Bruno D'Amore

Alcune questioni didattiche connesse con l'insegnamento della geometria

L'articolo di B. D'Amore, già stimolante come contributo originale e preciso nella documentazione ad un argomento classico nel dibattito sull'insegnamento, assume più risalto se si considera che l'autore, responsabile della Collana LPM della Zanichelli, combatte in prima linea la sua battaglia per un rinnovamento della didattica.

1. Premesse didattiche.

È fuori dubbio il fatto che uno dei problemi più delicati, in campo didattico, è quello connesso con l'insegnamento della geometria: l'introduzione dei giovani in un dominio di enti astratti, rintracciabili solo con notevoli sforzi nel mondo che ci circonda, presenta difficoltà di rilievo. Si pone subito, imbarazzante ma primaria, la questione: è meglio procedere induttivamente, per osservazioni sulla realtà, estraendo i concetti che occorrono (punti, rette, piani,...) da astrazioni fatte sul concreto; oppure è meglio avvertire subito, chiaramente, anche se ciò richiede una buona dose di coraggio, che gli enti della geometria sono primitivi, che gli assiomi sono solo asserzioni di comodo, che servono per raggiungere i risultati che desideriamo ottenere?

La seconda posizione è certamente più difficile, didatticamente; ma assai più corretta, scientificamente. Tanto più, se si ha anche la forza d'animo di « affrontare » i giovani (di età, supponiamo, variabile tra i quattordici ed i quindici anni, e dunque, però, già in grado di accettare non solo processi di astrazione, ma pure procedimenti deduttivi) spiegando loro che i termini « punto », « retta », ... sono solo *parole* di un *vocabolario*; che gli assiomi sono solo *regole sintattiche* che mascherano la costruzione di *frasi logiche ben formulate* (i postulati dell'ordine, per esempio, spiegano non « cos'è » l'ordine, ma come va correttamente usato il « tra », sintatticamente). Ciò può generare il caos o la disperazione, il rifiuto. Ma può anche, se il discorso matematico è stato sempre avviato e condotto su un piano logico invece che esclusivamente realistico (e dunque senza gli sforzi che una simile forzatura richiede), interessare molto i giovani, i quali ritrovano in questo espediente una esemplificazione notevole e corretta di quel che è l'uso della logica. La semantica scaturisce dalla lettura complessiva dei termini e degli assiomi, dalle proposizioni, dimostrate come teoremi. Il significato delle singole frasi è già insito in ciascuna delle definizioni, delle posizioni; ma non è unico. Perchè, come già avvertiva Hilbert, un sistema geometrico può essere disponibile per altre interpretazioni (si ricordi il celebre aneddoto sui bicchieri di birra, i coltelli, le forchette, i cucchiai, ...).

