l'età del calore solare, quanto quella del raffreddamento della terra e delle successive evoluzioni di essa, sono certo molto maggiori di quanto si potesse un tempo sospettare.

Ma, come le idee tramandateci da Helmholtz e da Kelvin vennero a subire una profonda rivoluzione colla scoperta di fenomeni ignoti qualche decennio addietro, così non possiamo escludere che altri ritrovati non abbiano da modificare le idee oggi suggerite dallo stato delle attuali cognizioni. Tutte le valutazioni poggiano poi su dati sperimentali assai delicati, suscettibili di più accurate determinazioni. Di questo stato di cose bene si rese interprete il presidente dell'assemblea di Edinburgh, O. W. Richardson, osservando che il problema della età della terra è pur sempre aperto per nuove ricerche e per più precise dilucidazioni.

Trieste, R. Istituto Geofisico

FRANCESCO VERCELLI

Sull'immaginario in geometria

PARTE I - **Problemi elementari.**

1. Introduzione: punti e rette immaginarii. — L'introduzione dei punti immaginarii, qual'è data nel modo più semplice dalla geometria analitica (1) porge una comprensione superiore e talvolta un istrumento d'indagine, anche nello studio di questioni geometriche aventi carattere elementare. Essa offre, in primo luogo, alla geometria una veduta di continuità, riattaccando proprietà apparentemente distinte, come quelle in cui si scambiano somme e differenze di segmenti ecc.: il passaggio continuo dall'una all'altra proprietà

(1) Le nozioni elementari, che qui richiameremo, si trovano p. es. in G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria analitica.* Una elementare trattazione sintetica degl'immaginarii è data da F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, 4ª ed., §§ 38, 65bis.

risponde qui al prolungamento analitico di funzioni polidrome [1]. In secondo luogo i teoremi generali sulla determinazione delle funzioni razionali per mezzo dei loro zeri e dei loro poli, trovano applicazione nei casi ove certe espressioni (rapporti o prodotti di distanze ecc.) rimangono costanti, al variare di alcuni elementi da cui dipendono: tale costanza riuscendo intimamente spiegata da quei teoremi.

L'interesse di queste considerazioni c'induce a trattarne in una rapida esposizione, recando qualche esempio istruttivo.

Ci limiteremo alla geometria del piano.

Un punto (xy) essendo definito dalle sue coordinate cartesiane ortogonali x e y, si otterranno i punti immaginari (o complessi) dando ad x e y valori comunque complessi:

$$x = x_1 + ix_2$$
$$y = y_1 + iy_2.$$

I punti soddisfacenti ad un'equazione lineare

$$ax + by + c = 0,$$

costituiscono una linea *retta,* che deve in ogni caso pensarsi come costituita da tutti i suoi punti reali e immaginari: del resto questa retta ha infiniti punti reali solo nel caso che l'equazione sia a coefficienti reali (*rette reali*). Se invece a, b, c sono complessi:

$$a = \alpha + i\alpha'$$
$$b = \beta + i\beta'$$
$$c = \gamma + i\gamma',$$

la retta è, essa stessa, *immaginaria* e contiene *un* solo punto reale, cioè l'intersezione colla retta immaginaria *coniugata*:

$$(\alpha - i\alpha')x + (\beta - i\beta')y + (\gamma - i\gamma') = 0.$$

La retta che congiunge due punti immaginarii coniugati è reale; e viceversa una retta reale contiene sempre, insieme ad ogni suo punto immaginario, anche il coniugato.

---

(1) Cfr. E. Bompiani, *Il principio di continuità e l'immaginario in geometria*, art. 10° nel Vol. II delle *Questioni*, raccolte e coordinate da F. Enriques.

2. Distanza di due punti: rette isotrope e punti ciclici. — La *distanza* di due punti, (ab) e (cd), resta definita — per estensione — dalla formula

$$r = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

dove ora a, b, c, d assumono valori comunque complessi. Qui s'incontra subito un resultato paradossale. La condizione perchè la distanza di due punti s'annulli non porta più la coincidenza dei due punti. Dato un punto (ab) *il luogo dei punti aventi distanza nulla da* (ab) *è costituito da due rette immaginarie*, che per (ab) reale sono coniugate:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \{x - a + i(y-b)\}\{(x-a) - i(y-b)\} = 0$$

