psi);$$

dunque nel caso in esame avrà luogo l'uguaglianza

$$\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen}(\alpha - \omega)} + \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen}(\alpha + \omega)} + 2 = 0$$

da cui segue subito

$$\operatorname{sen} \omega = \sqrt{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Se ne conclude che la relazione cui soddisfano gli angoli φ_1 e φ_2, *qualunque sia* ω, non è la

$$\operatorname{sen}(2\alpha + \varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

bensì la (8).

dividendo per $\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha$, si trae finalmente

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{cotg}\varphi_1 - \operatorname{cotg}\varphi_2 = 2\,\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ottenuta la precedente relazione fra φ_1 e φ_2, riprendiamo l'equazione (5) osservando che essa, sviluppata può scriversi

$$\begin{gathered}(\operatorname{sen}\alpha\cos\omega\cos\varphi_1 + \cos\alpha\operatorname{sen}\omega\cos\varphi_1 + \cos\alpha\cos\omega\operatorname{sen}\varphi_1 - \\ - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi_1)\operatorname{sen}\varphi_2 - (\operatorname{sen}\alpha\cos\omega\cos\varphi_2 - \cos\alpha\operatorname{sen}\omega\cos\varphi_2 - \\ - \cos\alpha\cos\omega\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi_2)\operatorname{sen}\varphi_1 = 0\end{gathered}$$

da cui, semplificando e dividendo tutto per

$$\cos\alpha \quad \cos\omega \quad \operatorname{sen}\varphi_1 \quad \operatorname{sen}\varphi_2,$$

si trae

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{cotg}\varphi_1 - \operatorname{cotg}\varphi_2) + \operatorname{tg}\omega(\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2) + 2 = 0$$

ovvero, tenendo conto della (8),

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2 = -2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sec\alpha\operatorname{cotg}\omega.$$

La (8) e la (9) costituiscono un sistema di due equazioni lineari in $\operatorname{cotg}\varphi_1$ e $\operatorname{cotg}\varphi_2$ che si risolve immediatamente ottenendo le formule

$$\text{(10)} \qquad \left\{\begin{aligned}\operatorname{cotg}\varphi_1 &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)(\sec\alpha\operatorname{cotg}\omega - 1)\\ \operatorname{cotg}\varphi_2 &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)(\sec\alpha\operatorname{cotg}\omega + 1).\end{aligned}\right.$$

Non resta ora che da determinare ψ. A tal'uopo trattiamo l'equazione (6) in modo analogo a quello con cui abbiamo trattato or ora la (5); troveremo così l'equazione

$$\operatorname{cotg}\alpha(\operatorname{cotg}\varphi_1 - \operatorname{cotg}\varphi_2) + \operatorname{tg}\psi(\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2) - 2 = 0$$

da cui, tenendo conto delle (8) e (9), segue immediatamente

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{cotg}\psi = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\omega.$$

Le (10) e la (11) forniscono le desiderate espressioni di φ_1, φ_2 e ψ in funzione di ω. Esse mostrano che φ_1, φ_2 e ψ sono funzioni *monotone* di ω, e precisamente le prime due *decre-*

scenti e la terza *crescente.* In altre parole: supponendo che ω vada crescendo a partire dallo zero (e mantenendosi, naturalmente, sempre minore di $\pi/2$) φ_1 e φ_2 assumono valori negativi in valore assoluto sempre crescenti, e ψ valori positivi crescenti. Ne segue che *possibili posizioni di equilibrio del sistema in istudio sono tutte e sole quelle per cui ω è minore di ω_0 essendo ω_0 il più piccolo dei tre angoli (compresi fra* 0 *e* $\pi/2$) ω_1, ω_2 *ed* ω_3 *definiti dalle tre seguenti equazioni:*

$$\left\{\begin{aligned} -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)(\sec\alpha \operatorname{cotg}\omega_1 - 1) &= -\operatorname{cotg}\varphi_0 \\ -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)(\sec\alpha \operatorname{cotg}\omega_2 + 1) &= -\operatorname{cotg}\varphi_0 \\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\omega_3 &= \operatorname{cotg}\psi_0, \end{aligned}\right.$$

che, risolute rispetto a $\operatorname{cotg}\omega_1$, $\operatorname{cotg}\omega_2$ e $\operatorname{cotg}\omega_3$, divengono

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg}\omega_1 &= \cos\alpha\left[\frac{1}{f}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+1\right] \\ \operatorname{cotg}\omega_2 &= \cos\alpha\left[\frac{1}{f}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-1\right] \\ \operatorname{cotg}\omega_3 &= \frac{1}{f'}\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}\right.$$

dove si è posto

$$\operatorname{cotg}\varphi_0 = \frac{1}{f}, \quad \operatorname{cotg}\psi_0 = \frac{1}{f'},$$

cioè si sono denotati con f ed f' i coefficienti d'attrito rispettivamente delle sferette contro la sfera cava e delle sferette fra loro.

Osserviamo finalmente che dalle prime due delle (12) si trae

$$\operatorname{cotg}\omega_1 - \operatorname{cotg}\omega_2 = 2\cos\alpha > 0$$

il che mostra ch'è sempre $\omega_1 < \omega_2$; dunque *per determinare l'angolo limite ω_0 è inutile calcolare ω_2: basta considerare soltanto il più piccolo dei due angoli ω_1 ed ω_3.*

Per esempio, supposto $f = 0{,}3$ ed $f' = 0{,}2$ (valori ammissibili nell'ipotesi di sferette d'acciaio lucido immesse in una sfera di vetro: esperimento di Giglio-Tos) e supposto inoltre che il rapporto r/R fra il raggio delle sferette e quello della sfera cava sia uguale a 0,45 ($\alpha = 54°, 903$), si trova $\omega_1 = 40°, 255$, $\omega_3 = 41°, 987$, sicchè l'angolo limite risulta di oltre 40°.

Torino, Università.

F. TRICOMI