Bruno de Finetti

# Possiamo, e fino a che punto, INDICARE UNA VIA?

*Occorreva porci questa domanda, rispondendo a una domanda che era nell'aria, a una domanda sviluppata piú specificamente nella lettera di un Socio e abbonato. Ma la risposta non può essere univoca, pur cercando di chiarire quelle linee e quegli atteggiamenti che si ritengono essenziali.*

## 1. - Dopo due anni del nuovo PdM

Come nell'ultimo fascicolo dell'anno scorso (Vol. 49, 1973), appariva opportuna anche ora una riflessione sull'opera svolta, e, cosa piú essenziale, sulle prospettive e i propositi della azione futura. E appariva necessario, soprattutto, un chiarimento di fondo: cosa intendevamo di fare, o suggerivamo di fare, in concreto, perché l'insegnamento della matematica nella scuola italiana rispondesse alle esigenze ripetutamente illustrate e discusse?

Non si può certo dire che di ciò non avessimo parlato; si può quasi dire che non abbiamo fatto altro che esporre e riportare idee e indicazioni concernenti tale problema, di modo che ciascuno potesse averne stimolo per riflessioni e scelte.

Ma, forse, questa libertà di riflessione e di scelta, anziché di stimolo, risultava per molti motivo d'imbarazzo e d'incertezza: la nostra scuola è ancora troppo legata a imposizioni ufficiali o ufficiose o consuetudinarie che abituano al conformismo e all'immobilismo, e, con ciò, alla spersonalizzazione di docenti e discenti.

Al momento di accingermi a rispondere a tali questioni e motivi di perplessità, che sentivamo nell'aria, ho ricevuto dal prof. Mario Gilardi (della Sezione di Bergamo) una lettera che mi facilita il compito: una lettera abbastanza lunga e lodevolmente precisa nel presentare i problemi e gli aspetti sui quali si accentreranno, con grande probabilità, i dubbi che molti lettori avranno incontrati e che desidererebbero veder chiariti. Come dice Gilardi:

> « Le parole, si sa, possono essere variamente interpretate e sortire l'effetto contrario alle intenzioni di chi le pronuncia o le scrive; proprio per ridurre al minimo il rischio di una distorsione inopportuna o, peggio, di un fraintendimento dei suoi scritti e interventi, mi consenta di esprimerle alcuni di quei dubbi e perplessità forse non soltanto miei » (mentre, in precedenza) « per motivi vari, non ultimo il fatto che Ella si batte con tanta generosità e 'furore' per una scuola valida e, in particolare, per un insegnamento della matematica che dia frutti meno deludenti degli attuali, ritenni conveniente non distoglierla dal suo sforzo immane con dubbi e perplessità forse marginali, stante il mio consenso sui motivi di fondo della sua azione ».

Ritengo perciò di rispondere in modo pertinente probabilmente a molti prendendo per base questa lettera e riportandone alcuni brani essenziali; ne ringrazio l'autore, a nome mio ed a nome dei molti che probabilmente avrebbero posto piú o meno le stesse questioni da lui ottimamente centrate.

## 2. - L'esigenza di oggi

L'esigenza di oggi è mirabilmente sintetizzata, da Gilardi, in due punti:

> « si dovrebbe chiarire come oggi si abbiano ad affrontare due gravi difficoltà:
> 1) **che la cultura matematica deve avere la più ampia diffusione possibile;**
> 2) **che bisogna apprendere, in più breve tempo, maggior quantità di matematica.**
> E' in relazione al superamento di queste difficoltà che bisognerebbe orientare tutti gli sforzi senza dimenticare però che, volenti o nolenti, il linguaggio della matematica è un linguaggio artificiale e il suo apprendimento non è naturale. Possiamo tentare di sostituire, a « studi stucchevoli » o « sonatine idiote » per principianti, pezzi musicali piú stimolanti, ma non c'è da illudersi troppo: per muovere le mani sulla tastiera bisogna imparare il solfeggio, sciogliere il polso e le articolazioni delle dita; tutto l'interesse e l'amore e la sensibilità per la musica non sono sufficienti, senza quel lavoro, per consentirci un'esecuzione anche solo passabile.

Riguardo al commento che segue l'enunciazione dei due punti, sono meno d'accordo e soprattutto meno pessimista. Infatti, la « maggiore quantità di matematica » prescritta dal punto (2) va intesa come « maggiore vastità » di conoscenze

« scientificamente rilevanti », ma in compenso gran parte delle procedure di routine si possono saltare affidando al calcolatore elettronico, magari per simulazione, il compito di dare il risultato numerico, o in forma grafica (plotter, video). Del resto, anche riferendosi all'analogia della musica, non è detto che un valente intenditore od anche compositore debba essere un buon esecutore.

Anche l'osservazione sul carattere « artificiale » del linguaggio della matematica mi sembra superabile. C'è una *tendenza* a renderlo artificiale per superbia « puristica » (portata spesso oltre i limiti dell'aberrazione proprio ora che la matematica va invece sempre più concretandosi in sempre nuove applicazioni). Ma fortunatamente c'è anche la tendenza (che non è velleitaria, ma rispondente a una vera *esigenza*) alla *interdisciplinarità*, grazie alla quale la matematica potrebbe scaturire dall'insieme di tutte le scienze del concreto come strumento unificatore.

