SUI GRUPPI DI TRASFORMAZIONI

Walter Mantovani[1]**, Luigi Togliani**[2]

Sunto: In questo articolo, prendendo le mosse dal programma di Erlangen, cercheremo di soffermarci soprattutto su quelle trasformazioni geometriche che normalmente non vengono trattate nell'insegnamento nella scuola secondaria, come le omografie o le trasformazioni quadratiche. L'approccio sarà preferibilmente di tipo analitico e orientato all'insegnamento nella scuola secondaria.

Abstract: In this paper, coming from Erlangen program, we particularly study some transformations – such as homographies and quadratic transformations – which aren't normally treated in secondary schools. The approach is analytical and teaching-oriented.

Parole chiave: trasformazione geometrica, geometria.

[1] Cultore della disciplina, sez. Mathesis di Mantova.
[2] Liceo Scientifico "Belfiore"- Mantova, sez. Mathesis di Mantova.

1. IL CONCETTO DI GEOMETRIA SECONDO KLEIN

Felix Klein, nato a Düsseldorf nel 1849 e morto a Gottingen nel 1925, fu allievo e assistente di Plücker all'Università di Bonn. Quando Plücker morì nel 1868 uscì la *Nuova geometria*, la sua ultima opera, curata da Klein che, in questa luce, si può ritenere il successore dello stesso Plücker. Tuttavia Klein indirizzò le sue ricerche di geometria verso la teoria dei gruppi, studiando in particolare l'opera di Cayley e collaborando con matematici incontrati durante i suoi frequenti soggiorni a Parigi. In particolare lavorò con Lie (1842-1899) sui gruppi continui di trasformazioni (confronta [5]). Quando nel 1872 fu nominato professore ordinario di geometria all'Università di Erlangen, Klein presentò una prolusione dal titolo "*Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*", nota semplicemente come *programma di Erlangen*. Il programma di Erlangen venne tradotto in italiano da Fano su richiesta di Corrado Segre che lo fece pubblicare negli Annali di Matematica nel tomo 17 del 1890 (serie II).

Noti i concetti di figura, spazio, biiezione e gruppo, assumiamo il concetto di geometria che Klein diede nel programma di Erlangen. Per geometria s'intende lo studio (o l'insieme) delle proprietà delle figure che risultano invarianti rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni.

Poiché la trasformazione T è una biiezione che muta lo spazio S in sé , T dev'essere invertibile.

Se come trasformazioni si scelgono quelle del gruppo delle omografie, delle affinità, delle similitudini, delle isometrie,... si otterrà rispettivamente la geometria proiettiva, affine, simile, euclidea,...

Questo modo d'intendere la geometria risulta particolarmente interessante e innovatore per vari motivi.

Innanzitutto perché realizza almeno due dei cinque superamenti della storia della Matematica ben evidenziati da E. Carruccio in [1]. Con l'impostazione di Klein, infatti, si passa *da un unico mondo matematico ad una molteplicità di mondi matematici*, cioè da una geometria a più geometrie. Non solo la geometria di Euclide, non solo le geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica hanno diritto di cittadinanza: un qualunque gruppo di trasformazioni fa nascere una nuova geometria. In ciò si può vedere in atto la libertà creatrice del pensiero matematico.

In secondo luogo il programma di Erlangen produce il passaggio *dal sensibile all'ultrasensibile*. La geometria diventa astratta, cioè teoria deduttiva suscettibile di diverse interpretazioni. "*Con Klein e Lie il concetto di geometria astratta ha ricevuto un grande sviluppo divenendo poi un ordinario strumento di lavoro nelle mani dei geometri italiani contemporanei*", asseriva Enriques [2].

Infine perché questo concetto di geometria offre una visione unitaria delle diverse geometrie. E si stabilisce una subordinazione tra le varie geometrie: meno ricco è l'insieme delle proprietà delle figure, più generali sono le trasformazioni che individuano la geometria. Ad esempio la nozione di parallelismo appartiene alla geometria affine (oltre che a quella simile e a quella euclidea), ma è estranea alla geometria proiettiva e, coerentemente, le omografie sono trasformazioni più generali delle affinità.

