Geometria elementare e geometria analitica (*)

I.

1. Chi consideri attentamente l'evoluzione del pensiero scientifico attraverso lo svolgersi della preistoria e della storia del genere umano, può riscontrare anche in essa l'interessante fenomeno studiato dal VICO per le umane vicissitudini col nome dei *corsi e ricorsi storici*, secondo cui gli avvenimenti si succedono in cicli o periodi aventi fra loro affinità tanto considerevoli da lasciare a prima giunta stupiti. La storia delle idee e delle cognizioni scientifiche negli ultimi sei millenni può infatti venire divisa in tre periodi, presentanti fra loro varie analogie, ciascuno dei quali consta approssimativamente di 2000 anni, e comprende pochissimi secoli di vero splendore preceduti e seguiti da innumerevoli anni di grigiore, o di tenebre rotte soltanto qua e là da qualche sprazzo o bagliore improvviso.

Il primo ciclo si inizia circa 6000 anni or sono, e fa capo all'antichissima civiltà sumerica, raggiungendo il suo apogeo prima dei tempi di HAMMURABI (2000 a. C.), coi quali esso si chiude. Com'è stato accertato recentemente dagli scavi fatti ad *Ur* nel basso Eufrate, a *Kish* (presso Babilonia), ecc., e dallo studio di migliaia di tavolette di argilla scoperte in tali scavi, già 5000 anni fa gli architetti sumeriani usavano correntemente non soltanto le colonne, ma anche gli archi, la volta, la cupola, elementi architettonici che non furono noti in Occidente che migliaia di anni più tardi; inoltre quei popoli possedevano un

(*) Conferenza tenuta il 7 dicembre 1947 alla Sezione Emiliana della « Mathesis ».

bagaglio notevolissimo di cognizioni astronomiche e matematiche. Il secondo ciclo si inizia col trapasso dalla civiltà sumerica a quella babilonese ed egiziana; in essa troviamo dapprima abbassato il livello culturale e travisato lo spirito scientifico, allora appannaggio di una ristrettissima casta sacerdotale. La tradizione vuole che dall'Egitto TALETE, il fondatore della prima scuola greca di matematica e filosofia, abbia tratto le cognizioni geometriche da lui portate nell'Ellade (6° o 7° sec. a. C.). Ha così origine il fulgidissimo periodo di formazione e di sviluppo della scienza geometrica greca, il quale è tutto contenuto nei tre secoli che da PITAGORA (6° sec. a. C.) vanno ad EUCLIDE, ad APOLLONIO, e ad ARCHIMEDE (3° sec. a. C.). L'alto grado di perfezione così rapidamente raggiunto è seguito da un periodo di stasi e di regresso, interrotto poi dai contributi della scuola alessandrina di PAPPO e di DIOFANTO (3° sec. d. C.). Coi lunghi secoli di oscurantismo dovuti alle invasioni barbariche ha inizio il terzo ciclo. Durante questi secoli il mondo arabo rimane depositario della scienza antica, la quale viene poi ritrasmessa in Europa dai nostri mercanti, e sviluppata mediante la creazione della prospettiva e dell'algebra ad opera degli artisti e degli scienziati del nostro Rinascimento. Finchè, nella prima metà del secolo XVII°, ha inizio con GALILEO e con DESCARTES la nuova splendida fioritura che, in poco più di tre secoli, ci ha portati con ritmo accelerato ai recenti grandiosi sviluppi nei vari rami scientifici.

Secondo le vedute suesposte, e come purtroppo lasciano adito a presumere sintomi di carattere sociale a tutti noti, nonchè riflessioni, su cui non ho tempo di intrattenermi, concernenti l'essenza degli indirizzi scientifici attualmente predominanti, un periodo di decadenza non dovrebbe ormai essere lontano, seppure già non ha avuto inizio fra noi. A consolarci da questa melanconica previsione, è opportuno rilevare che l'esame dei tre grandi periodi dianzi adombrati ci autorizza ad avere fiducia nel progresso dei successivi stadi dell'umanità, anche se tale progresso avviene attraverso ad alti e bassi paurosi, di cui ci sfuggono le ragioni profonde. Farò ora molto succintamente tale esame, limitandomi a considerazioni schematiche sullo sviluppo del pensiero matematico attraverso ai millenni.

2. L'interpretazione dei documenti sulla preistoria della scienza, scoperti da cento anni a questa parte, fu dapprima tanto ottimista da fare ritenere che Egiziani, Babilonesi e Sumeri già possedessero una " scienza " nel senso usuale di questa parola, del tutto paragonabile a quella greca. In realtà però, come dimostrarono con acute analisi critiche vari scienziati, fra cui vanno particolarmente ricordati lo SCHIAPARELLI nel secolo scorso per l'astronomia ed ETTORE BORTOLOTTI negli ultimi decenni per la matematica, le cognizioni scientifiche di quei popoli appaiono non già come frutto di indagine speculativa, ma quasi unicamente come risultato empirico di innumerevoli osservazioni ed esperienze svolte e registrate sistematicamente per secoli e secoli.

