Ora si può dimostrare facilmente che: Sottraendo da poligoni equivalenti poligoni equivalenti, si ottengono resti equivalenti; e così le proposizioni sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri si possono tuttavia dimostrare con la stessa semplicità che si ammira negli *Elementi d'Euclide*.

A. Faifofer.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Sulla trasformazione delle frazioni

1. Quanti quarti, quanti sesti, quanti ottavi, quanti decimi, quanti diciottesimi sono contenuti in $\frac{1}{2}$?
2. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{2}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 6, 14, 38, 100, 274.
3. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{2}$ il cui denominatore sia 49?
4. Quanti sesti, quanti noni, quanti dodicesimi, quanti quindicesimi, quanti ventiquattresimi sono contenuti in $\frac{1}{3}$?
5. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{3}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 9, 15, 24, 87, 213.
6. Esiste una frazione eguale ad $\frac{1}{3}$, col denominatore 56?
7. Quanti quattordicesimi, quanti ventunesimi, quanti trentacinquesimi, quanti quarantanovesimi sono contenuti in $\frac{1}{7}$?
8. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{7}$ coi denominatori 38, 77, 105, 658, 1036.
9. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{7}$, col denominatore 562?

10. Trovare tre frazioni eguali ad $\frac{1}{13}$ i cui denominatori sieno 65, 143, 1144.

11. Trovare una frazione eguale a $\frac{7}{13}$, ed un'altra eguale ad $\frac{9}{13}$, le quali abbiano il denominatore 65.

12. Trovare: 1) due frazioni eguali a $\frac{1}{35}$ coi denominatori 105, 245, 2) due frazioni eguali a $\frac{27}{35}$ che abbiano gli stessi denominatori 105, 245.

13. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{4}{29}$ coi numeratori 3, 7, 15.

14. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{12}{29}$ i cui numeratori sieno 24, 60, 144, 576.

15. Esiste una frazione eguale a $\frac{12}{29}$ la quale abbia per numeratore 2250?

16. Trovare una frazione eguale a $\frac{24}{243}$ col numeratore minore di 24.

17. Trovare una frazione eguale a $\frac{84}{108}$ coi termini più piccoli.

18. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{81}{256}$ col numeratore minore di 81?

19. Come devono essere i denominatori delle frazioni eguali a $\frac{8}{15}$? E quanti sono quelli minori di 1000?

20. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{9}{87}$ che hanno i denominatori compresi fra 1000 e 2000?

21. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{47}{60}$? Ve n'ha una col denominatore eguale ad uno dei numeri 10, 100, 1000,...?

22. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{34}{875}$ la quale abbia per denominatore uno dei numeri 10, 100, 1000, ...?

23. Esiste una frazione eguale a $\frac{56}{448}$ il cui denominatore sia uno dei numeri 10, 100, 1000, ...?

24. Una frazione il cui numeratore è 37, e il cui denominatore è maggiore di 100 e minore di 200, è eguale ad un'altra frazione che ha il denominatore 1000: trovare il denominatore della prima frazione.

25. Quante sono le frazioni col numeratore 168, e col deminatore maggiore di 300 e minore di 400, eguali ad altre frazioni col denominatore 1000?

26. A quanti ottavi equivale la somma di $\frac{5}{4}$ e $\frac{7}{8}$?

27. A quanti sessantesimi equivale la somma di $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{40}$ e $\frac{7}{60}$?
28. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{19}{20}$ e $\frac{73}{140}$?
29. Trovare due frazioni collo stesso denominatore, ed eguali rispettivamente a $\frac{7}{18}$ e $\frac{5}{11}$.
30. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{25}$?
31. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{8}{25}$?
32. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{10}{81}$, $\frac{12}{88}$, $\frac{14}{85}$?
33. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{71}{20}$, $\frac{76}{25}$, $\frac{81}{30}$?
34. Trovare due frazioni col denominatore 100, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{1}{3}$.
35. Trovare due frazioni col denominatore 1000, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{23}{75}$.

TRIGONOMETRIA

Sui primi teoremi relativi al seno ed al coseno d'un angolo acuto.

1. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo di 30°, il cateto ad esso opposto è la metà dell'ipotenusa.
2. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo minore di 30°, il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa è minore di $\frac{1}{2}$.
3. Sia BAC un angolo di 45°, e da un punto B del suo lato AB si conduca sull'altro lato la perpendicolare BC; dimostrare che, se la AB è divisa in 1000 parti eguali, la BC è maggiore del segmento che contiene 707 di quelle parti e minore del segmento che ne contiene 708.
4. Costruire un angolo il cui seno sia eguale a $\frac{7}{10}$. Quell'angolo sarà maggiore o minore di 45°?
5. Dimostrare che il seno di 60° è compreso fra 0,866 e 0,8661.
6. Il seno d'un angolo è $\frac{56}{65}$; calcolare il suo coseno, e provare che quell'angolo è compreso fra 45° e 60°.

7. Calcolare a meno di $\frac{1}{1000}$ il seno ed il coseno d'un angolo, sapendo che il seno è doppio del coseno.
8. Dimostrare che, se l'angolo α è minore di 45°, esiste un angolo il cui seno è eguale al quoziente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
9. Se il seno d'un angolo è doppio del seno di un altro angolo, fra quali limiti dev' essere compreso il secondo angolo?
10. Se il coseno d'un angolo è la metà del coseno d'un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il primo angolo?
11. Come devono essere due angoli se la somma dei loro seni è eguale a 2?
12. Come devono essere due angoli se il prodotto del seno dell'uno pel coseno dell'altro è eguale all' unità?
13. Dimostrare che il seno di 70° è minore del doppio del seno di 35°.
14. Dimostrare che il seno di 60° è minore del triplo del seno di 20°.
15. Dimostrare che il seno di 15° è maggiore di $\frac{1}{4}$.
16. Dimostrare che, se l' angolo al vertice d' un triangolo isoscele è un quarto d'un angolo alla base, il rapporto della base ad uno dei lati eguali è maggiore di $\frac{1}{3}$.
17. Trovare due numeri i quali differiscano di 0,0001, l'uno minore e l'altro maggiore del seno di 15°.
18. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quarto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{8}{25}$.
19. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quinto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{13}{50}$.
20. Il seno d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo è compreso fra $\frac{159}{1000}$ e $\frac{161}{1000}$: trovare due limitazioni del rap-

porto del cateto opposto a quell' angolo al cateto adiacente.

21. Dimostrare che l'angolo, menzionato nell'esercizio precedente, è compreso tra 9° e 10°.

22. Nel triangolo BAC rettangolo in A, il rapporto del cateto AC al cateto AB è compreso fra $\frac{7}{10}$ e $\frac{701}{1000}$; provare che l'angolo B è maggiore di 30° e minore di 36°.

23. Nell' ipotesi che la somma del seno e del coseno d'un angolo, minore di 45°, sia eguale a $\frac{5}{4}$, si dimostri che quell'angolo dev'essere compreso fra 15° e 18°.

24. Esiste un angolo tale che la somma del suo seno e del suo coseno sia eguale a $\frac{3}{2}$?

25. Qual'è il massimo valore della somma del seno e del coseno d'uno stesso angolo?

26. Trovare i valori di due angoli, non maggiori di 60°, nell'ipotesi che la somma dei quadrati dei loro coseni, aumentata di 1, sia eguale al doppio prodotto dei loro seni.

27. Trovare i valori di due angoli nell' ipotesi che uno di essi non sia maggiore di 18°, che l' altro non sia maggiore di 54°, e che il prodotto dei loro seni sia eguale ad $\frac{1}{4}$.

28. Dimostrare che il prodotto dei coseni dei due angoli acuti d'un triangolo rettangolo, è eguale al prodotto dei loro seni.

29. Dimostrare che il prodotto dei coseni di due angoli è maggiore o minore del prodotto dei loro seni, secondo che la somma dei due angoli è minore o maggiore di 90°.

30. Se la somma degli angoli a e b è minore di 90°, e se hanno luogo le diseguaglianze:

$$\frac{3}{8} < \operatorname{sen} a \cos b < \frac{3}{7},$$

cosa si può asserire sui prodotti:

$$\operatorname{sen}(a+b) \cos b, \quad \operatorname{sen} a \cos(a+b)\,?$$

D. Besso.