Periodico di Matematiche - Serie VII - Volume 6 - Numero 1-2 - gennaio-giugno 2000

Gli insiemi fuzzy nelle descrizioni e nelle decisioni

di M. Cristina Miglionico (1) - Aldo G. Ventre (2)

Sommario

Richiamiamo considerazioni di base, nozioni e operazioni relative agli insiemi fuzzy. Accenniamo ad alcune applicazioni, quali un processo di sintesi dei giudizi e un problema di ottimizzazione. Il nostro scopo è mostrare come la teoria degli insiemi fuzzy, fin dagli elementi, possa fornire tecniche e metodi utili ad affrontare problemi non banali.

1. Introduzione

B. Russell nel 1923 scriveva: "La logica tradizionale abitualmente assume che debbano essere impiegati simboli precisi. Tuttavia ciò non è applicabile alla vita terrestre, ma solo ad una *imagined celestial existence*; la logica ci porta più vicino al cielo di altri studi". Russell precedeva una attività, attualmente ancora

(1) Istituto di Matematica - Facoltà di Architettura – Via Monteoliveto, 3 - 80134 Napoli
(2) Seconda Università degli Studi di Napoli - Facoltà di Architettura – Dipartimento di Storia, Restauro e Costruzione dell'Architettura e dell'Ambiente, Abazia di San Lorenzo ad Septimum, 81031 Aversa, e-mail: alventre@unina.it

in pieno sviluppo, di studiosi che avrebbero volto la loro attenzione alla definizione di sistemi logici non classici.

La psicologia, le scienze sociali, l'economia, i sistemi uomo-macchina, i procedimenti di indagine induttivi richiedono lo sviluppo di modelli di ragionamento che tengano conto delle intrinseche imprecisioni degli oggetti. L'indeterminatezza è generalmente presente nei processi conoscitivi della realtà fisica e dipende principalmente da fattori relativi all'ambiente e al linguaggio naturale.

R. Bellman e M. Giertz (1973) puntualizzano con espressività la questione, prospettano le finalità dei *fuzzy sets* e ne pongono le basi operative ed assiomatiche: "Un'esatta descrizione di una qualsiasi situazione fisica è virtualmente impossibile.... Uno dei più importanti problemi nella descrizione (essenziale nelle comunicazioni, decisioni,...) è ridurre la necessaria imprecisione ad un livello di relativa irrilevanza. Dobbiamo bilanciare i bisogni di esattezza e semplicità e ridurre la complessità senza eccedere nella semplificazione. Nomi (casa), verbi (camminare), aggettivi (alto) si riferiscono tutti a concetti con contorni imprecisi. Per rendere più precisi questi contorni dobbiamo sacrificare la semplicità, e così facendo otteniamo un livello di esattezza non adatto al linguaggio usuale, e raggiungiamo un punto in cui la comunicazione diventa impossibile". La questione è affascinante ed è terreno di incontro dei maggiori studiosi.

K. Popper (1976): "Precisione e certezza sono falsi ideali. È impossibile conseguirli e quindi sono pericolosamente fuorvianti se sono accettati acriticamente come guide. La ricerca della precisione è analoga alla ricerca della certezza ed entrambe dovrebbero essere abbandonate. Io non suggerisco, naturalmente, che un aumento della precisione, nella predizione o nella formulazione non possa essere talvolta molto desiderabile. Quel che suggerisco è che sarebbe sempre indesiderabile fare uno sforzo per aumentare la precisione, specialmente la precisione linguistica, poiché questo conduce a mancanza di chiarezza, a dispendio di tempo e a sforzo nei preliminari, spesso inutili, poiché sono superati dal reale progresso della trattazione: non si dovrebbe mai provare ad essere più precisi di quanto richiede il problema contingente".