È al genio greco che si deve la concezione della scienza come prodotto del puro raziocinio. Tale concezione è così feconda ed originale, per non dire rivoluzionaria, e talmente lontana dalle esigenze sociali quotidiane, da poterne ascrivere la scoperta quasi a miracolo: tanto che lo ZEUTHEN riteneva che il ritorno in Occidente dello spirito scientifico sarebbe poi stato impossibile, se l'opera di EUCLIDE fosse andata irremissibilmente smarrita. La molla segreta della mirabile costruzione, su cui poggia tuttora la nostra civiltà, può riscontrarsi in un arcano senso estetico che spingeva gli Elleni a ricercare in ogni cosa ordine, semplicità e chiarezza, intesi quali misura ed armonia.

Tuttavia i canoni estetici si dimostrarono a lungo andare quasi una camicia di Nesso, e, ritardando di secoli le ulteriori conquiste, costituirono una delle cause prime di decadenza del pensiero greco. Ciò si constata ad esempio nelle convenzionali " unità " a cui era sottoposto il dramma greco, e si ritrova altresì nella matematica greca, vincolata e quasi dominata da molteplici restrizioni artificiose o, comunque, contrastanti la sua espansione. Fra queste possiamo ricordare la severa concezione del rigore matematico, e la limitazione dell'esposizione alla forma puramente deduttiva; la convenzione di concedere come regolamentare soltanto l'uso della riga e del compasso nelle costruzioni geometriche; il disprezzo per i calcoli e le applicazioni numeriche e per l'esperienza fisica; le concezioni mistiche dei pitagorici inerenti alla nozione di numero, le quali indussero i Greci a non riconoscere l'esistenza di numeri irrazionali, ancorchè fin da EUCLIDE fossero state ammesse e studiate le grandezze incommensurabili; infine la rigida decisione — dopo la critica eleatica e le argomentazioni di ANASSAGORA — di rigettare dalla scienza ogni considerazione in cui facessero capolino le nozioni di infinito o di infinitesimo, senza la quale si sarebbe forse potuto annoverare ARCHIMEDE come lo scopritore del calcolo infinitesimale. Ed è appunto superando tali molteplici riserve, che furono poi create l'algebra e l'analisi infinitesimale, la geometria analitica e le diverse estensioni iperspaziali sulle quali in epoca recente è stata imperniata la teoria della relatività.

È curioso rilevare che, fra le varie cause storiche che favorirono quel superamento, ve ne sono due di carattere religioso. Infatti, da un lato, gli Arabi furono spinti a coltivare gli studi matematici dalle complicatissime leggi prescritte dal Corano per la suddivisione delle eredità; ciò li costrinse ad un certo virtuosismo di calcolo numerico ed algoritmico, in cui può riscontrarsi il primo germe dell'algebra, e ad adottare per la numerazione il sistema posizionale a base dieci tuttora in uso fra noi, sistema ch'essi probabilmente desunsero dagli Indiani. L'importanza scientifica di quest'ultimo ritrovato, avente in apparenza soltanto utilità pratica, risiede in ciò ch'esso rende manifesta l'esistenza di numeri grandi a piacere, mentre invece ARCHIMEDE aveva dovuto scrivere una operetta, intitolata *L'Arenario*, onde dimostrare l'esistenza di numeri superiori a quello dei granelli di arena che comporrebbero la terra od una massa di arena avente le dimensioni del Cosmo; e così si aprì il valico che doveva condurre all'infinito matematico ed ai vari procedimenti per induzione. Un'altra causa favorevole può riscontrarsi nel Cristianesimo, il quale, col trasportare il fervore spirituale dalla cerchia fisico-speculativa a quella metafisico-dogmatica, contribuì potentemente all'emancipazione dai rigidi schemi degli Antichi.

La prima costruzione matematica compiuta nel nuovo indirizzo fu la *geometria analitica*; ed il confronto fra questa e la *geometria euclidea* esemplifica egregiamente la disparità fra la mentalità moderna e l'antica. Ai vincoli ed alla rigidezza espositiva dell'una fanno contrapposto l'estrema generalità e duttilità nonchè l'eclettismo nei metodi di indagine e di dimostrazione dell' altra, mentre all' intuizione geometrica degli Antichi viene in questa sostituita un' impalcatura algoritmica preludente alla successiva aritmetizzazione della matematica. Va riconosciuto che ciò che si guadagnava in ampiezza di vedute veniva alle volte perduto in fatto di rigore, virtuosismo ed eleganza; ma conviene aggiungere che l'affinamento dei metodi portava a nuove armonie ed a nuove forme di intuizione matematica, le quali nulla avevano da invidiare alle antiche.

II.

3. Una fra le limitazioni della geometria greca, che viene automaticamente tolta dalla geometria analitica, consiste in ciò che in quella, mentre compare correntemente il rettangolo o prodotto di due segmenti, si considera come privo di senso il prodotto di due aree. Orbene, questa nozione può introdursi geometricamente usufruendo dello spazio a quattro dimensioni, oppure — senza uscire dal piano — ricorrendo all' idea semplice ma geniale, sovente attribuita a DESCARTES ma che già trovasi in LEONARDO PISANO, in LEONARDO DA VINCI e, in forma sistematica, in RAFFAELE BOMBELLI, di valersi opportunamente di un segmento unità, mediante cui il prodotto di due segmenti, e quindi pure di due aree, ecc., può rappresentarsi con un nuovo segmento. Risulta così che, accordando diritto di cittadinanza alla nozione suddetta e ad altre consimili, si vengono ad allargare i confini della geometria elementare tramandataci dai Greci, senza tuttavia che all' uopo sia necessario ricorrere nelle dimostrazioni a metodi nuovi. È chiaro però come la trattazione di vari problemi nell' indirizzo così esteso possa snellirsi notevolmente mediante un uso appropriato della geometria analitica, delle teorie gruppali, ecc., onde ancora una volta una veduta superiore verrà a dimostrarsi estremamente utile — ancorchè non indispensabile — in questioni elementari.