Queste rette immaginarie, che insieme alle coniugate formano i *cerchi di raggio nullo* con centro reale, si possono definire semplicemente come rette passanti per due punti immaginarii coniugati sopra la retta all'infinito del piano, che diconsi *punti ciclici* del piano. Infatti cerchiamo i punti all'infinito appartenenti alle rette

$$x - a = \pm i(y-b);$$

a tal uopo conviene cambiare x e y nei rapporti x/z e y/z e rendere omogenea l'equazione:

$$x - az = \pm i(y - bz);$$

facendo poi in questa $z = 0$, si ottengono le coordinate dei punti d'intersezione colla retta all'infinito:

$$z = 0, \; x = \pm iy \quad (\text{o } y = \mp ix).$$

Il nome dei punti ciclici è dovuto alla proprietà che essi sono comuni a tutti i cerchi del piano. Infatti l'equazione d'un cerchio

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

resa omogenea diventa

$$(x-az)^2 + (y-bz)^2 = r^2z^2,$$

e per $z = 0$ dà

$$x = \pm iy.$$

Così tutti i cerchi del piano hanno sempre due intersezioni fisse nei detti punti ciclici, M e N. In particolare i cerchi d'ugual centro O, si toccano in M e N, avendo ivi come tangenti le rette OM, ON: come è facile verificare, essendo la retta all'infinito polare del centro O.

Ora il risultato a cui siamo pervenuti innanzi si può anche enunciare come segue: *Vi sono nel piano infinite rette di lunghezza nulla, dette anche rette* isotrope, *che, costituiscono i due fasci di rette parallele coi centri nei due punti ciclici: la condizione di trovarsi sopra una retta isotropa è condizione necessaria e sufficiente perchè la distanza di due punti propri sia nulla.*

Quanto alla distanza di un punto proprio dai due punti ciclici, cioè dai due punti all'infinito che pur si trovano con esso sopra una retta isotropa, si ha un'espressione di forma indeterminata, che vedremo poter assumere qualunque valore, quando si definisca per continuità, calcolando la distanza del punto proprio da un altro che tenda ad andare in un punto ciclico secondo una data linea. Infatti si consideri il punto origine (OO) e il punto (x, ix), che si muove sopra una delle due rette isotrope per esso: la distanza essendo sempre nulla, essa rimane anche nulla al limite, per $x = \infty$. Invece se si paragona coll'origine il punto $\{x, i(x-1)\}$, variabile sopra un altra retta isotropa che non passi per (OO), si trova la distanza

$$x^2 + [i(x-1)]^2 = x^2 - (x-1)^2 = 2x + 1$$

che diventa infinita (del 1° ordine) passando al limite per $x = \infty$. Se, infine, si fa muovere un punto (xy) sul cerchio di raggio r col centro nell'origine,

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

è chiaro che la distanza dall'origine — costantemente eguale ad r — resta sempre r anche al limite per $x = \infty$, cioè quando il punto (xy) venga a cadere in uno dei punti ciclici M o N.

Queste considerazioni si possono estendere al caso in cui un punto $P = (xy)$ vada a cadere sopra la retta all'infinito in uno dei punti ciclici, p. es. in M, movendosi sopra una curva qualunque C (o sopra un ramo di curva) che passi semplicemente per M. Infatti si riconosce facilmente (colle consuete valutazioni degli ordini d'infinito e d'infinitesimo) che se la curva C tocca una qualsiasi retta isotropa diversa da MO (che è la retta isotropa congiungente il punto O) la distanza MO, valutata come limite della distanza d'un punto variabile P di C da O, resulta sempre infinita, come se il punto P si fosse mosso sulla tangente a C. Se invece P si muove sopra una C tangente in M ad MO, il limite della distanza PO dipende dal raggio del cerchio osculatore a C in M, cioè eguaglia il limite che si ottiene facendo tendere P a M sopra questo cerchio: che — per O reale — è un cerchio di centro O (tangente all'infinito alle rette OM, ON). Infine la distanza PO tenderà a 0 — diventando infinitesima d'ordine $r = 1, 2...$ — se P si accosta ad M sopra una C avente con OM in M un contatto d'ordine $r+1$ (ossia $(r+2)$ punto).

3. Angolo di due rette. — L'angolo di due rette,

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c = 0,$$

è dato in generale da

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

e queste espressioni si assumono a definire l'angolo per rette comunque immaginarie.