È ovvio, però, che una tale metodologia didattica è molto pericolosa, se viene interpretata restrittivamente, cioè se le precedenti considerazioni sono intese in senso stretto. Non c'è nulla di peggio, didatticamente, che un discorso del tutto astratto, lontano dalla realtà. Passo dopo passo, man mano che gli allievi hanno raggiunto un traguardo, è assolutamente necessario riscontrare, nella realtà, che il traguardo rappresenta (seppure in astratto) un'idea molto concreta che si ritrova attorno a loro stessi, che è facile scoprire ed osservare con spirito diverso. Dunque, il modello reale scaturisce da esigenze di carattere esemplificativo, dopo che un certo risultato didattico è stato raggiunto. E ciò sia per non perdere contatto con la realtà (il che sarebbe molto grave) sia per esercitare didatticamente l'allievo a prendere coscienza del fatto che i risultati teorici hanno pur sempre un preciso ed importante riscontro nella realtà. Anche l'uso e l'apprendimento della logica non vanno intesi in senso totalmente astratto o formale, come semplici calcoli o regolette mnemoniche, anzi ... Un siffatto insegnamento è del tutto deleterio e sterile. La logica deve scaturire da una esigenza che deve essere avvertita dallo studente stesso, come un linguaggio più « formale » che serve a rendere più chiaro, conciso e corretto il linguaggio comune. Dunque, non una logica formale ma una logica che sia semplicemente la formalizzazione del linguaggio di tutti i giorni. Il linguaggio comune, infatti, quello cioè che il ragazzo usa in casa o con i compagni, è la prima vera realtà sociale con la quale egli si scontra: prima ancora della classe sociale nella quale si trova a vivere, il ragazzo si accorge della maggior o minor facilità che egli riscontra nelle sue capacità espressive, dialettiche o dialogiche. L'analisi del linguaggio comune è già esercizio di logica, non astratto, anzi concretamente inserito in problematiche sociali d'indubbia importanza. Da questa analisi scaturisce la necessità, almeno nelle scienze, di esprimersi in maniera un po' meno « significativa », forse, ma più « tecnica », eliminando ogni ambiguità, ogni possibile doppio senso. È facile mostrare come una stessa proposizione geometrica, per esempio, sia interpretabile in diversi modi; e come invece l'uso della logica (anche di questa logica assai semplice ed intuitiva) dia rigore ed univocità di lettura. Dunque, l'insegnamento della matematica in generale e della geometria in particolare, dovrebbe partire dallo studio della logica.

Tornando più espressamente alla didattica della geometria, è chiaro che una posizione di questo tipo va aiutata, proprio per la sua intrinseca difficoltà, con una metodologia che sia di effettivo sostegno. Ebbene, ancora una volta la logica ci viene in aiuto, fornendoci i « modelli ».

È essenziale avviare i giovani alla comprensione di cosa sia un modello geometrico. Si tratta di far loro inventare modelli che soddisfino certi postulati e non certi altri, che soddisfino tutti i postulati tranne uno, e così via. Ciò si potrà e anzi si dovrà mettere in relazione con un preliminare discorso sulla coerenza delle teorie e sulla indipendenza degli assiomi. Il fatto che esista un modello di una teoria, significa che la teoria è coerente (perlomeno, è tanto coerente quanto lo è quella dalla quale è stato tratto il modello). Inoltre, il fatto che esista un modello che soddisfa tutti gli assiomi tranne uno, significa che questo assioma non è conseguenza degli altri.

È bene anche non insistere a considerare il quinto postulato come quello che ha le funzioni di « orco ». Di fatto, non è un postulato « peggiore » degli altri... Allo scopo basta parlare un po' del modello di Young, per mostrare che in esso valgono diversi postulati, compreso quello delle parallele, ma non tutti.

Per introdurre il discorso, e dato che forse non a tutti è noto questo modello, lo vogliamo ricordare.

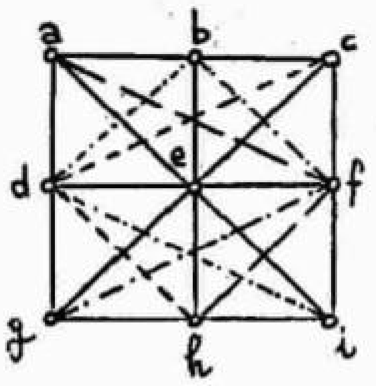
Il modello di Young consta di due insiemi:

un insieme A di « punti », $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;

un insieme B di « rette », $B = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, i\}, \{a, d, g\}, \{b, e, h\}, \{c, f, i\}, \{a, e, i\}, \{c, e, g\}, \{b, f, g\}, \{b, d, i\}, \{h, f, a\}, \{h, d, c\}\}$,

ciascuna « retta » essendo una terna di « punti ».

Ebbene in questo modello vale il postulato delle parallele; per esempio, data la « retta » $\{h, d, c\}$ ed un « punto » ad essa esterno, per esempio i, esiste solo la « retta » $\{a, e, i\}$ che passa per i ed è parallela a (cioè non ha punti in comune con) la « retta » data. Si può visualizzare il modello, anzi con i ragazzi si rivela necessario farlo, come nella figura 1.