Indicati con G_i , G_s , G_a , G_p ordinatamente i gruppi delle isometrie, delle similitudini, delle affinità e delle omografie, indicate con Γ_i, Γ_s , Γ_a , Γ_p le rispettive geometrie, si avrà:

$$G_i \subset G_s \subset G_a \subset G_p \quad \text{e} \quad \Gamma_i \supset \Gamma_s \supset \Gamma_a \supset \Gamma_p \ .$$

Ognuna di queste quattro geometrie possiede nozioni o proprietà che la caratterizzano, cioè degli invarianti.

Nella geometria euclidea Γ_i è invariante la distanza tra due punti: applicando a due punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ del piano una isometria si ottengono i rispettivi punti $A'(x_1',y_1')$ e $B'(x_2',y_2')$ tali che $d(A,B) = d(A',B')$.

Nella geometria simile Γ_s è invariante il rapporto k delle distanze di due coppie di punti corrispondenti, ossia: $d(A',B')/d(A,B) = k$. Inoltre le similitudini conservano le ampiezze e trasformano una circonferenza in una circonferenza.

Nella geometria affine Γ_a è invariante la nozione di parallelismo: un'affinità muta due rette parallele in due rette parallele.

Infine nella geometria proiettiva Γ_p si considera l'invarianza del birapporto (ABCD) di quattro punti allineati A, B, C e D, cioè dell'espressione: $(ABCD) = (AC/BC) : (AD/BD)$.

2. ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLE OMOGRAFIE

Seguendo l'impostazione data in [3], esprimiamo una generica omografia Ω del piano in sé (o tra due piani Π e Π' eventualmente sovrapposti), in coordinate omogenee, con le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \rho y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ \rho y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ove il determinante $|a_{ij}| \neq 0$, ρ è un'arbitraria costante reale non nulla, il punto $P'(y_0,y_1,y_2)$ è il corrispondente di $P(x_0,x_1,x_2)$ secondo Ω.

La retta di equazione $x_0 = 0$ di Π (e quella di equazione $y_0 = 0$ di Π') si dice retta impropria del piano. Come si può facilmente osservare la retta impropria di Π' è corrispondente, in generale, di una retta propria di Π.

Se, invece, la retta impropria è corrispondente della retta impropria, l'omografia diventa un'affinità. Imponendo ciò, dalla prima equazione di (1) scende $a_{01} = a_{02} = 0$.

Passando a coordinate non omogenee, con $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $x' = y_1/y_0$, $y' = y_2/y_0$, le equazioni (1) di Ω divengono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_{11}x + a_{21}y + a_{10}}{a_{01}x + a_{02}y + a_{00}} \\ \\ y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{20}}{a_{01}x + a_{02}y + a_{00}} \end{cases} \qquad (2)$$

per cui Ω muta $P(x,y)$ in $P'(x',y')$.

Le (2), a differenza delle (1), esprimono una corrispondenza solo generalmente biunivoca tra i punti del piano: infatti i punti $P(x,y)$ che annullano i denominatori delle (2) non hanno corrispondenti in Ω.

Dal punto di vista sintetico un'omografia è una trasformazione che muta una retta in una retta e un punto in un punto. Perciò tutte le rette sono proiettivamente uguali e così tutti i punti. Ma ciò che più interessa è che anche tutte le coniche sono 'uguali' nella geometria proiettiva. Ad esempio, la conica C') $x^2 + y^2 = 1$ si può vedere (fig. 1) come la trasformata della conica C) $xy = x + y +1$ nell'omografia Ω di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+1}{x+y} \\ y' = \dfrac{y+1}{x+y} \end{cases} \tag{3}$$