Da esse si ricava

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = \frac{aa' + bb' + i(ab' - a'b)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{(aa'+bb')^2 - (ab'-a'b)^2 + 2i(aa'+bb')(ab'-a'b)}{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} =$$

$$= \left(1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2i\left(1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'} + i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)}{1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'} - i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)} = \frac{\frac{b}{a} - i}{\frac{b}{a} + i} : \frac{\frac{b'}{a'} - i}{\frac{b'}{a'} + i}.$$

Quindi l'angolo α — a meno del fattore di proporzionalità $2i$ — viene espresso dal logaritmo del birapporto $\left(i, -i, \frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}\right)$ che appare nel secondo membro. Questo è il birapporto formato dai punti ciclici M, N coi punti all'infinito delle due rette, A e A':

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log (MNAA').$$

In parole: ***l'angolo di due rette è misurato dal logaritmo del birapporto che i loro punti all'infinito formano coi punti ciclici*** (¹).

In particolare segue (²) che: Una retta isotropa forma con un'altra retta qualunque un *angolo infinito*. Due rette parallele — cioè aventi comune il punto all'infinito — formano in generale un *angolo nullo*. Fa eccezione il caso di due rette isotrope a, a' congiungenti il medesimo punto ciclico, per cui il birapporto $(MNAA')$ e quindi l'*angolo*, assume un valore *indeterminato*.

Se si cerca di determinare codesto angolo per continuità, più precisamente, se si cerca un limite dell'angolo secondo cui si vede un dato segmento AB da un punto P che si avvicini al punto ciclico M sopra una curva C (o sopra un ramo di curva che passi semplicemente per M), si riconosce subito che il birapporto da formare è quello delle due rette isotrope MA e MB colla tangente alla curva C e colla retta all'infinito (che va ad N). L'angolo ha dunque un valore finito se la curva su cui P si avvicina ad M non tocca una delle due rette isotrope MA, MH.

(¹) LAGUERRE, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853 (pag. 57).

(²) Tengasi presente che il birapporto di quattro punti di una retta

$$(MNAA') = \frac{MA}{NA} : \frac{MA'}{NA'},$$

diventa infinito se uno dei due punti, A o A', viene a coincidere con M o N, ma che esso assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se ambedue i punti A e A' vengono a coincidere con uno dei due punti M o N.

Le considerazioni precedenti tengono a ciò che le rette isotrope hanno rispetto a tutte le altre rette del piano un'orientazione assolutamente privilegiata: di qui anzi viene il nome « isotrope », che significa « egualmente poste ».

Le rette isotrope per un punto restano ferme per qualunque rotazione attorno ad esso. Le rette isotrope si presentano così, nel fascio di centro O, come le rette unite per la congruenza che intercede fra le rette inclinate d'un angolo dato qualsiasi, e in particolare come rette doppie della involuzione formata dalle coppie di rette perpendicolari, cioè come « rette perpendicolari a se stesse »: la relazione di perpendicolarità fra due rette, coi punti all'infinito A e A', si lascia definire come separazione armonica della coppia dei punti ciclici MN, per mezzo di AA'; e però se si cerca la direzione perpendicolare a quella delle rette isotrope per M, si ha da determinare il coniugato armonico di M rispetto ad MN, che è il punto stesso, M.

4. Distanza d'un punto da una retta. — Data, nel piano, una retta (propria)

$$ax + by + c = 0,$$

la distanza da essa d'un punto $P = (xy)$ vale

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

e però questa distanza non si annulla mai per punti P (reali o immaginarii) che sieno fuori della retta. Essa non si annulla neppure quando P va all'infinito, tranne per $ax = -by$; ma questo caso non costituisce affatto un'eccezione, poichè allora P è il punto all'infinito della retta.

La distanza d'un punto da una retta propria è sempre finita, tranne quando il punto stesso cada all'infinito. Soltanto per le *rette isotrope* ($b = \pm ia$), accade che la *distanza* da esse di ogni *punto esterno* riesca sempre *infinita*.

Queste osservazioni portano alcune conseguenze per le aree dei triangoli. L'area d'un triangolo — essendo definita dal prodotto d'un qualunque lato per la corrispondente altezza — non diventa mai infinita per triangoli con lati finiti.

Più precisamente assumasi una base $a=BC$, finita e non nulla; sopra di essa si possono sempre costruire due triangoli dando ad arbitrio le lunghezze degli altri due lati, b e c, poichè occorre per ciò intersecare i due cerchi di raggi b e c con centri C e B: orbene questi due cerchi (avendo centro diverso) non si toccano nei punti ciclici, e però si segano in due punti (simmetrici rispetto a BC) a distanza finita, la cui distanza dalla retta BC è dunque finita; pertanto è sempre finita anche l'area del triangolo di lati a, b, c.

