Supponiamo in secondo luogo che si abbia

$$x_1 = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}}} \qquad x_2 = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{a_r \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots}}}}}}}$$

Facendo dell'equazione la trasformata in $y = \frac{1}{x}$, e di questa, come precedentemente, la trasformata in $z = y - p$, si cadrebbe nell'impossibilità di cui sopra.

Se infine le radici dell'equazione primitiva fossero negative ed ambedue maggiori o minori dell'unità, facendo dell'equazione la trasformata in $y = - x$, saremmo ricondotti ai casi precedenti.

DIEGO FELLINI.

DI UNA NUOVA SUCCESSIONE DI NUMERI

1. A complemento della mia nota sulla funzione $\psi(a, b)$, comparsa nell'ultimo fascicolo dell'anno 1897 di questo Periodico, ecco alcuni teoremi analoghi con brevissimi cenni delle dimostrazioni, il cui completo sviluppo lascio al benevolo lettore. I due corollari finali mi sembrano notevoli, perchè con facili considerazioni risalgono *elementarmente* da proprietà delle funzioni trascendenti elementari alle funzioni stesse, stabilendo così proprietà e *caratteristiche* di dette funzioni.

LEMMA. — *Se nella successione*

(1) $$a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots . a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n,$$

in cui $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, *valgono a partire dal terzo termine le relazioni*

(2) $$a_n = + \sqrt{a_{n-1} \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

la classe dei numeri $a_1, a_2, a_3 \ldots .$ *è contigua a quella dei numeri* $b_1, b_2, b_3 \ldots .$, *e il numero che separa queste due classi è il limite cui tende la data successione.*

Dimostrazione. — Analogamente alla dimostrazione di esistenza di $\psi(a, b)$ si noti: che le a variano sempre in un senso; le b nel senso opposto; che il segno di $a_n - b_n$ è uguale a quello di $a_{n-1} - b_{n-1}$, e quindi è costantemente eguale al segno di $a_1 - b_1$; finalmente che $a^2_n - b^2_n$ decresce indefinitamente al crescere di n; e infatti $|a^2_n - b^2_n| < \left|\frac{a^2_{n-1} - b^2_{n-1}}{2}\right|$, perchè

$$|a^2_n - b^2_n| = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \left|\frac{a^2_{n-1} - b^2_{n-1}}{2}\right|;$$

perciò a_n e b_n tendono a un medesimo limite.

2. Chiamato $\Phi(a_1, b_1)$ questo limite e ricordata la definizione da me data di $\psi(a, b)$ sussistono i seguenti teoremi:

Teorema I. — *Indicato con* $\Phi^2(a, b)$ *il quadrato di* $\Phi(a, b)$, *si ha*

$$a \cdot \psi(a, b) = \Phi^2(a, b).$$

Teorema II. — *Se* a, b *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di quei numeri positivi* m, n, *delle cui radici quadrate* $+\sqrt{m}$, $+\sqrt{n}$ *i numeri* p *e* q *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica, si ha:*

$$\psi(a, b) = \Phi^2(p, q).$$

Teorema III. — *Se* $a^2 + c^2 = b^2$, *con* $c > 0$, *si ha* $\operatorname{arctg}\frac{c}{a} = \operatorname{arcsen}\frac{c}{b} =$
$= \arccos\frac{a}{b} = \frac{ac}{\Phi^2(a, b)}$.

Teorema IV. — *Se* m_0 *ed* n_0 *sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica di* m *ed* n, *si ha* $\log_e\frac{m}{n} = \frac{1}{2}\frac{m^2 - n^2}{\Phi^2(m_0\, n_0)}$.

Teorema V. — *Se* p_0 *e* q_0 *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di* $\sqrt{p}$ *e* $\sqrt{q}$, *si ha*

$$\log_e\frac{p}{q} = \frac{p - q}{\Phi^2(p_0\, q_0)}.$$

Teorema VI. — *Se* $a^2 + c^2 = b^2$, *con* $c > 0$, *si ha*

$$\frac{1}{\Phi^2(a, b)} + \frac{1}{\Phi^2(c, b)} = \frac{\pi}{2ab},$$

per tutti i valori positivi di a *e* b *con* $a < b$.

Dimostrazione. — L'espressione $\varepsilon = \dfrac{ac}{\arccos\frac{a}{b}}$ non muta di valore quando, fatto $a = a_1$, $b = b_1$, si pongono per a_1, b_1 rispettivamente a_2, b_2, ciò che con un facile calcolo si riconosce. Non muterà quindi neppure se in luogo di a_1, b_1 pongo a_3, b_3 ecc. oppure a_g, b_g. Ma, poichè $c = +\sqrt{b^2 - a^2}$ e poichè $\lim\limits_{a=\lambda,\, b=\lambda} \dfrac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}{\arccos\frac{a}{b}} = 1$, si vede che quando a e b tendono a un limite λ, ε tende al limite λ^2. E perchè col crescere di n, a_n e b_n tendono a $\Phi(a, b)$, si vede immediatamente, per l'invariabilità del valore di ε (quando in luogo di a, b, si pongono a_n, b_n), che $\dfrac{ac}{\arccos\frac{a}{b}} = \Phi^2(a, b)$.

Dimostrato così il teor. III, il teor. VI è evidente, perchè esso ci dice soltanto che $\arccos\frac{a}{b} + \operatorname{arcsen}\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$. Per dimostrare il teor. IV si esprimono m, n per m_0 ed n_0; e, fatto $m_0 = a_1$ $n_0 = b_1$, si ripetano per la frazione $\dfrac{1}{2}\dfrac{m^2 - n^2}{\log_e\frac{m}{n}}$, espressa in funzioni di m_0 ed n_0 le considerazioni testè fatte per la frazione $\dfrac{ac}{\arccos \frac{a}{b}}$. Il teor. V si può quindi dedurre dal IV, facendo $p = m^2$, $q = n^2$; i primi due teoremi si ottengono dal confronto delle formule ora ottenute con quelle esposte nella nota già citata sulla $\psi(a, b)$.

3. Come corollari delle precedenti teorie, ecco le seguenti proprietà.

Teorema. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia* $\varphi(x) = \cos x$, *sono le:*

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \varphi(x)}{2}} \qquad \lim_{x=0} \frac{\sqrt{1 - [\varphi(x)]^2}}{x} = 1.$$

Teorema. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia* $\varphi(x) = \log_e x$, *cioè proprietà* caratteristiche *della funzione* $\log_e x$, *sono le:*

$$\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\varphi(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x=1} \frac{\varphi(x)}{x - 1} = 1.$$

Dimostrazione. — Infatti queste sole proprietà bastarono nelle precedenti dimostrazioni ad esprimere $\arccos \frac{a}{b}$ e $\log_e \frac{a}{b}$ in funzione di a e b.

4. Allo studioso propongo ora i seguenti problemi:

Problema I. — *Esprimere* $\operatorname{arccosh} \frac{a}{b}$, $\operatorname{arcsenh} \frac{a}{b}$ *per mezzo della funzione* Φ.

Problema II. — *Trovare teoremi analoghi a quelli del* § 3 *per le funzioni iperboliche.*

Problema III. — *Come si modificano i teoremi del* § 3, *per* $\varphi(x) = \arccos x$? *E come si modificano, quando* $\varphi(x) = \log x$, *senza che la base del sistema dei logaritmi sia determinata?*

Guido Fubini.