Di ciò dò prova in questo lavoro, dove stabilisco varie *relazioni non lineari* (in parte note) *fra le aree dei triangoli determinati da cinque o più punti di un piano*, in taluna delle quali intervengono pure gli *angoli* di tali triangoli. Le relazioni fra aree soltanto hanno speciale interesse, in quanto ciascuna di esse è invariante di fronte alle trasformazioni affini del piano, e vengono tutte qui ottenute (nn. 5-7) — in modo assai semplice — coll' uso dello strumento analitico e di un' opportuna trasformazione affine. Particolarmente da rilevarsi sono le relazioni del tipo suddetto esprimenti le condizioni necessarie e sufficienti affinchè cinque punti di un piano stiano su di una parabola (n. 10) o su di un' iperbole equilatera (n. 13).

4. Rammentiamo che un' affinità fra piani è una corrispondenza omografica in cui le rette all' infinito si corrispondono: si individua pertanto un' affinità fra due piani, assegnando arbitrariamente in essi due triangoli omologhi. Le aree di due regioni corrispondenti in un' affinità stanno notoriamente in un rapporto costante, che prende il nome di rapporto di affinità.

Consideriamo su di un piano orientato un qualunque numero di punti $P_1, P_2, \ldots$. A norma di ciò che precede, tre qualsiansi P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3} di essi non posseggono nessun invariante affine assoluto; essi però ammettono uno ed un solo invariante affine relativo, il quale precisamente si altera di fronte ad un' affinità nel rapporto a questa relativo, invariante dato dall' area del triangolo $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$, a cui si attribuisca un segno nel modo usuale. Denoteremo con $|P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}|$ il doppio di tale area, onde l' annullarsi di questo invariante relativo sarà condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3} siano allineati.

Introduciamo nel piano un qualunque sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y), e denotiamo con (a_i, b_i) le coordinate di P_i. In virtù di una ben nota formula di geometria analitica avremo

$$(1) \qquad |P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}| = \begin{vmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} & 1 \\ a_{i_2} & b_{i_2} & 1 \\ a_{i_3} & b_{i_3} & 1 \end{vmatrix},$$

il segno di quest' espressione essendo positivo o negativo secondochè il triangolo $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$ è orientato positivamente o negativamente. In ogni caso sarà dunque:

$$|P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}| = - |P_{i_2}P_{i_1}P_{i_3}|, \quad \text{ecc.}.$$

5. Supporremo che i punti P_i non giacciano tutti su di una linea retta, onde non sarà restrittivo supporre che ad

esempio $P_1 P_2 P_3$ non siano allineati. Potremo allora considerare l' affinità Ω trasformante questi punti ordinatamente nei punti

$$P_1'(0, 0), \qquad P_2'(0, 1), \qquad P_3'(1, 0),$$

e sia ω il relativo rapporto di affinità. Denotando con $P_4'(a, b)$ il trasformato di P_4 mediante Ω, avremo in base alla (1) ed al n. 4:

$$(2) \quad \begin{gathered} |P_3P_2P_1| = \omega, \quad |P_1P_2P_4| = -\omega a, \quad |P_3P_1P_4| = -\omega b, \\ |P_2P_3P_4| = \omega(a + b - 1). \end{gathered}$$

Dalle (2) si deducono le

$$a = |P_1P_2P_4| / |P_1P_2P_3|, \qquad b = |P_3P_1P_4| / |P_1P_2P_3|,$$

mostranti che a e b sono *due invarianti assoluti* dei quattro punti $P_1P_2P_3P_4$. Essi sono fra loro indipendenti, e la loro conoscenza — individuando il punto $P_4'(a, b)$ — definisce la quaterna di punti $P_1P_2P_3P_4$ a meno di una trasformazione affine. Avuto riguardo alle (2), concludiamo che:

Quattro punti $P_1P_2P_3P_4$ *di un piano non ammettono invarianti affini indipendenti dai loro loro quattro invarianti relativi* (1), *i quali sono soggetti unicamente alla condizione lineare.*

$$(3) \quad |P_1P_2P_4| + |P_2P_3P_4| + |P_3P_1P_4| + |P_3P_2P_1| = 0. \text{ [1]}$$

Si può osservare che, permutando $P_1P_2P_3P_4$ arbitrariamente, i quattro addendi nel primo membro della (3) subiscono soltanto una permutazione, eventualmente accompagnata da un simultaneo cangiamento di segno. Dunque il prodotto di quegli addendi è un *invariante relativo dei quattro punti, il cui segno non dipende dall'ordine in cui questi vengono considerati*; denoteremo questo invariante con $|P_1P_2P_3P_4|$. Esso si annulla se, e soltanto se, almeno tre dei punti sono allineati. In base alla (3) è subito visto che, supposto che questa condizione non sia soddisfatta, $|P_1P_2P_3P_4|$ *risulta positivo o negativo secondochè i punti* $P_1P_2P_3P_4$ *sono vertici di un quadrangolo convesso, oppure uno di essi è interno al triangolo degli altri tre.*

---

[1] Questa formula risale a Möbius, al quale devesi altresì la nozione del segno di un'area piana: cfr. A. F. Möbius, *Gesammelte Werke*, vol. 1 (Leipzig, Hirzel, 1885), pp. 39-41.