Così, pure interessanti sono i modelli delle geometrie di Lobacevskij (per esempio quello della conica del Klein, che può anche ridursi, per l'occasione, ad una circonferenza) o di Riemann [1].

[1] Su questi argomenti, si consiglia di consultare il testo di E. CARRUCCIO, *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna, 1972.

2. I postulati sono proprio intoccabili?

Resta sempre il dubbio, però, ed è stato più volte notato tra studenti ed insegnanti, che vi siano certi postulati « intoccabili », cioè tali che la loro modifica debba necessariamente portare ad un crollo di tutta la teoria. Uno di questi postulati, solitamente ammesso con debita fede, è quello dell'appartenenza, secondo il quale due punti individuano una ed una sola retta. Di fatto, in quasi tutte le geometrie più conosciute, le cose stanno così: questo postulato non è ritoccato. Ecco perché, di seguito, suggeriamo invece una geometria nella quale proprio questo postulato è ritoccato. Forniamo anche due modelli di questa geometria, il primo banale, ma proprio per questa sua banalità assai convincente; il secondo un po' meno banale, ma imperfetto: il suo scopo è solo quello di fornire un'idea intuitiva di come potrebbero andare le cose...

3. I postulati [2]

I Gruppo: *Postulati dell'appartenenza.*

P 1.1. Due punti distinti, A, B appartengono sempre a due e due sole rette r', r'' la cui coppia non ordinata è da essi univocamente determinata.

Def. 1. Si chiama « retta completa » r la coppia di rette r', r'' individuate da una coppia di punti distinti A, B.

P 1.2. Data una retta r', ad essa appartengono almeno tre punti. Data una retta completa r, ad essa appartengono almeno due punti oltre quelli che la individuano.

P 1.3. Dati due punti A, B e la retta completa r da essi individuata, esiste almeno un punto P che non appartiene alla retta completa detta.

---

[2] La divisione e l'enunciazione dei postulati in 5 gruppi rispecchia la formulazione classica dell'Hilbert. Il concetto di appartenenza va considerato come primitivo.

II Gruppo: *Postulati dell'ordine.*

P 2.1. Se A, B, C sono punti di una retta r' e B giace tra A e C, allora B giace pure tra C ed A.

P 2.2. Se A e C sono punti di una retta r', vi è sempre almeno un punto B della retta che giace tra A e C. Ed almeno un punto D della retta tale che C giace tra A e D.

P 2.3. Fra tre punti di una retta r', ve n'è sempre uno ed uno solo che giace tra gli altri due.

Def. 2. Ciascuna delle due parti in cui una data retta r' è divisa da un punto P di essa in due parti che hanno intersezione comune in P, è detta semiretta di vertice P o uscente da P.

Def. 3. Si chiama segmento di una retta s' di estremi A, B l'insieme dei punti che seguono A e precedono B, compresi A e B stessi.

Def. 4. Si chiama triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ la figura formata dai tre punti A, B, C, (non appartenenti ad una stessa retta), detti vertici, e da una terna di segmenti aventi ciascuno per estremi una coppia di essi [3]. Si chiama lato $(AB)'$ del triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ il segmento di retta r' di estremi A e B, essendo r' una delle componenti la retta completa individuata da A e B.

P 2.4. (Assioma di Pasch). Sia dato un triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ di lati $(AB)'$, $(BC)'$, $(AC)'$. Se una retta s' incontra il lato $(AB)'$ in uno ed un solo punto (distinto da A e da B), allora necessariamente incontra pure in uno ed un solo punto uno ed uno solo dei due restanti lati del triangolo.

III Gruppo: *Postulati del movimento.*

P 3.1. I movimenti sono particolari corrispondenze biunivoche del piano che formano gruppo.

---

(3) È facile verificare che, dati i tre vertici, sono otto i possibili triangoli aventi quei vertici.