5. Area del triangolo. — Vogliamo indicare alcune applicazioni elementari cui dà luogo l'uso dell'immaginario in geometria.

Cominceremo col determinare la formula che ci esprime l'area A del triangolo di lati a, b, c.

Avvertiamo anzitutto che — essendovi due triangoli simmetrici con lati dati, sopra una base data — l'area deve ritenersi definita dai lati a, b, c, a meno del segno; sarà dunque A^2 funzione (algebrica univoca e però) razionale di a, b, c:

$$A^2 = \frac{\varphi(abc)}{\psi(abc)}.$$

Ma poichè, tenendo fermo uno dei tre lati, non è possibile rendere A infinita per valori finiti degli altri due, si deduce che il denominatore ψ è una costante, cioè

$$A^2 = k\,\varphi(abc) = f(abc).$$

Il polimonio f si vede subito essere omogeneo di 4° grado rispetto alle a, b, c, perchè, moltiplicando queste variabili per p, l'area si moltiplica per p^2 e quindi A^2 per p^4. Ciò posto, si osservi che la nostra area s'annulla quando i tre vertici del triangolo vengono in linea retta, cioè per

$$a = b + c,\quad a = b - c,\quad a = c - b;$$

ne segue che f è divisibile per

$$a + b - c,\quad b + c - a,\quad a + c - b.$$

Siccome poi i lati a, b, c, sono definiti per le coordinate, come radicali, a meno del segno, la continuità richiede che ciascuno di essi possa mutare di segno (per cammini che girano attorno agli zeri); quindi l'espressione di f non dovrà cambiare cambiando di segno ad una qualunque delle variabili a, b, c: ciò porta che insieme ad $a+b-c$ figuri come fattore in f anche $a+b+c$ (e la stessa conseguenza si ottiene egualmente dalla considerazione degli altri due lati). In conclusione l'area verrà espressa da una formula

$$A^2 = k(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b);$$

ed il fattore numerico k si lascia determinare dal caso del triangolo rettangolo isoscele:

$$a = b = 1, \quad c = \sqrt{2}, \quad A^2 = \frac{1}{4},$$

$$k = \frac{1}{16},$$

sicchè, ponendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, si trova

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

che è la formula consueta d'Erone.

6. Il cerchio come luogo. — Il cerchio si presenta, nel piano, come luogo dei punti che godono di alcune semplici proprietà, cioè: come luogo dei punti la cui distanza dal centro è costante, come luogo dei punti da cui due punti fissi (appartenenti al cerchio stesso) sono veduti sotto un angolo costante (1), e come luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono in rapporto costante. Vediamo di comprendere queste proprietà dal punto di vista della geometria dell'immaginario.

Ciò accade di fare in relazione al teorema fondamentale della teoria delle funzioni, che: *una funzione algebrica, della variabile complessa, z, la quale non diventi mai nulla o infinita (neppure per z = ∞) si riduce ad una costante.*

---

(1) L'angolo ritenendosi formato dai raggi proiettanti i punti fissi A e B dal punto variabile P, secondo la loro direzione, non vi è differenza nel passare da un arco AB del cerchio al suo complementare.

1° La proprietà che la distanza d'un punto dal centro non diventi mai infinita, neppure pei punti in cui la curva sega la retta all'infinito, si traduce nella proprietà del cerchio di passare per i due punti ciclici, che costituiscono appunto le intersezioni predette. E perchè la medesima distanza non si annulli mai, occorre che le rette isotrope uscenti dal centro del cerchio non seghino in punti propri il cerchio stesso, ma lo tocchino negli stessi punti ciclici (all'infinito): tutto ciò ha riscontro nelle proprietà osservate nel § 2.

2° Il luogo C dei punti da cui si vedono due punti fissi generici, A e B, secondo un angolo costante, deve anzitutto soddisfare alla condizione di non segare la retta all'infinito fuori dei punti ciclici M e N, perchè da ogni altro punto all'infinito il segmento AB è veduto secondo un angolo nullo.

Occorre inoltre che nessun ramo della curva C tocchi in uno dei punti ciclici, M o N, la retta all'infinito, altrimenti l'angolo secondo cui si vede AB da un punto P di quel ramo tenderebbe a zero, quando il punto P va in M o N. Perciò l'ordine della curva C sarà un numero pari $2n$ e la C avrà in M e in N la molteplicità n.

Similmente si riconosce che la curva C non può segare la retta AB fuori di A e B, e che ha in essi la molteplicità n, non toccando la AB.

