Sul calcolo delle derivate d'ordine superiore [*]

Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x, definita nell'intervallo (a, b), ivi dotata delle prime n derivate. È ben elementare, che, assunti arbitrariamente $n+1$ punti $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ [1] di (a, b), e posto

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \equiv V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

$$(1) \qquad \frac{1}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & f({}_{n+1}) \end{vmatrix} =$$

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{n+1})} + \dots$$
$$+ \frac{f(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)} \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

si ha

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al minimo intervallo contenente tutti

(*) Lavoro eseguito nell'« Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ».

(1) Se dico $n+1$ punti, intendo non più e anche non meno di $n+1$, ed è pertanto superfluo aggiungere *a due a due distinti* poichè $n+1$ cose non a due a due distinte, son meno di $n+1$.

i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Se ne deduce che, fissato comunque un punto x di (a, b), posto

$$\sigma \equiv |x_1 - x| + |x_2 - x| + \ldots + |x_{n+1} - x|,$$

quando $f^{(n)}(x)$ sia continua nel punto x, riesce

$$\lim_{\sigma \to 0} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}. \tag{2}$$

Ora, in ben noti casi particolari, facendo tendere opportunamente i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ al punto x, si osserva che, nell'ipotesi dell'esistenza in (a, b) delle prime $n-1$ derivate della $f(x)$ e nel punto x della derivata n^{ma}, sussiste ancora la relazione di limite (2), e vogliamo qui, a proposito di ciò, per far cosa che riteniamo didatticamente utile, ribadire semplicissime dimostrazioni di alcuni teoremi generali, le quali valgono anche nel campo complesso, e, in tal caso, con minori restrizioni sul modo di tendere dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ al punto x.

Cominciamo dal richiamare l'identità, facile a dimostrare

$$\frac{1}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{\,n-1} & (x_1 - x)^\nu \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{\,n-1} & (x_2 - x)^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & (x_{n+1} - x)^\nu \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & 0, \text{ per } \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \\ = \; & 1, \text{ per } \nu = n, \\ & p_\mu(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_{n+1} - x), \text{ per } \nu = n + \mu;\ \mu = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

$$p_\mu(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_{n+1} - x) \equiv \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \ldots + k_{n+1} = \mu \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_{n+1} \geq 0}} (x_1 - x)^{k_1} (x_2 - x)^{k_2} \ldots (x_{n+1} - x)^{k_{n+1}}$$

in particolare,

$$p_1(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_{n+1} - x) \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} - (n+1)x \text{ (}^2\text{)}.$$

Ciò posto, si dimostra immediatamente il teorema:

---

(2) Posto

$$\varphi(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}) \equiv x^{n+1} + c_1 x^n + \ldots + c_{n+1},$$

si ha

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

I. – *Se la funzione* f(x) *è dotata in* (a, b) *delle prime* n — 1 *derivate e nel punto* x *della derivata* n^{ma}, *sussiste la* (2), *nell'ipotesi che, per una certa quantità finita* L, *si abbia*

$$\left|\frac{x_r - x}{x_r - x_s}\right| \leq L \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n+1;\ r \neq s). \tag{4}$$

Ed invero, riesce, per $k = 1, 2, \ldots, n+1$,

$$f(x_k) = f(x) + (x_k - x)f'(x) + \ldots + (x_k - x)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (x_k - x)^n \omega(x_k, x),$$

con

$$\lim_{\sigma \to 0} \omega(x_k,\ x) = 0, \text{ [3]}$$

---

e vogliamo indicare un semplice procedimento atto a fornire, per ricorrenza, le espressioni delle $p_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, a mezzo delle $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Introdotte le funzioni

$$q_\nu(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k^\nu}{\varphi'(x_k)}, \qquad (\nu = 0,\ 1, \ldots),$$

si ha $q_{n+\mu} = p_\mu$. Detti $g_\nu(x)$ il quoziente e $r_\nu(x)$ il resto della divisione di x^ν per $\varphi(x)$, risulta identicamente