Nell'ordinaria teoria degli insiemi, assegnato un insieme è sempre possibile, almeno in linea di principio, decidere se un oggetto appartiene o no all'insieme. In altre parole nell'ordinaria teoria degli insiemi l'appartenenza di un elemento all'insieme X è un concetto preciso mediante il quale si stabilisce che una e una soltanto delle proposizioni: "x è un elemento di X", "x non è un elemento di X" è vera e, di conseguenza, l'altra è falsa. La logica del terzo escluso è a fondamento della teoria degli insiemi. Non abbiamo però a disposizione un criterio per stabilire se le proposizioni "Gianni è alto" o "il numero 7 è molto maggiore di 1" sono vere. È artificioso, se non impossibile, definire "l'insieme degli uomini alti" in una assegnata comunità, proprio perché è artificioso stabilire il confine che separa gli "uomini alti" dagli "uomini non alti". La stessa difficoltà sorge ogni qualvolta tentiamo di definire estensivamente un insieme (non matematico) di oggetti.

2. Nomenclatura e primi risultati

Com'è noto un sottoinsieme A dell'insieme (non vuoto) X è definito dalla funzione caratteristica $C_A(x)$:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

Consideriamo X come un insieme "universale". Vengono così descritti, in modo non ambiguo, gli insiemi "ordinari" o "classici", qual è, ad esempio, l'insieme A dei numeri naturali minori di 9, ove $C_A(8) = 1$ e $C_A(20) = 0$.

L'idea centrale dei *fuzzy sets* è che si consente alla funzione caratteristica di assumere valori compresi tra 0 e 1, allo scopo di poter rappresentare il concetto di appartenenza graduata. Più precisamente, un sottoinsime *fuzzy* A dell'insieme X è definito dall'insieme delle coppie (x, $C_A(x)$), con x appartenente a X e $C_A(x)$ numero reale dell'intervallo reale [0, 1]. Il valore $C_A(x)$ è detto grado o valore di appartenenza di x a A. Allora, in particolare, un sottoinsieme di X è un sottoinsieme *fuzzy* di X, perché, $C_A(x)$ assume i soli due valori estremi, 0 e 1, dell'intervallo.

Il concetto di sottoinsieme fuzzy è perciò più ampio del concetto di sottoinsieme "classico".

Il grado di appartenenza di un elemento è dunque un' indicazione numerica di quanto noi siamo soggettivamente disposti ad accettare quel particolare elemento come appartenente all'insieme *fuzzy*.

"Questa estensione non è ovvia: se un oggetto è accettato al 60% come elemento di un insieme *fuzzy* A e al 40% come elemento di un insieme *fuzzy* B, quanto siamo disposti ad accettarlo come elemento sia di A che di B?" [Bellmann e Giertz,1973]. Come si è detto il numero $C_A(x)$ ha una interpretazione naturale come nostro grado di accettazione della affermazione "x è un elemento di A" e quindi come "valore di verità associato a questa affermazione".

Da questo punto di vista ha significato chiedersi quanto siamo disposti ad accettare altre più complicate affermazioni su A, còme "sia x che y sono elementi di A". Noi siamo "liberi "di assegnare il grado di appartenenza di un elemento ad A.

Non siamo "liberi " di assegnare un grado di appartenenza del medesimo elemento sia ad A che a B, cioè ci chiediamo quale valore di verità è coerente assegnare alla affermazione "x è un elemento di A e x è un elemento di B", qualora si conoscano i singoli valori di verità delle affermazioni "x è un elemento di A", "x è un elemento di B".

La risposta a questo quesito, come all'analogo: qual è il valore di verità dell'affermazione "x è un elemento di A oppure x è un elemento di B", conduce ad una definizione delle operazioni di intersezione e unione rispettivamente tra insiemi *fuzzy*.

Se C_A (x) e C_B (x) sono i gradi di appartenenza di x ai sottoinsiemi *fuzzy* A e B, le uniche estensioni delle operazioni di intersezione e unione che soddisfano requisiti di commutatività, monotonia, continuità sono necessariamente definite come segue.

L'insieme *fuzzy* $A \cap B$, intersezione dei due insiemi *fuzzy* A e B, è l'insieme delle coppie $(x, \min (C_A(x), C_B (x)), x \in X$; l'insieme *fuzzy* $A \cup B$ unione dei due insiemi *fuzzy* A e B è l'insieme delle coppie $(x, \max (C_A (x), C_B (x)), x \in X$; inoltre si definisce l'inclusione $\subseteq$ nel modo seguente:

$A \subseteq B$ se e solo se $C_A(x) \leq C_B(x)$, per ogni $x \in X$, e quindi l'uguaglianza tra insiemi *fuzzy*: $A = B$ se e solo se $C_A (x) = C_B (x)$, per ogni $x \in X$.