P 3.2. Sia A_1 un punto del piano π ed r_1 una semiretta di π uscente da A_1. Sia poi A_2 un ulteriore punto di π ed r_2 una semiretta di π uscente da A_2. Esiste uno ed un solo movimento che sovrappone A_1 ad A_2, r_1 ad r_2 e uno dei semipiani π_1^* di π individuati da r_1 ad uno ed un solo semipiano π_2^* di π dei due individuati da r_2.

IV Gruppo: *Postulato della continuità.*

P 4. (Assioma di Dedekind). Sia AB un segmento rettilineo, diviso in due parti in modo che:

i) ciascun punto di AB appartenga ad una ed una sola delle parti;

ii) l'estremo A appartenga alla prima parte, l'estremo B alla seconda;

iii) ciascun punto della prima parte preceda un qualsiasi punto della seconda parte (nell'ordine da A a B);

sotto tali ipotesi, esiste un punto C del segmento AB (appartenente all'una parte od all'altra), tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte; mentre ogni punto di AB che segue C appartiene alla seconda parte [4].

Def. 5. Sia r' una retta e P un punto ad essa esterno. Il fascio delle rette per P è formato di rette secanti r' e di rette non secanti r'. Chiamiamo classe delle secanti la prima, classe delle non secanti (o parallele) la seconda.

V Gruppo: *Postulato delle parallele.*

P 5. Data una retta r' ed un generico punto P ad essa esterno, esistono due e due sole rette per P parallele ad r'.

---

[4] V. testo già citato, pp. 231-2.

4. Descrizione del modello euclideo.

Com'è noto, per dimostrare la non contraddittorietà di una teoria **T**, basta costruire un modello **M** di **T** nell'ambito di una teoria **N** la cui non contraddittorietà sia o già provata od ammessa ([5]).

La nostra teoria **T** (che chiameremo « geometria delle due rette ») ha un modello **M** nella geometria euclidea ordinaria una volta operate le seguenti interpretazioni:

geometria delle due rette		modello della geometria euclidea
piano	$\rightarrow$	piano
punto	$\rightarrow$	punto
retta completa per due punti A, B	$\rightarrow$	coppia di rette orientate $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$ sulla stessa direzione individuata da A e B.

Per la dimostrazione della non contraddittorietà della geometria delle due rette ci serviremo anche della geometria analitica piana ordinaria.

5. Dimostrazione della non contraddittorietà dei postulati

Allo scopo di ottenere tale dimostrazione, occorre provare, quali teoremi, le affermazioni che si ricavano sostituendo in 2., in tutti gli enunciati P i.j., *retta orientata* al posto di *retta*.

Dimostriamo solo P 1.1. e, tra i successivi, i meno banali.

P 1.1. diventa: Due punti distinti A, B appartengono sempre a due e due sole rette orientate r', r'' la cui coppia è da essi univocamente determinata.

([5]) V. testo già citato, pp. 294-5.

Infatti, com'è noto, dati due punti A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) essendo le coordinate espresse in forma cartesiana, sono due e due sole le rette orientate che passano per essi, aventi in comune la direzione individuata dai due punti dati:

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

essendo note le espressioni di a, b, c in termini di x_h, y_h, $h = 1{,}2$.

P 1.2., P 1.3., P 2.1., P 2.2., P 2.3., diventano banali, se si considera che sono indipendenti dall'ordine scelto su una retta, quindi valgono indifferentemente sia per rette orientate, sia per rette non orientate.

P 2.4. cioè l'assioma di Pasch, vale in maniera banale se si considera che nella definizione (n. 2.) di triangolo, se non consideriamo l'orientamento dei lati, otteniamo il triangolo nel senso solito.

Consideriamo ora le eguaglianze seguenti:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x \cos t - y \operatorname{sen} t + p \\ y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t + q, \end{cases}$$

dove t è un valore non negativo e p e q sono numeri reali.

Le (1) sono le equazioni delle uguaglianze dirette, che vengono generalmente chiamate « movimenti ».