$$\frac{r_\nu(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{r_\nu(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{1}{x - x_k},$$

ma $r_\nu(x_k) = x_k^\nu - g(x_k)\varphi(x_k) = x_k^\nu$, e pertanto

$$\frac{r_\nu(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k^\nu}{\varphi'(x_k)} \frac{1}{x - x_k},$$

e quindi

$$q_\nu(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n+1}) = \lim_{x \to \infty} \frac{x r_\nu(x)}{\varphi(x)},$$

cioè q_ν è il coefficiente della più alta potenza di x nel polinomio $r_\nu(x)$. Si ha dunque $q_\nu = 0$, per $\nu \leq n - 1$, $q_n = 1$,

$$\begin{aligned}
&p_1 + c_1 = 0,\\
&p_2 + p_1c_1 + c_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{n+1} + p_nc_1 + \ldots + p_1c_n + c_{n+1} = 0,\\
&p_{n+1-s} + p_{n+s}c_1 + \ldots + p_{s+1}c_n + p_sc_{n+1} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Detta s_k la somma delle potenze k^{me} delle radici del polinomio $\varphi(x)$, se ne deduce che

$$p_\mu + \gamma_{\mu 1} p_{\mu-1} s_1 + \gamma_{\mu 2} p_{\mu-2} s_2 + \ldots + \gamma_{\mu\mu} s_\mu = 0,$$

ove i coefficienti $\gamma_{\mu h}$ sono numeri razionali non nulli, ecc..

(3) Cfr., per esempio, PICONE: *Lezioni di Analisi infinitesimale.* [« Circolo matematico di Catania ». Catania (1923)], p. 159.

e si ha dunque, in base alle (1) e (3),

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \omega(x_1, x) \frac{(x_1 - x)^n}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_{n+1})} + \dots$$
$$+ \omega(x_{n+1}, x) \frac{(x_{n+1} - x)^n}{(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)},$$

e quindi, per le (4),

$$\left| f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leqq L^n \sum_{k=1}^{n+1} \left| \omega(x_k, x) \right|,$$

ciò che dimostra il teorema. Si ha pure subito il seguente:

II. - *Se la funzione* f(x) *è dotata in* (a, b) *delle prime* n *derivate e nel punto* x *della derivata* $(n+1)^{ma}$, *sussiste la relazione di limite*

$$\lim_{\sigma \to 0} \left\{ \frac{1}{\sigma} \left(f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right) \right\} = 0.$$

nell'ipotesi che, conservando sempre, la configurazione dei punti $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, *per baricentro il punto* x, *si verifichino le* (4).

Ed invero, si ha ora, in base alle (1) e (3),

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} p_1(x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_{n+1} - x)$$
$$+ \omega'(x_1, x) \frac{(x_1 - x)^{n+1}}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_{n+1})} + \dots + \omega'(x_{n+1}, x) \frac{(x_{n+1} - x)^{n+1}}{(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)}.$$

con

$$\lim_{\sigma \to 0} \omega'(x_k, x) = 0,$$

e quindi se è sempre $p_1(x_1 - x, \dots, x_{n+1} - x) = 0$,

$$\left| f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leqq \sigma L^n \sum_{k=1}^{n+1} \left| \omega'(x_k, x) \right|.$$

In particolare, dette τ e h due qualsivogliano quantità reali, si ponga

$$x_1 = x + \tau h, \quad x_2 = x + (\tau - 1)h, \dots, x_{n+1} = x + (\tau - n)h.$$

si ha allora

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{\Delta^n f[x + (\tau - n)h]}{n!\, h^n},$$

con

$$\Delta^n f[x+(\tau-n)h] =$$
$$f(x+\tau h)-\binom{n}{1}f[x+(\tau-1)h]+\binom{n}{2}f[x+(\tau-2)h]+\ldots$$
$$+(-1)^n f[x+(\tau-n)h],$$

laddove

$$\left|\frac{x_r-x}{x_r-x_s}\right| = \left|\frac{\tau-r+1}{r-s}\right| \leqq |\tau|+n,$$
$$p_1 = (n+1)\left(\tau-\frac{n}{2}\right)h,$$

e quindi x è baricentro della configurazione $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, se e solo se $\tau = n/2$. È dunque corollario dei teoremi I e II il seguente:

III. - *Se la funzione* $\mathrm{f(x)}$ *è dotata nell'intervallo* $(\mathrm{a, b})$ *delle prime* $\mathrm{n}-1$ *derivate e nel punto* x, *interno all'intervallo, della derivata* n^{ma}, *si ha*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^n f[x+(\tau-n)h]}{h^n} = f^{(n)}(x),$$

comunque si fissi la quantità reale τ. *Se la* $\mathrm{f(x)}$ *possiede in* $(\mathrm{a, b})$ *le prime* n *derivate e nel punto* x *la derivata* $(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{ma}}$, *si ha*:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^n f\left(x-n\frac{h}{2}\right)}{h^n}-f^{(n)}(x)\right)\right\} = 0.$$

Consideriamo ora una funzione $f(z)$ dalla variabile complessa $z = x+iy$, olomorfa in un certo campo A (4) del piano complesso z. Si possono definire in A due funzioni positive $M(z)$ e $\rho(z)$ tali che, per ogni $\nu \geqq 0$, riesca

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\right| \leqq \frac{M(z)}{(\rho(z))^\nu},$$

ed inoltre l'intorno circolare $C(z)$ del punto z, di raggio $\rho(z)$, sia, con la sua frontiera, contenuto in A (5). Ora, in base alle (1)

(4) Diciamo che A è un *campo* del piano z, se è un insieme *aperto* di punti di tal piano.

(5) Cfr., per esempio, PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*. [« Rondinella ». Napoli (1940)], p. 40.

e (3), comunque si prendano $n+1$ punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ di $C(z)$, si ha [6]

$$(5)\quad f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{f^{(n+\mu)}(z)}{(n+\mu)!} p_\mu(z_1 - z, z_2 - z, \dots, z_{n+1} - z).$$

D'altra parte, comunque si fissino il punto z e un numero naturale $m \leq n$, alle variabili complesse $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ si possono imporre i vincoli rappresentati dalle m equazioni

$$p_\mu(z_1 - z, z_2 - z, \dots, z_{n+1} - z) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m,$$

che equivalgono alle seguenti [cfr. nota (2)]

$$(6)\quad (z_1 - z)^\mu + (z_2 - z)^\mu + \dots + (z_{n+1} - z)^\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m.$$

e che possono essere verificate anche per $\sigma \to 0$. Quando sia $m = n$, valendo tali vincoli, i punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ riescono i vertici di un poligono regolare di $n+1$ lati avente il centro nel punto z. Se per i punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ sono verificate le (6), si ha

$$(5_m)\quad f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n+\mu)}(z)}{(n+\mu)!} p_\mu(z_1 - z, z_2 - z, \dots, z_{n+1} - z).$$

Poichè

$$|p_\mu(z_1 - z, z_2 - z, \dots, z_{n+1} - z)| \leq \sigma^\mu,$$

dalla (5), per $\sigma = \rho(z)$, si deduce la limitazione

$$\left| f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M(z)}{(\rho(z))^n} \frac{\sigma}{\rho(z) - \sigma},$$

e supposte verificate le (6), dalla (5_m),

$$\left| f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M(z)}{(\rho(z))^{n+m}} \frac{\sigma^{m+1}}{\rho(z) - \sigma},$$

onde il teorema:

IV. – *Comunque si fissi un punto* z *del campo di olomorfia di una funzione* f(z) *e si considerino* n + 1 *punti variabili di*

---

(6) Cfr. anche Cinquini: *Sopra una formola di Curtiss.* [« Annali di Matematica », t XII della serie IV (1933-34)], p. 156.

tal campo, si ha

$$\lim_{\sigma \to 0} f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

L'ordine di infinitesimo, rispetto a $\sigma = |z_1 - z| + \dots + |z_{n+1} - z|$, *della differenza*

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) - \frac{f^{(n)}(z)}{n!},$$

in generale non superiore a uno, si eleva a $m + 1 (m \leq n)$, *almeno, se i punti* $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ *sono vincolati dalle equazioni* (6), *e consegue il massimo* $n + 1$, *almeno, quando tali punti sono i vertici di un* $(n + 1)$*-gono regolare avente il centro nel punto* z.