La definizione di complemento, per nulla ovvia, anche se ragionevole, è cosi formulata: A è l'insieme delle coppie $(x, \bar{\mathrm{C}} (x)), x \in X$, dove $\bar{\mathrm{C}} (x) = 1 - \mathrm{C} (x)$.

È immediato riconoscere che se le funzioni di appartenenza C_A e C_B assumono solo valori in $\{0, 1\}$, allora i sottoinsiemi individuati dalle operazioni tra sottoinsiemi *fuzzy* sopra definite sono insiemi ordinari e le precedenti definizioni si riducono a quelle relative agli insiemi (ordinari).

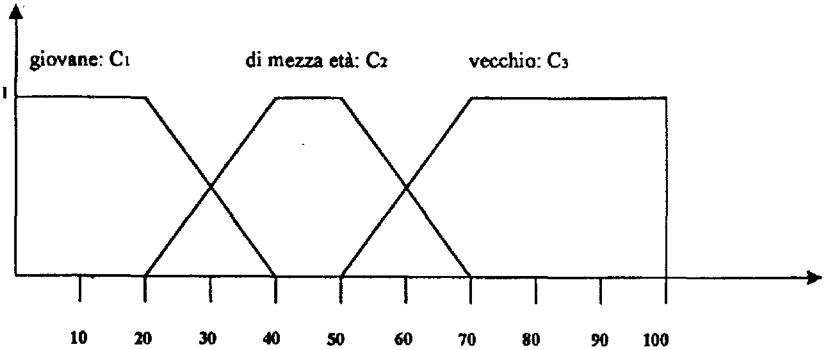
Esempio 1. Rappresentiamo i concetti "giovane", "di mezza età", "vecchio" attribuiti a esseri umani con sottoinsiemi *fuzzy*.

Consideriamo l'insieme X delle età formato dai numeri tra 0 e 100. Noi siamo dell'opinione che le funzioni C_1, C_2, C_3 che seguono possano descrivere i tre concetti, nell'ordine

$$\mathrm{C}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 20 \\ (40-x)/20 & \text{se } 20 < x < 40 \\ 0 & \text{se } x \geq 40 \end{cases}$$

$$C_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 20 \text{ o } x \geq 70 \\ (x\text{-}20)/20 & \text{se } 20 < x < 40 \\ (70\text{-}x)/20 & \text{se } 50 < x < 70 \\ 1 & \text{se } 40 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

$$C_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 50 \\ (x\text{-}50)/20 & \text{se } 50 < x < 70 \\ 1 & \text{se } x \geq 70 \end{cases}$$



Ad alcune fasce d'età, può essere attribuito più di un singolo concetto, ad esempio un trentenne può essere considerato giovane e di mezz'età , in qualche misura.

Elementi che godono di due proprietà si trovano nell'intersezione degli insiemi *fuzzy* che rappresentano quelle proprietà e così la parte di grafico nell'intervallo [20, 40] rappresenta l'intersezione non vuota tra gli insiemi *fuzzy* C_1 e C_2.

Esempio 2. Mostriamo ora come la semplice operazione di intersezione possa venire utilizzata in problemi di decisione, nell'ipotesi in cui le scelte siano sottoposte a vincoli. Riprendiamo un semplice esempio di programmazione *fuzzy* (R. Bellman e Zadeh, 1970). Immaginiamo che una persona debba scegliere tra 4 attività lavorative: a, b, c, d.