6. Riferendoci ora a cinque punti $P_1P_2P_3P_4P_5$ di un piano. serviamoci ancora dell'affinità Ω, e denotiamo con $P_4'(a, b)$ e $P_5'(a', b')$ i trasformati di P_4 e P_5 mediante essa. La data quintupla di punti è manifestamente individuata a meno di un' affinità dai quattro numeri a, b, a', b', che risultano invarianti assoluti indipendenti di quella. Attualmente abbiamo 10 invarianti relativi (1), i quali — in base al n. 4 — si calcolano colle

$$(4)\quad \begin{array}{lll} |P_1P_2P_3| = -\omega, & |P_1P_4P_5| = \omega(ab' - a'b), & |P_1P_2P_4| = -\omega a, \\ |P_1P_5P_3| = -\omega b', & |P_1P_2P_5| = -\omega a', & |P_1P_3P_4| = \omega b, \end{array}$$

e colle

$$(5)\quad \begin{array}{ll} |P_2P_3P_4| = \omega(a+b-1), & |P_2P_3P_5| = \omega(a'+b'-1), \\ |P_2P_4P_5| = \omega(ab'-a'b-a+a'), & |P_3P_4P_5| = \omega(ab'-a'b+b-b'). \end{array}$$

Ciascuno degli invarianti (5) si esprime linearmente in funzione degli invarianti (4), le relazioni lineari fra quelli e questi essendo del tipo della (3); inoltre fra gli stessi quattro invarianti (5) intercede una relazione di questo tipo. la quale risulta però una conseguenza lineare delle anzidette quattro. Le (4) non sono legate fra loro da nessuna relazione lineare, ma soddisfanno invece alla relazione quadratica.

$$(6)\quad \begin{array}{c} |P_1P_2P_3|\,|P_1P_4P_5| + |P_1P_2P_4|\,|P_1P_5P_3| + \\ + |P_1P_2P_5|\,|P_1P_3P_4| = 0. \ (^2) \end{array}$$

È poi chiaro che fra i 10 invarianti (1) non intercede nessuna relazione indipendente dalle suddette. Dunque:

Cinque punti $P_1P_2P_3P_4P_5$ *di un piano non ammettono invarianti affini indipendenti dai loro dieci invarianti relativi* (1), *fra i quali intercedono le cinque relazioni lineari e le cinque relazioni quadratiche che rispettivamente si deducono dalle* (3). (6) *circolandovi gli indici* 1, 2, 3, 4, 5. *Soltanto quattro delle prime ed una delle ultime relazioni sono fra loro indipendenti, ed ogni legame fra quegli invarianti risulta una conseguenza algebrica di tali cinque relazioni.* [3]

---

[2] Anche questa formula trovasi già, acquisita altrimenti, in MÖBIUS: ved. loc. cit. in [1], pp. 199-202.

[3] Col linguaggio iperspaziale, assumendo i dieci invarianti (1) quali coordinate omogenee di punto in S_9, in corrispondenza alle varie quin-

Le cinque relazioni lineari dianzi considerate dipendono fra loro, in quanto la somma dei loro primi membri si annulla identicamente; si vede subito, infatti, che nell' eseguire tale somma si ottengono 20 termini dati dai 10 invarianti (4), (5) e dai loro opposti, i quali così si distruggono a coppie. Ne consegue (n. 5) che il prodotto

$$(7) \quad |P_2P_3P_4P_5| \cdot |P_1P_3P_4P_5| \cdot |P_1P_2P_4P_5| \cdot |P_1P_2P_3P_5| \cdot |P_1P_2P_3P_4|$$

uguaglia il quadrato del prodotto dei 10 invarianti (4), (5), ed è quindi sempre positivo o nullo. Avuto riguardo al significato del segno dei singoli fattori in questo prodotto (n. 5), ne discende il seguente teorema, che potrebbe anche stabilirsi agevolmente per via geometrica.

Presi comunque cinque punti a tre a tre non allineati di un piano, il numero delle volte che uno di essi risulta interno al triangolo di tre dei rimanenti può soltanto valere 0 *o* 2 *o* 4.

7. Considerazioni analoghe a quelle svolte nei nn. 5, 6 mostrano che $n\,(\geq 5)$ punti $P_1P_2 \ldots P_n$ di un piano posseggono $2n-6$ *invarianti affini assoluti*; la posizione degli n punti nel piano è individuata, a meno di un' affinità, noti che siano gli $\binom{n}{3}$ invarianti relativi (1), fra cui intercedono certe relazioni algebriche. Ognuna di queste è una conseguenza delle *relazioni lineari* del tipo (3) e delle *relazioni quadratiche* del tipo (6), le quali a loro volta risultano in vario modo dipendenti fra loro.