Dette ζ una quantità complessa arbitraria, di modulo minore di $\rho(z)$, e ε una radice primitiva $(n + 1)^{ma}$ dell' unità, i punti

(7) $$z_1 = z + \zeta, \quad z_2 = z + \varepsilon\zeta, \dots, z_{n+1} = z + \varepsilon^n\zeta,$$

sono i vertici di un $(n + 1)$-gono regolare, contenuto in $C(z)$ e col centro nel punto z. È subito visto che, con le posizioni (7), riesce semplicemente [cfr. nota (2)],

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f(z + \zeta) + \varepsilon f(z + \varepsilon\zeta) + \dots + \varepsilon^n f(z + \varepsilon^n\zeta)}{(n + 1)\zeta^n},$$

e, anche con calcolo diretto, che la serie al secondo membro della (5) si scrive

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f^{[n+\mu(n+1)]}(z)}{[n + \mu(n + 1)]!} \zeta^{\mu(n+1)},$$

e si ha dunque

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f(z + \varepsilon^k\zeta)}{(n + 1)\zeta^n} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!},$$

$$\lim_{\zeta \to 0} \left\{ \frac{1}{\zeta^{n+1}} \left[\frac{\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k f(z + \varepsilon^k\zeta)}{(n + 1)\zeta^n} - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right] \right\} = \frac{f^{(2n+1)}(z)}{(2n + 1)!},$$

e se $f^{(2n+1)}(z) = 0$,

$$\lim_{\zeta \to 0} \left\{ \frac{1}{\zeta^{(2n+1)}} \left[\frac{\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k f(z + \varepsilon^k\zeta)}{(n + 1)\zeta^n} - \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right] \right\} = \frac{f^{(3n+2)}(z)}{(3n + 2)!},$$

ecc.

La considerazione del teorema IV con quella dei fatti fondamentali della teoria delle funzioni analitiche conduce spontaneamente a porsi le domande seguenti.

Data una funzione $f(z)$, della variabile complessa z, definita in un campo A, fissato comunque un numero naturale $n > 1$, dall' esistenza, per ogni punto z di A, del limite

$$\lim_{\sigma \to 0} f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}),$$

determinato e finito, si può dedurre l'olomorfia della $f(z)$?

Più in generale, dall' esistenza e finitezza dello stesso limite, con prescritti vincoli fra i punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, quale classe di funzioni si caratterizzano? Per esempio, qual'è la classe delle funzioni tali che, per ogni punto z di A, esiste, determinato e finito, il limite

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{f(z+\zeta) + f(z-\zeta) - 2f(z)}{\zeta^2}? \tag{8}$$

Si può subito dimostrare, in proposito, che supposto A connesso, la classe di tali funzioni, dotate in A delle derivate parziali rispetto alle x e y, prime e seconde, finite e continue, è costituita dalle funzioni che possono decomporsi nella somma di una funzione di z olomorfa in A e di una funzione lineare di x e y. Posto $\zeta \equiv \xi + i\eta$, si ha, invero,

$$\frac{f(z+\zeta) + f(z-\zeta) - 2f(z)}{\zeta^2} =$$

$$\frac{\xi^2 f_{xx}(x, y) + 2\xi\eta f_{xy}(x, y) + \eta^2 f_{yy}(x, y) + \omega(x, y, \xi, \eta)(\xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta},$$

con

$$\lim_{\zeta \to 0} \omega(x, y, \xi, \eta) = 0,$$

e quindi, per $\eta = 0$, il limite (8) vale f_{xx}, per $\xi \equiv 0$, vale $-f_{yy}$. Deve dunque aversi, identicamente,