Lo stipendio f annuo in dollari relativo a ciascun lavoro è così stabilito: f(a) = 30.000; f(b) = 25.000; f(c) = 20.000; f(d) = 15.000. L'obiettivo consiste nello scegliere il lavoro che procuri il salario massimo, dati i seguenti vincoli:
1. Il lavoro è interessante
2. Il lavoro è a breve distanza in auto

Dopo un'analisi, la persona valuta il lavoro a scarsamente interessante; b e c sufficientemente interessanti; d molto interessante. Perciò il *fuzzy set B* dei lavori interessanti sull'insieme {a, b, c, d} è così definito dal soggetto decisore:

B_1= { (a; 0,4), (b; 0,6), (c; 0,8), (d; 0,6) }

Il vincolo della breve distanza è definito, sempre dal soggetto, dal *fuzzy set*:

B_2= { (a; 0,1), (b; 0,9), (c; 0,7), (d; 1) }

dei lavori a breve distanza. Si intende che il grado di appartenenza 0,1 significa "sede del lavoro molto distante", ossia soddisfa scarsamente la richiesta della breve distanza, e 0,9 "lavoro quasi sotto casa".

Vogliamo ora esprimere sempre sulla scala [0,1] il livello di soddisfazione che il soggetto riceve dallo stipendio x. La persona che sta decidendo ritiene di essere pienamente soddisfatta da uno stipendio $x > 40.000$ dollari, ritiene assolutamente insoddisfacente uno stipendio inferiore a 13.000 dollari. Stipendi x compresi tra 13.000 e 40.000 dollari sono soddisfacenti in misura crescente. Indichiamo precisamente con C(x) la funzione "soddisfazione per lo stipendio x" che, sempre soggettivamente, definiamo cosi:

$$C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 40.000 \\ -0.00125\,(x/1000-40)2 + 1, & \text{se } 13.000 \leq x \leq 40.0000 \\ 0 & \text{se } x < 13.000 \end{cases}$$

Questa funzione definisce l'insieme *fuzzy* G, l'obiettivo descrivente il grado di soddisfazione del soggetto quando riceve lo stipendio x.

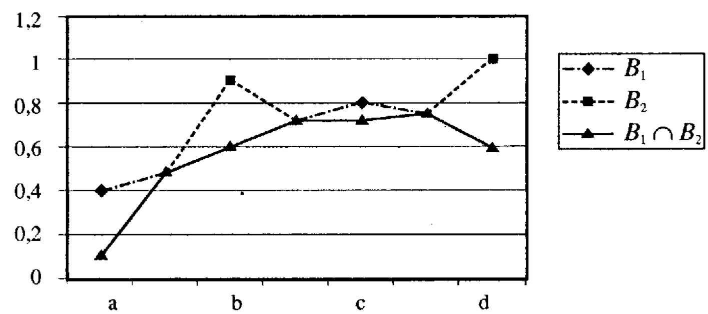
Calcoliamo la funzione di appartenenza C(x) per ciascuno degli stipendi procurati dai lavori *a, b, c, d*:
$C(f(a)) = 0.875$, $C(f(b)) = 0.7$, $C(f(c)) = 0.5$, $C(f(d)) = 0.2$

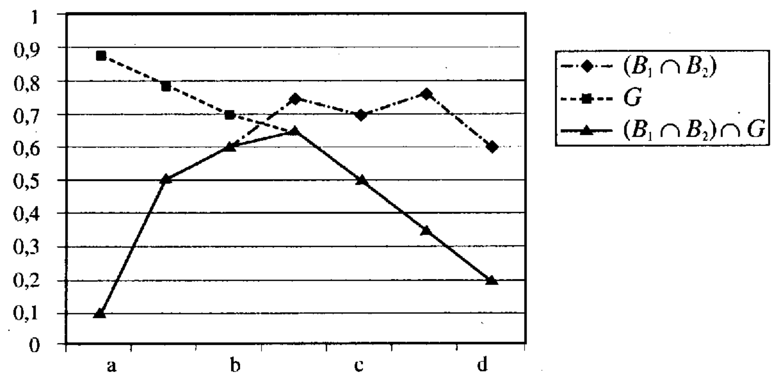
Essendo $B_1 = \{(a; 0{,}4), (b; 0{,}6); (c; 0{,}8); (d, 0{,}6)\}$
$B_2 = \{(a; 0{,}1); (b; 0{,}9); (c; 0{,}7), (d; 1)\}$
$G = \{(a; 0{,}875); (b; 0{,}7); (c; 0{,}5); (d; 0{,}2)\}$

Confrontiamo ora i valori di B_1 e B_2, e scegliamo tra i due il valore minore.