Più precisamente, fra gli invarianti relativi (1) è sufficiente considerare i seguenti

$$\begin{array}{l} |P_1P_2P_3|,\ |P_1P_3P_4|,\ |P_1P_4P_2|, \\ |P_1P_2P_i|,\ |P_1P_3P_i|,\ |P_1P_4P_i| \qquad (i=5,\,6,\ldots,\,n), \end{array}$$

che sono fra loro linearmente indipendenti, mentre ciascuno dei restanti è a questi linearmente legato. Fra quei $3n-9$ invarianti intercedono però $n-4$ relazioni quadratiche indipen-

---

tuple di punti di un piano, considerate a meno di una trasformazione affine, si ottengono così in S_9 i punti di una V_4^2 non degenere appartenente ad un S_5.

denti, ottenibili dalla (6) collo scrivervi P_i in luogo di P_5 per $i = 5, 6, \ldots, n$. (⁴)

8. Dalla (6) possono agevolmente trarsi varie conseguenze, come risulterà da alcuni esempi che ora esporremo. Se A, B, P sono tre punti qualsiansi, indicheremo con $[ABP]$ l'area del loro triangolo presa in valore assoluto. Mostreremo che:

Se ABCD *è un quadrangolo piano convesso, e* P *denota un punto ad esso interno, risulta*

$$[PAB]\cdot[PCD] = [PAD]\cdot[PBC] \tag{8}$$

se, e soltanto se, P *giace sull'una o sull'altra diagonale del quadrangolo.*

Invero, scrivendo ordinatamente $P_1P_2P_3P_4P_5$ in luogo di $PABCD$ e supponendo per fissare le idee che i punti $ABCD$ si succedano sul contorno del quadrangolo nel verso positivo, si ha

$$|P_1P_2P_3| = 2[PAB], \qquad |P_1P_4P_5| = 2[PCD],$$
$$|P_1P_2P_4| = \pm 2[PAC], \qquad |P_1P_5P_3| = \pm 2[PBD],$$
$$|P_1P_2P_5| = -2[PAD], \qquad |P_1P_3P_4| = 2[PBC].$$

Pertanto, in forza della (6), la (8) equivale alla

$$[PAC]\cdot[PBD] = 0,$$

e questa esprime che P cade su almeno una delle rette AC, BD.

Suppongasi ora che le bisettrici di due angoli opposti di un quadrangolo convesso abbiano in comune un punto P interno ad esso. Come corollario del precedente teorema si vede subito che:

Il punto P *giace su di una diagonale del quadrangolo se, e soltanto se, il rettangolo costruito su due lati opposti di questo è equivalente al rettangolo costruito sugli altri due lati.*

Notiamo infine che, se P_1 è il baricentro del triangolo $P_2P_3P_4$ valgono le uguaglianze

$$[P_1P_2P_3] = [P_1P_3P_4] = [P_1P_4P_2] = \frac{1}{3}[P_2P_3P_4] \neq 0,$$

(⁴) Ciò fornisce una rappresentazione iperspaziale delle n-ple di punti di un piano, considerate a meno di una trasformazione affine, coi punti di una $V_{2n-6}^{2^{n-4}}$ intersezione di $n-4$ quadriche di S_{3n-10}.

ed anche quelle che da qui si deducono sostituendo le graffe alle parentesi quadre. In virtù della (6) si ha quindi che:

Se P_1 *è il baricentro di un triangolo* $P_2P_3P_4$, *per ogni punto* P_5 *del piano di questo risulta*

$$\{P_1P_2P_5\} + \{P_1P_3P_5\} + \{P_1P_4P_5\} = 0.$$

III.

9. Torniamo a considerare cinque punti $P_i(a_i, b_i)$ di un piano ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), che supporremo a quattro a quattro non collineari; vi sarà pertanto una ed una sola conica passante per essi, che chiameremo Γ. L'equazione di Γ può manifestamente scriversi nella forma

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ a_i^2 & a_ib_i & b_i^2 & a_i & b_i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dove la seconda riga sta simbolicamente per indicare le cinque che da essa ordinatamente si ricavano per $i = 1, 2, \ldots, 5$. Sviluppando il determinante a primo membro nella (9) secondo la prima orizzontale, e ponendo per abbreviare

$$(10) \quad \alpha = |a_ib_i \;\; b_i^2 \;\; a_i \;\; b_i \;\; 1|, \quad \beta = -|a_i^2 \;\; b_i^2 \;\; a_i \;\; b_i \;\; 1|, \text{ ecc.},$$

otteniamo invece della (9) la

$$(11) \qquad \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0;$$

è chiaro che i coefficienti (10) di quest'equazione non mutano, a prescindere eventualmente da un simultaneo cangiamento di segno, comunque si permutino i punti P_i.

È noto che la (11) ammette gli invarianti affini relativi

$$(12) \quad \mathfrak{F} = \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{vmatrix} = 4\alpha\gamma - \beta^2, \qquad (13) \quad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta & \lambda \\ \beta & 2\gamma & \mu \\ \lambda & \mu & 2\nu \end{vmatrix},$$

il cui annullarsi esprime rispettivamente che la conica Γ rappresentata dalla (11) è una parabola o si spezza in due rette; inoltre la condizione $\mathfrak{F} > 0$ o la $\mathfrak{F} < 0$ è necessaria e sufficiente affinchè Γ sia rispettivamente un'ellisse od un'iperbole. Tanto (12) quanto (13) sarà dunque un invariante affine della quintupla di punti P_i, e dovrà quindi potersi esprimere in funzione dei dieci invarianti (1) relativi a questi punti (n. 6). Ci proponiamo di ricavare in modo esplicito tali espressioni.