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Soddisfatta tale identità, per $\xi \equiv \eta$, il limite (8) vale $\frac{1}{i} f_{xy}$. Si deve dunque avere

$$f_{xx} - \frac{1}{i} f_{xy} = \frac{1}{i} f_{xy} + f_{yy} = 0,$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_x - \frac{1}{i} f_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x - \frac{1}{i} f_y\right) = 0,$$

onde, designando c una costante,

$$f_x - \frac{1}{i} f_y = c,$$

e quindi, necessariamente $f(z) = g(z) + cx$, con $g(z)$ olomorfa in A. Viceversa, è subito verificato che se $f(z) = g(z) + ax + by$, con $g(z)$ olomorfa in A e a e b costanti, il limite (8) vale $g''(z)$.

Nell'esempio considerato i punti z_1, z_2, z_3 dell'espressione $f(z_1, z_2, z_3)$ sono, uno fisso in z e gli altri due simmetrici rispetto a z, ora è notevole la circostanza che se, collocando sempre uno dei punti fisso in z, gli altri due si mantengono non allineati con z, l'esistenza del limite $\lim f(z_1, z_2, z_3)$ (per $\sigma \to 0$), determinato e finito per ogni punto z di A, caratterizza precisamente la classe delle funzioni olomorfe in A, nella sola ipotesi della differenziabilità del prim'ordine della funzione $f(z)$, concepita come funzione di x e y, *anche quando, al tendere di σ a zero, il triangolo (z_1, z_2, z_3) si mantiene direttamente omotetico, rispetto al suo vertice z, ad un triangolo fisso.* Ed invero, se poniamo

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + \zeta, \quad z_3 = z + \varepsilon\zeta,$$

con $\varepsilon = \alpha + i\beta$, diverso da zero e da uno, si ha

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{(1-\varepsilon) f(z) + \varepsilon f(z+\zeta) - f(z+\varepsilon\zeta)}{\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2},$$

laddove, l'ipotesi della differenziabilità della $f(x, y)$, consente di scrivere, posto $\zeta = \xi + i\eta$,

$$f(z+\zeta) = f + f_x\xi + f_y\eta + \omega_1 \cdot (|\xi| + |\eta|),$$
$$f(z+\varepsilon\zeta) = f + f_x \cdot (\alpha\xi - \beta\eta) + f_y \cdot (\alpha\eta + \beta\xi) + \omega_2 \cdot (|\xi| + |\eta|),$$

essendo

$$\lim_{\zeta \to 0} \omega_1 = \lim_{\zeta \to 0} \omega_2 = 0.$$

Ne segue

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{\beta(if_x - f_y)(\xi - i\eta) + \omega \cdot (|\xi| + |\eta|)}{\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2} \tag{9}$$

con

$$\lim_{\zeta \to 0} \omega = 0.$$

Se ora fissiamo, arbitrariamente, la quantità complessa $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$, diversa da zero, e poniamo $\zeta = \zeta_0 t$, con t variabile reale e positiva, il triangolo (z_1, z_2, z_3) varia mantenendosi direttamente omotetico, rispetto al suo vertice z, al triangolo fisso di vertici

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + \zeta_0, \quad z_3 = z + \varepsilon\zeta_0,$$

e perchè allora esista, determinato e finito, per $\sigma \to 0$, cioè per $t \to 0$, il limite della (9), è necessario che risulti

$$\beta(if_x - f_y)(\xi_0 - i\eta_0) = 0,$$

ma, nella fatta ipotesi del non allineamento dei punti z_1, z_2, z_3 è $(\xi_0 - i\eta_0)\beta \neq 0$, e deve quindi aversi, in A,

$$if_x - f_y = 0,$$

cioè l'affermata olomorfia di $f(z)$ in A.

Riteniamo che, per molti riguardi, lo studio generale delle questioni prospettate dovrebbe dar luogo ad algoritmi e a constatazioni di un certo interesse.

M. Picone