$B_1 \cap B_2 = \{(a; 0.1); (b; 0.6); (c; 0.7); (d; 0.6)\}$ e altrettanto facciamo tra B_1, B_2, e G: $B_1 \cap B_2 \cap G = \{(a; 0{,}1); (b; 0{,}6); (c; 0{,}5); (d; 0{,}2)\}$

I seguenti grafici sono rappresentativi di $B_1 \cap B_2$ e $B_1 \cap B_2 \cap G$





L'attività lavorativa da preferire è dunque b, perché è quella che meglio soddisfa l'obiettivo compatibilmente con i vincoli presenti. Il lavoro b ha come valore 0,6 che è il valore più alto nell'insieme fuzzy $B_1 \cap B_1 \cap G$.

È da osservare che nella programmazione *fuzzy* i vincoli e gli obiettivi sono variabili tra loro omogenee, nel senso che l'operazione di sintesi, cioè di intersezione, non distingue, contrariamente a quanto avviene nella programmazione classica, tra vincoli e obiettivo. In altre parole i concetti di vincolo e obiettivo in programmazione *fuzzy* sono simmetrici.

3. Aritmetica *fuzzy*

Anche per quanto riguarda il trattamento delle variabili numeriche approssimative, gli insiemi *fuzzy* forniscono le tecniche idonee. Infatti sono proprie del linguaggio naturale espressioni del tipo, "l'età di Mario è molto prossima ai 40 anni", "Gianni è molto più alto della media". Ma, di più, si vorrebbe stabilire un procedimento "razionale" per il quale si possa rispondere alla domanda: quanto fa quasi 2 più quasi quattro? Vengono perciò introdotti i numeri *fuzzy* con le operazioni che estendono le quattro operazioni ordinarie. Allo scopo introduciamo il concetto di *α-taglio.*

Detto C un sottoinsieme *fuzzy* di un insieme X e α un numero dell'intervallo [0, 1], si definisce *α-taglio* di C l'insieme ${}^{\alpha}C=\{x \mid C(x) \geq \alpha\}$, cioè l'insieme delle x appartenenti a X tali che la funzione C vale almeno α. L'insieme ${}^{\alpha+}C=\{x \mid C(x)>a\}$ si definisce *α-taglio* forte di C.

Per gli insiemi *fuzzy* C_1, C_2, C_3 considerati in precedenza possiamo dire che ${}^{0}C_1={}^{0}C_2={}^{0}C_3 = [0, 100] = X$, e inoltre ${}^{\alpha}C_1= [0, 40\text{-}20\alpha]$, ${}^{\alpha}C_2 = [20\alpha+20, 70\text{-}20\alpha]$, ${}^{\alpha}C_3 = [20\alpha+50, 100]$, qualunque sia $\alpha \in\ ]0, 1]$. ${}^{\alpha+}C_1 =]0, 40\text{-}20\alpha[$, ${}^{\alpha+}C_2 =]20\alpha+20, 70\text{-}20\alpha[$, ${}^{\alpha+}C_3 =]20\alpha+50, 100[$, qualunque sia $\alpha \in [0, 1[$. ${}^{1+}C_1 = {}^{1+}C_2 = {}^{1+}C_3 = \varnothing$. Si ha che se $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow {}^{\alpha 1}C \supseteq {}^{\alpha 2}C$ e di conseguenza ${}^{\alpha 1}C \cap {}^{\alpha 2}C = {}^{\alpha 2}C$ e ${}^{\alpha 1}C \cup {}^{\alpha 2}C = {}^{\alpha 1}C$. Il concetto di α-*taglio* si presta a definire una decomposizione, o partizione del *fuzzy set* C in funzione di α. Si pone ${}_{\alpha}C(x) = \alpha\, {}^{\alpha}C(x)$ e vale la formula di decomposizione

$$C = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}C.$$

Se la funzione di appartenenza C è dotata di massimo questo dicesi *altezza* dell'insieme *fuzzy*; se tale massimo vale 1 allora l'insieme *fuzzy* dicesi *normale*.

Definiamo inoltre supporto di C l'insieme degli elementi x di X, tali che il valore di C in x è positivo. In simboli: supp (C) = $= {}^{0+}C = \{ x \in X \,/\, C(x) \geq 0 \}$.