A tal uopo incominciamo coll' osservare che possiamo operare una trasformazione affine arbitraria, senza alterare la struttura delle formule (9)–(13). Più precisamente, detto ω il rapporto dell' affinità, e designando con (x', y') il trasformato del generico punto (x, y), in particolare denotando con (a_i', b_i') il trasformato di $P_i(a_i, b_i)$, per la conica Γ' trasformata di Γ varranno le equazioni, che diremo (9')–(13'), deducibili rispettivamente dalle (9)–(13) coll' accentarvi tutte le lettere. Inoltre, in base alle (10), si ha che il primo membro della (11') può anche ottenersi dal primo membro della (11) esprimendovi le x, y in funzione delle x', y' e dividendo il risultato per ω^4. Poichè $\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{A}$ sono invarianti quadratico e cubico della (11), così sarà

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'(\omega^4)^2/\omega^2 = \omega^6\mathfrak{F}', \tag{14}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'(\omega^4)^3/\omega^2 = \omega^{10}\mathfrak{A}'. \tag{15}$$

10. Supponiamo, com' è lecito, che $P_1P_2P_3$ non siano allineati, ed identifichiamo l' affinità di cui all' ultimo capoverso coll' affinità Ω già considerata nei nn. 5, 6. Allora le (10') forniscono

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha' &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ ab & b^2 & a & b & 1 \\ a'b' & b'^2 & a' & b' & 1 \end{vmatrix} = -bb'(ab' - a'b - a + a'), \\
\beta' &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a^2 & b^2 & a & b & 1 \\ a'^2 & b'^2 & a' & b' & 1 \end{vmatrix} = ab'(a-1)(b'-1) - a'b(a'-1)(b-1), \\
\gamma' &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a^2 & ab & a & b & 1 \\ a'^2 & a'b' & a' & b' & 1 \end{vmatrix} = -aa'(ab' - a'b + b - b'),
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

onde, avuto riguardo alle (4), (5), si ottengono le

$$\alpha' = -\rho_2\omega^{-3}, \quad \gamma' = -\rho_3\omega^{-3}, \quad \beta' = \rho_1\omega^{-3} + \alpha' + \gamma', \tag{17}$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$
(18) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\rho_1 &= |P_2P_3P_4| \cdot |P_2P_3P_5| \cdot |P_1P_4P_5| \\
\rho_2 &= |P_3P_1P_4| \cdot |P_3P_1P_5| \cdot |P_2P_4P_5| \\
\rho_3 &= |P_1P_2P_4| \cdot |P_1P_2P_5| \cdot |P_3P_4P_5| \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Infine dalle (14), (12'), (17) risulta che è

$$\mathfrak{F} = \omega^6(4\alpha'\gamma' - \beta'^2) = 4\rho_2\rho_3 - (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)^2,$$

ossia:

$$(19) \qquad \mathfrak{F} = 2(\rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 + \rho_1\rho_2) - (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2).$$

Pertanto:

Cinque punti $P_1P_2P_3P_4P_5$ *arbitrari di un piano ammettono un invariante affine* $\mathfrak{F}$ *dato dalla* (19), *in cui le* ρ *si esprimono mediante le* (18), *od anche mediante le formule che da esse si deducono permutando comunque i punti* P_i. *Così si ottengono per* $\mathfrak{F}$ *dieci espressioni distinte, che però risultano uguali fra loro, in forza delle relazioni (stabilite nel n. 6) intercedenti fra gli invarianti* (1). *A seconda che* $\mathfrak{F}$ *è nullo, positivo o negativo, la conica* Γ *per i cinque punti* P_i *è una parabola, un'ellisse od un'iperbole.*

I tre casi testè indicati per Γ, possono venire caratterizzati elementarmente nel modo seguente. Si osservi anzitutto che se due delle ρ_1, ρ_2, ρ_3, ad esempio ρ_2 e ρ_3, hanno segni opposti, allora risulta $\mathfrak{F} = 4\rho_2\rho_3 - (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)^2 < 0$. Pertanto, quando $\mathfrak{A} \neq 0$, $\mathfrak{F} \geq 0$, potremo ridurci ad avere $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_3 > 0$ scegliendo opportunamente l'orientazione del piano. Consideriamo quindi in ogni caso tre segmenti (eventualmente imaginari) di lunghezze

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\rho_1}, \quad \sigma_2 = 2\sqrt{\rho_2}, \quad \sigma_3 = 2\sqrt{\rho_3},$$

e notiamo che la (19) equivale alla

$$\mathfrak{F} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3)/16.$$

In base anche alla formula di Erone, abbiamo dunque che

Γ *è una parabola se, e soltanto se, uno dei tre segmenti suddetti uguaglia la somma degli altri due. Se questa condizione non è soddisfatta,* Γ *è un'ellisse od un'iperbole secondochè esiste o meno un triangolo reale costruito su quei tre segmenti. In ogni caso, l'invariante* $\mathfrak{F}$ *dianzi considerato uguaglia il quadrato dell'area del triangolo avente per lati tali segmenti.*