Com'è noto, l'insieme dei movimenti nel piano forma gruppo, col che è dimostrato P 3.1.. È pure noto, del resto, che i movimenti mutano rette in rette e conservano l'appartenenza. Se una retta orientata r' viene mutata in un'altra retta orientata s', il semipiano destro (o sinistro) dedotto da r', verrà a corrispondere a quello destro (o sinistro) dedotto da s' se alla orientazione positiva di r' corrisponderà la orientazione positiva di s' (e viceversa). Del resto il nostro P 3.2. non è che una diversa presentazione del classico secondo postulato del movimento nella maniera hilbertiana.

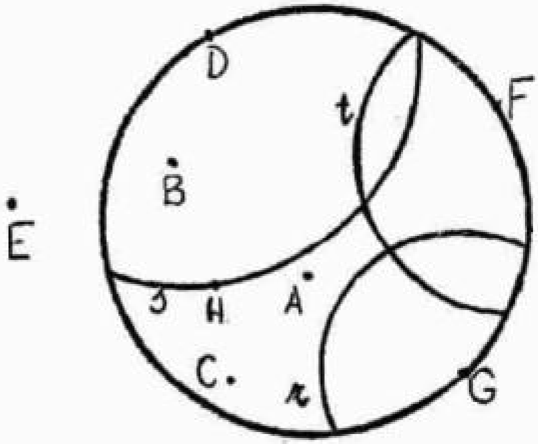
Vale, in maniera analoga al P 1.2. e successivi, il P 4. (assioma di Dedekind), dato che vale per le direzioni (rette non orientate).

Infine, vale il P 5., se premettiamo le considerazioni seguenti. Sia r' una retta orientata e P un punto ad essa esterno. Com'è ovvio, dato che il modello è tratto dalla geometria euclidea, esiste una retta (non orientata) per P non secante r'; ed esistono due rette orientate per P non secanti r' aventi direzione comune e versi opposti. Quindi, la classe delle rette orientate non secanti r' e passanti per P è formata di due elementi distinti.

Con ciò si ritiene provato P 5.

6. Un altro modello

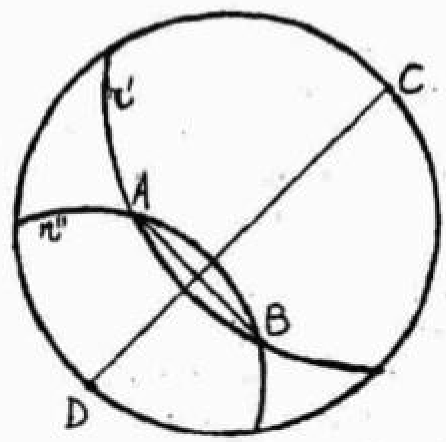
Sia γ una circonferenza. Chiamiamo « punti » i punti interni a γ, dunque escludendo i punti di γ. Chiamiamo « rette » gli archi di circonferenza (estremi esclusi) interni a γ e ottenuti facendo centro su punti di γ. Per esempio, la figura mostra « punti », A, B, C; oggetti che non sono « punti » del modello, D, E, F; « rette » r, s, t; in particolare, la « retta » r, formata di « punti », nel modello è un arco di circonferenza con centro in G che sta sulla circonferenza γ; così pure per s (centro in D) e t (centro in F).



$H \in s$
$A \notin r$
$r \parallel s$

Ebbene, in questo modello, dati due « punti », A, B (si veda la figura seguente), esistono due « rette » r', r'' che sono individuate dai detti « punti ».

La costruzione delle circonferenze che individuano le « rette » r', r'' è indicata in figura. Si tracci l'asse del segmento AB; si determinino C, D sulla circonferenza. Facendo centro in C e D, con raggi CA e DA, rispettivamente, si ottengono le « rette » r', r''.



Questo modello soddisfa parecchi degli altri assiomi, ma *non tutti*. Un buon esercizio per lo studente consiste proprio nello scoprire, dato un modello, quali sono gli assiomi che questo verifica e quali, invece, non sono verificati.