Tra i sottoinsiemi *fuzzy* dell'insieme $\Re$ dei numeri reali sono di particolare interesse i numeri *fuzzy*. Precisamente si definisce numero *fuzzy* un sottoinsieme *fuzzy* C dell'insieme $\Re$ dei numeri reali, che godono delle seguenti proprietà

(a) C è normale

(b) ${}^{\alpha}C$ è un intervallo chiuso per ogni $\alpha \in [0, 1]$

(c) il supporto di C, ${}^{0+}C$, è limitato.

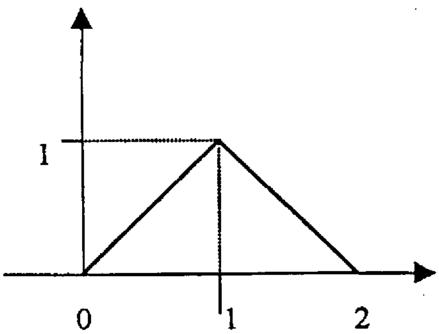
Ad esempio la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}$$

non definisce un numero *fuzzy* perché non soddisfa la condizione (c); mentre la funzione

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ appartiene all'intervallo } [0,1] \\ 2 - x & \text{se } x \text{ appartiene all'intervallo } [1,2] \end{cases}$$

definisce un numero *fuzzy*, che può essere il numero "x prossimo a 1".



Abbiamo incontrato altri numeri *fuzzy* nell'esempio 1. Infatti ciascuna delle funzioni C_1, C_2, C_3 definisce un numero fuzzy. Siamo ora in grado di definire le quattro operazioni per i numeri fuzzy. Precisamente se * denota una delle quattro operazioni ordinarie e A e B sono numeri *fuzzy* definiamo $A * B$ il numero fuzzy $A * B = \cup\ {}_\alpha(A * B)$ dove ${}_\alpha(A * B) = \alpha\ {}^\alpha(A * B)$, per quanto detto prima.

Ricordiamo che dati due intervalli ${}^\alpha A = [a, b]$ e ${}^\alpha B = [d, e]$ si ha che $[a, b] * [d, e] = \{f * g \,/\, a \leq f \leq b, \quad d \leq g \leq e\}$ che è l'insieme di tutti i risultati delle operazioni tra un numero di $[a, b]$ e uno di $[d, e]$, per cui ogni operazione * porta due intervalli chiusi in un intervallo chiuso.

In particolare $[a, b] + [d, e] = [a+d,\ b+e]$

$[a, b] - [d, e] = [a-e, b-d]$

$[a, b] \cdot [d, e] = [\min(ad, ae, bd, be), \max(ad, ae, bd, be)]$

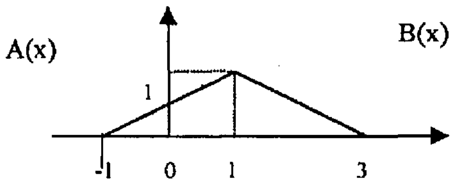
e nell'ipotesi in $0 \notin [d, e]$

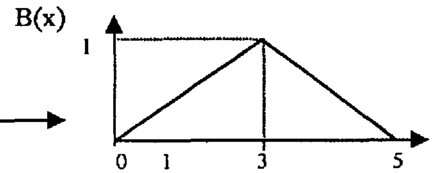
$[a, b] \,/\, [b, e] = [a, b] \cdot [1/e, 1/d] = [\min(a/d, a/e, b/d, b/e), \max(a/d, a/e, b/d, b/e)]$

Esempio 3. Considerati i numeri *fuzzy*

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -1 \text{ e } x > 3 \\ (x+1)/2 & -1 < x \leq 1 \\ (3-x)/2 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

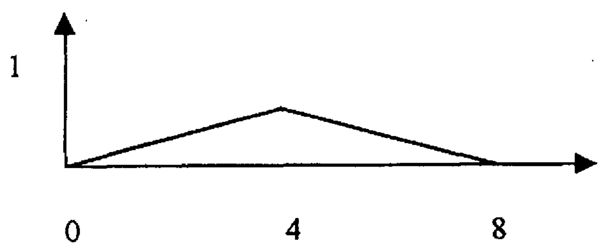
$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \text{ e } x > 5 \\ (x-1)/2 & 1 < x \leq 3 \\ (5-x)/2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$