11. Volgiamoci ora all'invariante $\mathfrak{A}$, definito dalla (13). Come già abbiamo avvertito (n. 9), esso *si annulla se e soltanto se la conica* (11) *si spezza in due rette*, ciò che accade allora ed allora soltanto che tre dei punti $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ siano allineati. Se dunque consideriamo il prodotto

$$\mathfrak{H} = \prod_{(i_1, i_2, i_3)} |P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3}| = \prod_{(i_1, i_2, i_3)} \begin{vmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} & 1 \\ a_{i_2} & b_{i_2} & 1 \\ a_{i_3} & b_{i_3} & 1 \end{vmatrix} \tag{20}$$

dei 10 invarianti (4) e (5) (prodotto che così resta definito anche in segno), dovrà $\mathfrak{A}$ risultare divisibile per ciascun fattore di questo prodotto, e cioè si avrà

$$\mathfrak{A} = k\mathfrak{H}, \tag{21}$$

dove k denota un polinomio nelle coordinate (a_i, b_i) dei punti P_i. Questo polinomio deve ridursi ad una costante numerica, poichè, in base alle (13), (10), (20), tanto $\mathfrak{A}$ che $\mathfrak{H}$ sono polinomi di 6° grado in ciascuna di tali coppie di variabili.

Per determinare il valore di k è lecito riferirci ad un qualunque caso particolare, onde potremo ad esempio supporre che, colle notazioni dei nn. 6, 10, sia

$$a' = b' = 1.$$

Attualmente le (16) forniscono

$$\alpha' = b(b-1), \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = -a(a-1),$$

sicchè la (11') si riduce alla

$$b(b-1)x(x-1) - a(a-1)y(y-1) = 0,$$

il cui discriminante (13') vale

$$\mathfrak{A}' = -2\alpha'\gamma'(\alpha' + \gamma') = -2ab(a-1)(b-1)(a-b)(a+b-1).$$

Tenuto conto delle (4), (5), (15), (20), ne discende che ora è $\mathfrak{A} = \omega^{10}\mathfrak{A}' = 2\mathfrak{H}$, sicchè nella (21) dovrà aversi $k = 2$. Resta così provata l'*identità*

$$\mathfrak{A} = 2\mathfrak{H}, \tag{22}$$

in cui $\mathfrak{A}$ si esprime colle (13), (10) e $\mathfrak{H}$ è dato dalla (20), la quale risolve il problema posto nel n. 9 per l'invariante $\mathfrak{A}$.

Va rilevato che il segno di $\mathcal{A}$ è privo di significato geometrico, poichè $\mathcal{H}$, e quindi pure $\mathcal{A}$, cangia di segno quando si traspongano due dei punti P_i.

12. I risultati dei nn. 10, 11 conducono subito a varie conseguenze degne di nota. Anzitutto, rifacendoci a quanto si è detto alla fine del n. 6, si ha che:

Se $\mathcal{A} \neq 0$ e qualcuno dei fattori nel prodotto (7) *è negativo, nel qual caso due o quattro di tali fattori risultano negativi, allora l'invariante $\mathcal{F}$ dato dalle* (18), (19) *dev'essere negativo.*

Infatti è geometricamente evidente che, nell'ipotesi ammessa, la conica Γ per i cinque punti P_i è necessariamente un'iperbole. Più precisamente, in virtù del n. 6 è facile vedere che, se due o quattro dei fattori suddetti sono negativi, i cinque punti P_i sono distribuiti rispettivamente tre su di un ramo di Γ e due sull'altro ramo, oppure quattro su di un ramo di Γ ed uno sull'altro ramo.

Suppongasi in secondo luogo che Γ sia un'ellisse, e cioè che $\mathcal{F} > 0$. In base alla nota teoria degli invarianti metrici delle coniche (5), si ha che il prodotto delle lunghezze dei semiassi di quest'ellisse è dato da $|\mathcal{A}| \cdot \mathcal{F}^{-3/2}$. In forza delle (19), (22), ne consegue che

L'area dell'ellisse determinata da cinque punti P_i vale

$$\frac{2\pi\,|\mathcal{H}|}{[2(\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1+\rho_1\rho_2)-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)]^{3/2}}\,,$$

dove $\mathcal{H}$ e le ρ si calcolano mediante la (20) *e le* (18).

Questo teorema, che estende risultati precedentemente stabiliti da STEINER (6) e KOLLROS (7), è stato ottenuto recentemente per altra via, e con notazioni leggermente diverse, da RODEJA (8).

---

(5) Per la quale cfr., ad es., G. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica*, nuova ristampa (Milano, Albrighi Segati, 1946), pp. 419-426.

(6) J. STEINER, *Gesammelte Werke*, vol. 2 (Berlin, Reimer, 1882). p. 329.

(7) L. KOLLROS, *Démonstrations de formules de Steiner*, Comment. Math. Helv., vol. 16 (1944), pp. 60-64.

(8) E. G. RODEJA F., *Aire de l'ellipse déterminée par cinq points*. Comment. Math. Helv., vol. 20 (1947), pp. 172-176.

13. Vogliamo da ultimo determinare sotto quale condizione la conica Γ, di cui al n. 9, risulta un'iperbole equilatera. È noto (9) che la condizione all'uopo necessaria e sufficiente è che l'invariante lineare

$$\mathfrak{J} = \alpha + \gamma$$

della (11) si annulli: si tratta ora di esprimere $\mathfrak{J}$ geometricamente mediante i punti P_i. Va da sè che, siccome $\mathfrak{J}$ è un invariante metrico ma non affine di Γ, nell'espressione di $\mathfrak{J}$ non potranno entrare soltanto gli invarianti affini del tipo (1), ma dovranno altresì figurare distanze od angoli determinati dai punti P_i.