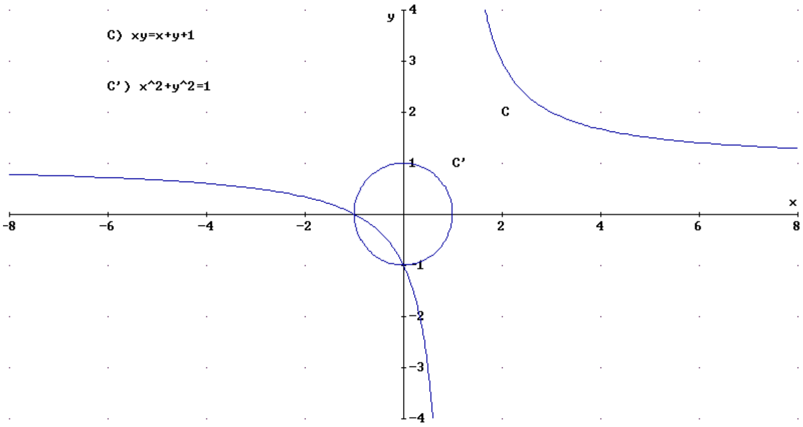

Fig. 1

Con il consueto linguaggio geometrico, diremmo che l'omografia Ω ha trasformato l'iperbole C nella circonferenza C'. Ciò che è rimasto invariato è l'ordine (che vale 2 per le coniche) della curva. Si dimostra che un'omografia conserva l'ordine di una curva algebrica.

La classificazione delle coniche appartiene alla geometria affine che distingue tra iperbole, parabola ed ellisse. La nozione di circonferenza, invece, è tipica della geometria simile. Ellisse e circonferenza sono affini. Ad esempio, la circonferenza C') $x^2 + y^2 = 1$ è la trasformata dell'ellisse C) $4x^2 + 9y^2 = 1$ nell'affinità di equazioni: $x' = 2x$, $y' = 3y$. C e C' sono affini, ma non simili.

Tornando all'omografia Ω, se ne possono cercare i punti uniti propri ponendo nelle (3): $x' = x$ e $y' = y$. Si ottiene un sistema algebrico di 4° grado che presenta le due soluzioni $(1,1)$ e $(-1/2,-1/2)$ che forniscono i punti uniti cercati. Per i punti uniti impropri bisogna riscrivere le (3) in coordinate omogenee e procedere in modo analogo. Per cercare le rette unite di Ω si opera similmente a quanto noto per le affinità.

Le geometrie non euclidee, iperbolica ed ellittica, possono essere viste secondo un'impostazione proiettiva, utilizzando sottogruppi del gruppo delle omografie.

3. OLTRE LE OMOGRAFIE, LA GEOMETRIA CREMONIANA

Esistono gruppi di trasformazioni più ampi di quello delle omografie?

Una risposta, anteriore al programma di Klein, la troviamo nell'opera del matematico italiano Luigi Cremona (Pavia, 1830 – Roma, 1903) che nel 1860, nella celebre prolusione *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* tenuta all'Università di Bologna (dove ottenne la cattedra di geometria superiore), fece uso delle trasformazioni algebriche birazionali, chiamate poi 'cremoniane'. L'opera di Cremona aprì una nuova stagione della matematica italiana, gettando le basi di quella che poi sarà chiamata la 'geometria algebrica'. In questo settore l'Italia assunse ben presto un ruolo di primo piano in ambito internazionale.

Una trasformazione birazionale o cremoniana T del piano si presenta, in coordinate non omogenee (vedi [4]), con equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{f_1(x,y)}{f_0(x,y)} \\ y' = \dfrac{f_2(x,y)}{f_0(x,y)} \end{cases} \tag{4}$$

ove le f_i sono funzioni polinomiali in x e y tali che sia possibile ricavare x e y, ossia tali che:

$$\begin{cases} x = \dfrac{g_1(x',y')}{g_0(x',y')} \\ y = \dfrac{g_2(x',y')}{g_0(x',y')} \end{cases} \tag{5}$$

con g_i funzioni polinomiali in x' e y'. Si richiede infine che lo jacobiano[3] di f_1/f_0 , f_2/f_0 non sia identicamente nullo.

---

[3] Lo jacobiano delle funzioni in due variabili φ e ψ è $\begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix}$

Si dimostra che le trasformazioni cremoniane formano gruppo (gruppo cremoniano); da qui nasce la geometria cremoniana secondo l'impostazione di Klein.