Se $0 \leq \alpha \leq A(x) \leq 1$ allora
$\alpha \leq (x+1)/2 \leq 1$ da cui le limitazioni $2\alpha-1 \leq x$ ed anche $-1 < x \leq 1$
$\alpha \leq (3-x)/2$ da cui $x \leq 3-2\alpha$ $1 < x \leq 3$

In definitiva $\alpha A = [2\alpha-1, 3-2\alpha]$. In modo analogo $^{\alpha}B = [2\alpha+1, 5-2\alpha]$. Avremo dunque
$^{\alpha}(A+B) = [4\alpha, 8-4\alpha]$ e $\bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}(A \cup B) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\, {}^{\alpha}(A \cup B) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\, [4\alpha, 8-4\alpha] = [0, 8]$
ottenuto come unione al variare di α in $[0, 1]$, per cui per $x < 0$ e $x > 8$ si ha $A + B = 0$ e nel punto 4 si ha $A + B = 1$



Proiezioni ed estensioni cilindriche

Sempre utilizzando gli insiemi *fuzzy* si possono affrontare problemi di scelta a più obiettivi. Allo scopo illustriamo i concetti, tra loro complementari, di proiezione ed estensione cilindrica. Cominciamo con il definire il prodotto cartesiano di insiemi *fuzzy*. Siano $X_1, \dots X_n$, $n > 1$ insiemi ordinari non vuoti e sia $X = X_1 x \dots x X_n$ il prodotto cartesiano di $X_1, \dots, X_n$. A partire dai sottoinsiemi fuzzy $C_1, \dots, C_n$ definiti rispettivamente su $X_1, \dots, X_n$, diremo *prodotto cartesiano* $C = C_1 \times \dots \times C_n$, il sottoinsieme fuzzy C di X, la cui funzione di appartenenza è

C: $x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow C(x) = (C_1(x_1), \dots, C_n(x_n))$.

Esempio 4.1 Sia X_1= {Milano, Napoli, Roma} un insieme di città sedi di facoltà universitarie e sia X_2= {Economia, Giurisprudenza} un insieme di facoltà tra cui scegliere.

Costruiamo gli insiemi *fuzzy* C_1 e C_2 che rappresentano le preferenze di un individuo sugli insiemi X_1 e X_2 presi singolarmente

$C_1 = \{(0{,}8, M); (0{,}5, R); (0{,}4, N)\}$; $C_2 = \{(0{,}9, E); (0{,}7, G)\}$

Il prodotto cartesiano $C = \{(0{,}8, (M, E)); (0{,}5, (R, E)); (0{,}4, (N, E)); (0{,}7, (M, G)); (0{,}5, (R, G)); (0{,}4, (N, G))\}$ rappresenta la sintesi delle preferenze sulle facoltà e sulle città.

L'esempio descrive un procedimento di sintesi. Si definisce inversamente un procedimento per il quale, conoscendo la preferenza globale rispetto a due o più insiemi è possibile ottenere informazioni rispetto a ciascuno di essi singolarmente, utilizzando il concetto di *proiezione*.

Sia C un sottoinsieme *fuzzy* definito su di un insieme $X_1 \times X_2$ prodotto cartesiano di X_1 e X_2. Si definisce proiezione di C su X_1, il sottoinsieme fuzzy di X_1 denotato con $\mathrm{Proj}_{X_1}(C)$, con funzione di appartenenza $f_{\mathrm{proj}x_1}(C) = \sup f_C((x_1, x_2))$, $x_2 \in X_2$ ove sup denota l'estremo superiore di f_C.

Esempio 4.2 Riprendendo gli insiemi $X_1 = \{M, N, R\}$ e $X_2 = \{E, G\}$ dell'esempio 4.1, supponiamo che le scelte di un individuo siano espresse dal sottoinsieme fuzzy C di X_1 x X_2: $C = \{(0{,}3, (M,$

E); (0,5,(N, E); (0,7,(R, E)); (0,4,(M, G)); (0,8,(N, G)); (0,9,(R, G))} dal quale si deduce la preferenza per la facoltà di giurisprudenza a Roma.