Scegliamo tre qualunque di questi punti, ad esempio $P_1 P_2 P_3$, che siano vertici di un triangolo: e denotiamo con

$$(23) \qquad \theta_1 = P_3 \widehat{P_1} P_2, \quad \theta_2 = P_1 \widehat{P_2} P_3, \quad \theta_3 = P_2 \widehat{P_3} P_1$$

gli angoli di tale triangolo. A norma della prima equazione (4) avremo (anche in segno)

$$(24) \qquad \omega = \overline{P_1 P_2} \cdot \overline{P_1 P_3} \cdot \operatorname{sen} \theta_1 ,$$

dove $\overline{P_1 P_2}$ e $\overline{P_1 P_3}$ denotano le lunghezze dei segmenti $P_1 P_2$ e $P_1 P_3$ prese in valore assoluto. Introduciamo quindi un nuovo sistema di coordinate cartesiane, generalmente oblique, ponendo l'origine in P_1, ed assumendo come assi x_1 ed y_1 rispettivamente le rette $P_1 P_3$ e $P_1 P_2$ orientato da P_1 verso P_3 e verso P_2; l'angolo dei nuovi assi è pertanto θ_1. Se dunque Γ ha rispetto a questi assi l'equazione

$$(11_1) \qquad \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2 + \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 = 0,$$

trasformata della (11), risulta notoriamente (10)

$$(25) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\alpha_1 - \beta_1 \cos \theta_1 + \gamma_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_1} .$$

Osserviamo ora che, a norma di quanto si è detto nel n. 10, il primo membro della (11_1) può ottenersi dal primo membro

---

(9) Cfr. p. es. G. CASTELNUOVO, op. cit. in (5), p. 425.

(10) Ved. ad es. G. CASTELNUOVO, op. cit. in (5), p. 423.

della (11') col moltiplicarlo per ω^4 e porvi

$$x' = x_1/\overline{P_1P_3}, \quad y' = y_1/\overline{P_1P_2}.$$

Avuto riguardo alla (24) si ha dunque:

$$\alpha_1 = \alpha'\omega^3 \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_1P_3}} \operatorname{sen}\theta_1, \quad \beta_1 = \beta'\omega^3 \operatorname{sen}\theta_1, \quad \gamma_1 = \gamma'\omega^3 \frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_1P_2}} \operatorname{sen}\theta_1$$

onde, in base alle (17) ed alla

$$\overline{P_1P_2}:\overline{P_1P_3} = \operatorname{sen}\theta_3 : \operatorname{sen}\theta_2,$$

si ottiene:

$$\alpha_1 = -\rho_2 \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_3}{\operatorname{sen}\theta_2}, \quad \beta_1 = (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)\operatorname{sen}\theta_1,$$

$$\gamma_1 = -\rho_3 \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_3}.$$

Sostituendo nella (25) ed usufruendo della $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv \pi \pmod{2\pi}$, con facile calcolo si ricava:

$$-\mathfrak{J} = \rho_1 \cot\theta_1 + \rho_2 \cot\theta_2 + \rho_3 \cot\theta_3. \tag{26}$$

Pertanto, in base pure alla teoria degli invarianti delle coniche, si ha che

Cinque punti $P_1P_2P_3P_4P_5$ *arbitrari di un piano ammettono l'invariante metrico* (26), *dove le* ρ *e le* θ *vengono rispettivamente fornite delle* (18) *e dalle* (23), *od anche dalle formule che da queste si deducono permutando comunque i punti* P_i. *L'annullarsi di tale invariante esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti* P_i *stiano su di un'iperbole equilatera. In ogni caso, l'angolo compreso fra gli asintoti della conica contenente i punti dati ha per tangente* $2\sqrt{-\mathfrak{F}}/|\mathfrak{J}|$, *dove* $\mathfrak{J}$ *è l'invariante suddetto e* $\mathfrak{F}$ *è quello considerato nel n.* 10.

Come verifica, suppongasi in particolare che P_4 sia l'ortocentro del triangolo $P_1P_2P_3$; allora le distanze di P_4 dai lati di tale triangolo staranno fra loro come le secanti degli angoli rispettivamente opposti, sicchè, applicando a questo triangolo il teorema dei seni, si otterrà (anche in segno):

$$|P_2P_3P_4| \cot\theta_1 = |P_3P_1P_4| \cot\theta_2 = |P_1P_2P_4| \cot\theta_3.$$

Avuto riguardo alle (18), (26), si vede che queste tre espressioni entrano ordinatamente come fattori nei tre addendi di $\mathfrak{J}$ e che, in virtù del n. 6, la somma dei tre rispettivi quozienti è nulla. Risulta pertanto $\mathfrak{J} = 0$ *per ogni posizione di* P_5, ciò che equivale alla nota proprietà che ogni conica passante per quattro punti, di cui uno (e quindi ciascuno) sia l'ortocentro del triangolo determinato dagli altri tre, è un'iperbole equilatera.

BENIAMINO SEGRE