Le omografie risultano particolari trasformazioni cremoniane, quelle ottenute quando le funzioni f_i sono lineari. Il gruppo delle omografie risulta un sottogruppo del gruppo cremoniano. Se le f_i sono funzioni quadratiche, la T si chiama più propriamente trasformazione quadratica. Ad esempio è quadratica la trasformazione T di equazioni

$$\begin{cases} x' = 1/x \\ y' = 1/y \end{cases} \tag{6}$$

In T sono uniti i punti propri A(1,1) , B(-1,1) , C(-1,-1) , D(1,-1) . Ma risultano unite anche: le rette di equazioni: $y = \pm x$, le iperboli di equazioni: $xy = \pm 1$ e le parabole di equazioni: $y = \pm x^2$, $x = \pm y^2$ (fig. 2).

Invece T muta la parabola: $y = x^2 + 1$ nella cubica: $x^2y - x^2 + y = 0$.

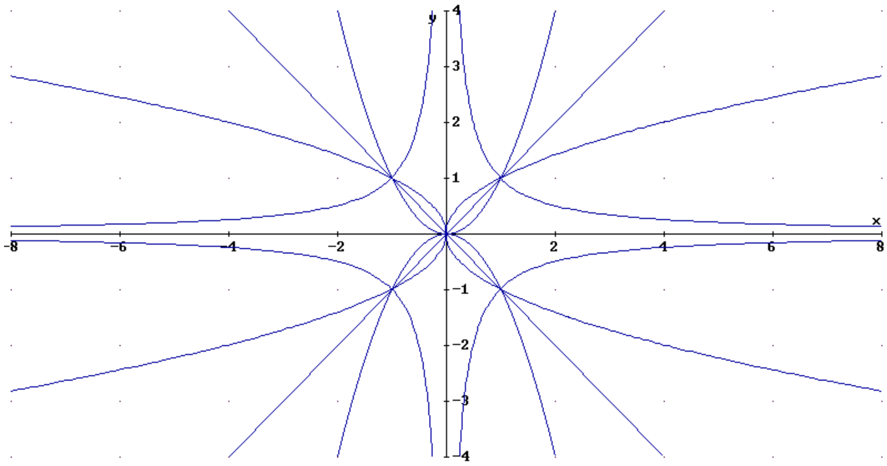

Fig. 2

4. L'INVERSIONE

Un caso particolarmente interessante di trasformazione quadratica, e quindi di trasformazione cremoniana, è costituito dalla inversione. Questa particolare trasformazione fu scoperta nel 1824 dal matematico tedesco J. Steiner (1796-1863) e suggerì a Cremona la creazione delle trasformazioni che da lui portano il nome. Si definisce l'inversione nel modo seguente.

Nel piano euclideo è dato un punto proprio O ed un numero reale k, con $k \neq 0$. Ad un qualsiasi altro punto proprio P, con $P \neq O$, l'inversione associa il punto P′ della retta OP per il quale:

$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = |k|$, ove OP, OP′ sono segmenti orientati e le loro misure, quindi, dotate di segno (misure relative). Il punto O si dice centro d'inversione; esso ha per corrispondente un punto improprio del piano.

Dalla definizione si deduce che P e P′ si possono trovare, sulla retta OP, o dalla stessa parte rispetto ad O oppure da parti opposte, a seconda che $k > 0$ o che $k < 0$. Un caso particolare è quello per cui $|k| = 1$; in tal caso $|OP'| = 1/|OP|$ e questo giustifica il nome di inversione dato alla trasformazione in esame.

Come facilmente si nota, i punti uniti di un'inversione sono tutti e soli quelli della circonferenza, detta cerchio d'inversione, di raggio $\sqrt{k}$: sono punti reali se $k > 0$, immaginari se $k < 0$.

L'inversione è una trasformazione involutoria, poiché coincide con la sua inversa. Le inversioni, rispetto all'operazione di composizione tra trasformazioni, non possono costituire gruppo poiché l'identità non può essere considerata un'inversione.

Le equazioni di una inversione rispetto al punto O(0,0) sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{7}$$

come rapidamente si può provare, dopo aver assunto O(0,0), P(x,y), P′(x′,y′).