Circa l'alternativa E, G possiamo dedurre la preferenza, utilizzando la proiezione di C su X_2: Projx_2 (C)= {(max(0,3; 0,5; 0,7),E); (max(0,4; 0,8; 0,9),);G)} = {(0,7;E), (0,9;G)}, da cui si deduce la preferenza per la facoltà di Giurisprudenza.

Reciprocamente l'estensione cilindrica di un sottoinsieme *fuzzy* C di $X_a \times X_b \times ..... \times X_k$ con $1 \leq a < b < \ldots < k \leq r$ è il sottoinsieme fuzzy C^e di $X = X_1 \times ..... \times X_r$ di funzione di appartenenza

$$\mathrm{f}c^e\colon x = (x_1, \ldots, x_r) \in X \rightarrow \mathrm{f}c^e(x) = \mathrm{f}c(x_a, \ldots, x_k)$$

Riprendendo l'esempio 3.1 l'estensione cilindrica di C_1 su $X = X_1 \times X_2$ è definita da
C_1^e ={(0.8, (M,E)); (0.5, (R,E)); (0.4 (N,E)); (0.8, (M,G)); (0.5,(R,G)); (0.4,(N,G))}

Conclusione

Le tecniche degli insiemi *fuzzy*, in parte molto brevemente descritte in questo articolo, hanno trovato applicazioni rilevanti e innovative in vari campi, quali la diagnostica medica (Försstrom,1992), l'ingegneria e la pianificazione (Kasabov,1996; G. Klir e B.Yuan, 1994); il management e l'economia (Zimmermann,1974; G. Gambarelli, Jerzy Holubiec, Janusz Kacprzyk 1988), l'astronomia (F. Murtagh, M. Sarazin, 1993), nel diritto (T. Mazzarese, 1996).

Bibliografia

Bellmann, R. e M. Giertz (1973) "On the analytic Formalism of the Theory of Fuzy Sets" *Information Sciences*, 5, 149-156.

Bellmann, R. e L. Zadeh (1970) "Decision Making in a Fuzzy environment" *Management Science*, 17, 4, 141-164.

Bouchon Meunier, B. (1994) "La Logique Floue" *Presses Universitaires de France*, ser. Que sais-je?, Paris.

Eklund, P. e R. Fuller (1993) "A Neuro-fuzzy Approch to Medical Diagnostics" Proc. of FIF 93, Fuzziness in Finland (P. Eklund and J.

Mattila eds.) Abo Akademi.

Försstrom, J. (1992) "Machine Learning in Clinical Medicine by Knowledge Acquisition from Patient Databases" (tesi di dottorato, Università di Turku, Finlandia) *Annales Universitatis Turkuensis*, ser. D., 92.

Gambarelli, G., J. Holubiec e J. Kacprzyk (1988) "Modeling and Optimization of International Economic Cooperation via Fuzzy

Mathematical Programming and Cooperative Games" *Control and Cybernetics*, 17, 4, 325-335.

Kasabov, N. (1996) *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems and Knowledge Engineerin*, MIT Press, Cambridge Ma, USA.

Klir, G. J. e B. Yuan (1994) *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Application*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Mazzarese, T. (1996) *Forme di razionalità delle decisioni giudiziali*, Giappichelli, Torino.

Murtagh, F. e M. Sarazin (1993) "Nowcasting Astronomical Seeing: a Strudy of ESO La Silla and Paranal" *Plublication of the Atronomical Society of the Pacific*, 105, 932-939.

Popper, K. (1976) *Unended Quest*, Fontana-Collins, London.

Russell, B. (1923) "Vagueness" *Australian Journal of Psychology and Philosophy*, 1, 84-92.

Yen, C., G. R. Langari e L. Zadeh (1997) "Industrial Applications of Fuzzy 1996" *Logic and Intelligent Systems*, IEEE Press, Piscataway, N.J.

Zadeh, L. (1965) Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 353-383.

Zimmermann, H. J. (1984) *Fuzzy Set Theory and its Application*, International Series in Management Science Operation Research, Kluwer-Nijhoff Publishing, Dordrecht.