Ora la nostra curva d'ordine $2n$, con 4 punti n-pli si spezza in n coniche passanti pei 4 punti A, B, M, N, e cioè in n cerchi per A e B: vi vede poi subito che i cerchi componenti — di cui è data l'inclinazione sopra la retta AB — sono due, ossia $n=2$.

Così l'analisi del problema conduce al luogo noto, composto di due cerchi simmetrici per A, B. E si può quindi verificare direttamente che per ogni punto P variabile sopra un cerchio passante per A e B, l'angolo secondo cui AB è veduto da P rimane costante: poichè (cfr. § 3) esso rimane finito e diverso da zero per ogni posizione di P, anche quando P va all'infinito in uno dei punti ciclici M o N, ovvero sulla retta AB in A o B.

3° Passiamo a considerare il cerchio come luogo dei punti le cui distanze da due poli fissi sono in un rapporto costante.

Assumansi due poli generici, A e B, e si cerchi il luogo K dei punti P per cui:

$$\frac{PA}{PB} = \text{cost.} \qquad (\text{cost.} \neq 1).$$

Anzitutto dal grado dei polinomi che figurano sotto radicale nelle espressioni di PA e PB, si deduce che la curva K è di 2° grado, cioè una conica. Ora questa conica non può segare la retta all'infinito del piano fuori dei punti ciclici, M e N, perchè le distanze d'un generico punto all'infinito da A e B stanno in un rapporto eguale ad 1 (rapporto determinato, come si comprende, per continuità); dunque la K passerà per M e N, cioè dovrà essere un cerchio.

Questo è il resultato dell'analisi del problema, conforme a quello che si raggiunge, in maniera elementare, col ragionamento di Apollonio. Ma si può dare anche la sintesi, mettendo così in luce tutte le coppie di punti, A e B, rispetto a cui i punti P del cerchio hanno distanze formanti un rapporto costante.

Se il rapporto $PA : PB$ deve essere costante, bisogna che esso non diventi mai nullo, nè infinito. Ora esso diventerebbe nullo o infinito se si trovasse un punto P appartenente ad una retta isotropa PM, tale che la PN non fosse isotropa (sicchè $PM = 0$, $PN \neq 0$), ovvero se fosse isotropa la retta PN e non la PM.

Questa osservazione si può esprimere in una maniera per cui giova premettere una semplice definizione. Si congiungano A e B coi punti ciclici M e N, e s'indichino con

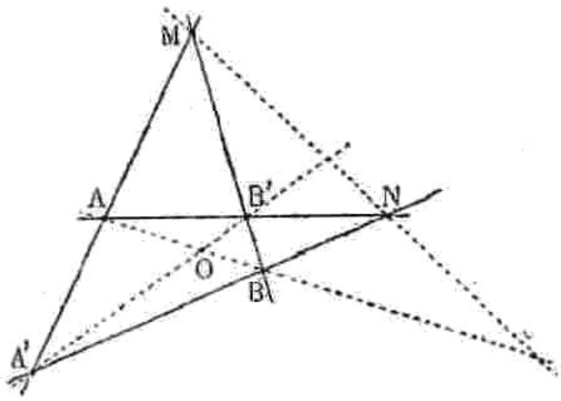
$$A' = AM \cdot BN \quad B' = AN \cdot BM$$

le intersezioni di queste due coppie di rette isotrope: con Darboux diremo che i punti A' e B' costituiscono la coppia dei punti *associati* ad A, B (1). Nell'annessa figura i punti A, B, A', B' M, N, sono rappresentati tutti come reali; sappiamo invece che M e N sono immaginarii coniugati, e per conseguenza se A e B sono reali A' e B' saranno immaginarii coniugati,

(1) Coppie di punti associati sono dunque coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo, che ha due vertici nei punti ciclici.

e viceversa, poichè la relazione fra coppie di punti associati è reciproca.

La nozione delle coppie di punti associati permette di esprimere l'osservazione sul cerchio che abbiamo fatta innanzi, come segue: se K è un cerchio luogo di punti, P, per cui le distanze da due poli fissi A e B hanno un rapporto costante, i punti A' e B' associati ad A, B, dovranno stare sopra il cerchio.



Viceversa se i punti A' e B' associati ad A e B stanno sul cerchio K, che cosa si può dire del rapporto $PA:PB$ per un punto P variabile su K?