L'equazione della circonferenza (cerchio) d'inversione è: $x^2 + y^2 = k$.

Nell'inversione ad una retta, non passante per O, corrisponde una circonferenza passante per O la cui tangente è parallela alla retta considerata. Infatti, detta r la retta d'equazione: $ax + by + c = 0$, con $c \neq 0$, applicando le (7), si ottiene: $akx + bky + cx^2 + cy^2 = 0$, che è l'equazione della circonferenza indicata, la cui tangente t per O ha equazione $ax + by = 0$. Ovviamente t è parallela a r. In figura 3 è presentato il caso di $k = 2$ e $r) \ y = x + 1$.

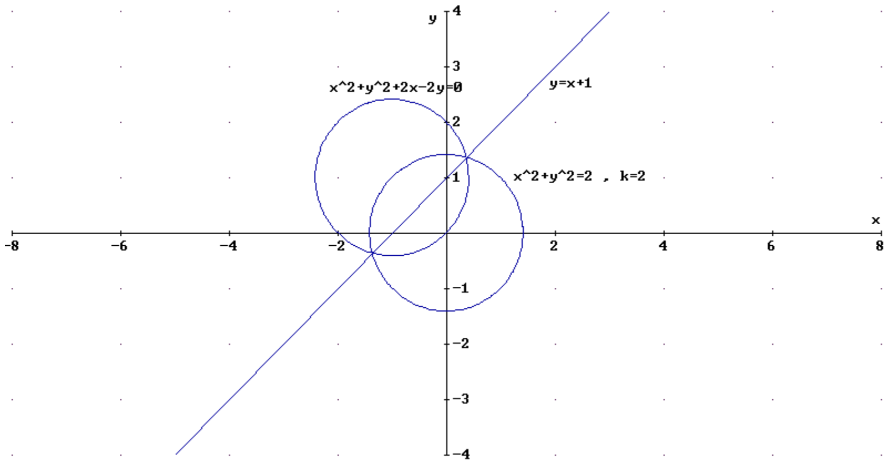

Fig. 3

Una retta passante per l'origine, invece, si trasforma in sé stessa, prescindendo dalla retta impropria del piano.

Nell'inversione ad una circonferenza, non passante per O, corrisponde ancora una circonferenza. Per provarlo si prenda una generica circonferenza $\gamma) \ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $c \neq 0$; applicando ancora le (7) risulta: $k^2x^2 + k^2y^2 + akx(x^2 + y^2) + bky(x^2 + y^2) + c(x^2 + y^2)^2 = 0$, ossia: $cx^2 + cy^2 + akx + bky + k^2 = 0$, che è l'equazione di un'altra circonferenza.

Ma una circonferenza per O si muta in una retta non passante per O.

Si dimostra inoltre che l'inversione è una trasformazione conforme inversa: conforme perché l'angolo di due curve è isometrico all'angolo delle due curve corrispondenti; inversa perché inverte il senso degli angoli.

L'inversione risulta particolarmente interessante anche perché, per le proprietà appena trattate, trasforma problemi costruibili con riga e compasso in problemi dello stesso tipo; anzi si può provare che "problemi costruibili con riga e compasso si possono sempre costruire col solo compasso" (teorema di Mascheroni, da L. Mascheroni, 1750-

1800). Nonostante il nome, quest'ultimo risultato è rintracciabile nell'opera, scoperta solo nel 1928, *Euclides Danicus* (1672) del danese G. Mohr (1640-1697), anche se Mascheroni sviluppò particolarmente la tematica in questione (vedi [5] e [6]). La dimostrazione del teorema di Mascheroni si basa sul fatto che ogni costruzione con riga e compasso è costituita da una successione finita di quattro costruzioni elementari:

- tracciare una circonferenza, dati centro e raggio;
- trovare i punti d'intersezione di due circonferenze;
- trovare i punti d'intersezione di una retta e di una circonferenza;
- trovare i punti d'intersezione di due rette.

Perciò, dimostrando che ognuna delle quattro costruzioni elementari è possibile col solo compasso, ne discende l'asserto.