Questo rapporto non diventa mai nullo, nè infinito perchè quando uno dei suoi termini s'annulla (cadendo P in A' o in B') s'annulla anche l'altro, diventando — come è facile verificare — infinitesimo del medesimo ordine (cioè del 1° ordine rispetto all'ascissa x); e similmente quando uno dei termini diventa ∞ (cadendo P in M o in N) diventa ∞ anche l'altro, e del medesimo ordine. Così si conclude che il detto rapporto riesce costante. Cioè: *il cerchio è luogo dei punti le cui distanze da una coppia di punti fissi han rapporto costante, e ciò rispetto ad infinite coppie di punti, soggette soltanto alla condizione che la coppia dei punti associati appartenga al cerchio.* È poi facile vedere che le coppie di punti possibili sono precisamente quelle che — trovandosi sopra un diametro del cerchio — dividono armonicamente le sue intersezioni colla circonferenza. Questa proprietà, notissima, resulta qui dalle nozioni della polarità relativa ad una conica, mercè un semplice sguardo dato alla figura che precede: se A' e B' sono sulla circonferenza, la retta AB coniugata alla $A'B'$ passerà per il polo O di MN, che è il centro del cerchio ed i punti A' e B' resulteranno coniugati alla conica (cerchio) in cui è iscritto il quadrangolo $MNA'B'$.

In tal guisa la proprietà del cerchio (di Apollonio) di essere luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi hanno un rapporto costante, riesce illuminata secondo il nostro punto di vista: in una maniera superiore che non pretende certo di sostituire la semplicissima maniera elementare, ma che appare soprattutto feconda in ordine a possibili estensioni del problema, come vedremo più avanti.

7. Osservazione sui punti associati. — Si consideri, insieme ad una coppia di punti AB del piano, la coppia associata $A'B'$. Il rapporto delle distanze $PA:PB$, come si è visto, rimane costante quando P varia su un cerchio per $A'B'$, ed allora resta anche costante l'angolo secondo cui il segmento $A'B'$ è veduto da P. Segue da ciò che il detto rapporto $PA:PB$ sarà funzione dell'angolo $\alpha' = \widehat{A'PB'}$.

Si può determinare agevolmente tale funzione. A tal uopo sostituiamo alle coordinate cartesiane $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ e xy, di A, B e P, le nuove coordinate *simmetriche*:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + i a_2, & \alpha_2 &= a_1 - i a_2, \\ \beta_1 &= b_1 + i b_2, & \beta_2 &= b_1 - i b_2, \\ u &= x + iy, & v &= x - iy, \end{aligned}$$

rispetto a cui i due fasci delle rette isotrope vengono rappresentati da $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$; le coordinate simmetriche dei punti associati A' e B' saranno

$$\alpha_1\ \beta_2, \qquad \alpha_2\ \beta_1.$$

Avremo, per le distanze:

$$\begin{aligned} PA^2 &= (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \\ &= (x + iy - a_1 - ia_2)(x - iy - a_1 + ia_2) = \\ &= (u - \alpha_1)(v - \alpha_2), \\ PB^2 &= (u - \beta_1)(v - \beta_2), \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{PA^2}{PB^2} = \frac{(u - \alpha_1)(v - \alpha_2)}{(u - \beta_1)(v - \beta_2)};$$

analogamente pei punti associati, essendo p. es.

$$A' = (\alpha_1 \beta_2), \quad B' = (\alpha_2 \beta_1),$$

sarà

$$\frac{PA'^2}{PB'^2} = \frac{(u-\alpha_1)(v-\beta_2)}{(u-\alpha_2)(v-\beta_1)}.$$

D'altra parte ponendo

$$\alpha = \widehat{APB}, \quad \alpha' = \widehat{A'PB'},$$

avremo (§ 3)

$$e^{2i\alpha} = \frac{u-\alpha_1}{v-\beta_1} : \frac{u-\alpha_2}{v-\beta_2} =$$

$$= \frac{(u-\alpha_1)(v-\beta_2)}{(v-\beta_1)(u-\alpha_2)} = \frac{PA'^2}{PB'^2},$$

e però, estraendo la radice,

$$e^{i\alpha} = \frac{PA'}{PB'}.$$

Analogamente

$$e^{i\alpha'} = \frac{PA}{PB}.$$

Cioè: *il prodotto delle distanze d'un punto P da due punti A e B eguaglia $e^{i\alpha'}$, designando α' l'angolo secondo cui si vede da P il segmento formato dai punti associati A' e B'* (1).

Federigo Enriques

---

(1) Cfr. G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Parigi, Gauthier et Villars, 1873 (pag. 63).