Steiner, partendo dall'opera di Mascheroni, dimostrò invece che tutte le costruzioni eseguibili con riga e compasso si possono eseguire con la sola riga, a patto che sia assegnata una circonferenza e il suo centro.

5. CENNI ALLE TRASFORMAZIONI TOPOLOGICHE

Una trasformazione T tra due spazi topologici S e S' (eventualmente coincidenti) si dice bicontinua se è biunivoca (e quindi invertibile) e se risulta continua insieme alla sua inversa. La trasformazione T è chiamata omeomorfismo se è biunivoca e tale da mutare gli insiemi aperti di S in insiemi aperti di S'. Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché la biiezione T tra gli spazi topologici S e S' sia un omeomorfismo è che sia bicontinua. Le trasformazioni bicontinue formano gruppo e la geometria che ne deriva, secondo il programma di Erlangen, si chiama geometria topologica.

Indicati ora con G_i, G_s, G_a, G_p, G_c, G_t ordinatamente i gruppi delle isometrie, delle similitudini, delle affinità, delle omografie, delle trasformazioni cremoniane, delle trasformazioni topologiche; indicate con Γ_i, Γ_s, Γ_a, Γ_p, Γ_c, Γ_t le rispettive geometrie, si avrà:

$$G_i \subset G_s \subset G_a \subset G_p \subset G_c \subset G_t \quad \text{e} \quad \Gamma_i \supset \Gamma_s \supset \Gamma_a \supset \Gamma_p \supset \Gamma_c \supset \Gamma_t \,.$$

Dunque la geometria topologica appare come la più generale, e quindi la meno ricca di proprietà, tra le geometrie intese secondo l'impostazione di Erlangen.

6. CONCLUSIONE

Le trasformazioni geometriche sono entrate a pieno titolo nei programmi d'insegnamento, almeno per quelli relativi ai corsi sperimentali come il P.N.I. I libri di testo trattano abbastanza ampiamente le isometrie e generalmente prendono in considerazione, anche se in modo meno approfondito, pure le affinità e le similitudini. Difficilmente, invece, si parla di omografie e chi lo fa, in genere, affronta lo studio solo dal punto di vista sintetico (vedi ad esempio [7] e [8]).

Trattare in classe le trasformazioni geometriche è un buon modo per vedere 'dinamicamente' la geometria che, nella presentazione euclidea classica può apparire come un edificio ben fatto ma immutabile, eccessivamente 'statico'. Gli strumenti informatici assai diffusi nelle scuole consentono inoltre di introdurre in modo efficace le trasformazioni: in ambiente Cabri-Geometre, ad esempio, si possono far lavorare gli studenti sulle isometrie e anche sull'inversione.

Forse l'introduzione delle omografie può essere possibile anche a livello di scuola secondaria; darebbe l'opportunità di un forte legame interdisciplinare con il disegno e la storia dell'arte (prospettiva) e fornirebbe un significativo esempio di geometria (proiettiva) meno ricca di proprietà rispetto alle già note geometrie euclidea, simile e affine. Il passaggio poi da un unico modo d'intendere la geometria a più modi riteniamo possa essere di grande importanza didattica. Lo studente può così avvertire che la matematica non è, come spesso si pensa, un monolito inattaccabile, già fatto e predisposto solo per essere studiato.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARRUCCIO E. (1977), *Storia delle matematiche, della logica, della metamatematica*, Pitagora, Bologna.

[2] ENRIQUES F. (1922), *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna.

[3] VILLA M. (1972), *Lezioni di geometria*, vol. 1, CEDAM, Padova.

[4] VILLA M. (1972), *Lezioni di geometria*, vol. 2, CEDAM, Padova.

[5] BOYER C. (1998), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

[6] COURANT R., ROBBINS H. (1971), *Che cos'è la matematica?*, Boringhieri, Torino.

[7] LOMBARDO RADICE L., MANCINI PROIA L. (1979), *Il metodo matematico*, Principato, Milano.

[8] MARASCHINI W., PALMA M. (1988), *Conoscenze matematiche*, Paravia, Torino.