### 3. - Polemico contro la « scuola di ieri »?

Gilardi si chiede se certe « bordate » vogliono colpire (tra altri bersagli) « i "programmi", i metodi della scuola di ieri? », ed osserva:

> Quei programmi e quei metodi, inseriti in quella scuola, ci stavano: matematici, fisici, scienziati e tecnici di buona qualità hanno fatto quella esperienza che ci sembra stucchevole e povera.
>
> Altro argomento è la forzata sottolineatura di certe distorsioni e aberrazioni che può generare equivoci non meno gravi dei difetti che si vogliono correggere: per esempio, « la polemica trinomitica ».

Ed osserva, riguardo a questa, che certi giovani insegnanti ne tengono conto per bandire gli argomenti geometrico-algebrici... sostituendoli con cose di forse minor conto.

Sono lieto dell'occasione per scolparmi (come importatore in Italia della « lotta contro il morbo della trinomite » iniziata in Francia da Lichnerowicz). Più che rivolgersi contro lo specifico argomento di per sé, la critica riguarda la monotonia di temi riguardanti sempre un medesimo tipo di problemi. Qualche ulteriore obiezione contro quel tipo di temi è il carattere puramente meccanico dei metodi usati (Tartinville), ridotti a ricette, nonché (e ciò vale anche per i non meno famigerati « temi da concorso ») per la preminenza esclusiva di curve ecc. algebriche (esponenziali? spirali? gaussiana? ohibò chi le ha mai viste?).

Tornando all'osservazione principale, sul buon risultato, « ieri », dei « programmi di ieri », non vedo che la cosa sia strana. I programmi di allora erano piú aggiornati alle conoscenze e esigenze di allora di quanto avvenga oggi. (Occorre menzionare ancora i « Programmi di Frascati », non certo avanzatissimi, approntati per... i primi alunni provenienti dalla scuola media, e... tuttora, e ormai per sempre, lettera morta?). Ed inoltre, la minore quantità di matematica, e un mondo meno congestionato e convulso, aiutavano al buon risultato.

## 4. - Girandola di parole?

Riferendosi piú direttamente agli aspetti attinenti alla perplessità — occasione della lettera di Gilardi e probabilmente condivisa da molti altri lettori — circa lo specifico « messaggio » del PdM, viene detto che:

> « ... sulla scuola, i programmi, i metodi di insegnamento, le tecniche educative, se ne sono dette tante che in tale girandola di parole si resta storditi e disorientati. Il PdM, anziché aiutare a mettere un po' d'ordine in simile guazzabuglio, mi pare dia una mano alla generale confusione.
>
> Dal sentire confusamente tale bisogno (di una radicale trasformazione dei contenuti e dei metodi nell'insegnamento della matematica) a delineare gli obiettivi, a individuare metodi e strategie per raggiungerli, a predisporre verifiche non parziali o interessate dei risultati, ci corre molto, e il PdM mi pare non sia di grande aiuto in tale impresa. Piuttosto che essere un repertorio di spunti disparati che vengono spesso da autori con esperienze scolastiche e sociali troppo difformi dalle nostre, (esso dovrebbe) fare opera di chiarificazione puntando su iniziative collaudate che possano essere, con opportuni accorgimenti, utilizzate largamente senza pretendere radicali trasformazioni a breve scadenza ».

Qui appare netta una contrapposizione di atteggiamenti sulla quale dovremo ritornare espressamente piú avanti, cercando di esplicitare quel tanto di piú concreto che ci sembrerà possibile dire al riguardo. La cosa piú concreta sarebbe un consiglio di adottare questo o quel modello, piú o meno già confezionato. E forse qualcosa in tal senso si potrà o dovrà fare, a un certo momento, nonostante la forte riluttanza che ciò provoca (almeno in me).

L'insegnante non è (spero; comunque non dovrebbe mai essere) un mangianastri che recita una lezione o un'altra cambiando nastro (o libro di testo), « questo o quello per me pari sono ». Non dovrebbe neppure essere un « insegnante » nel senso burocratico-corporativo-professionale del termine, ma essere una persona che parla ad altre persone, con amichevole spontaneità, insomma « essere sé stesso ». Per riuscire a questo fine semplice ma difficile, di « essere sé stesso » con gli allievi e non un estraneo che ha un « potere » (!) su di essi, non si sarà mai abbastanza riflettuto su tutte le possibili esperienze di ogni paese ed epoca. In particolare, il bell'articolo di Hawkins (PdM, 1974, n. 3), dicendo « cosa significa essere insegnante », spiega press'a poco la precedente frase « essere sé stessi ».

La prima cosa che occorre, per liberarsi da sia pur involontarie e aborrite ma difficilmente sradicabili tracce di autoritarismo e di tradizionalismo, è una cura di « brainstorming » (scuotimento del cervello) per render possibile a tutte le idee di penetrarvi, traversarlo, fissarvisi, staccarvisi, giungendo alla piena disponibilità all'adesione libera a qualunque cosa gli si sia gradualmente rivelata come la piú rispondente all'imperativo di « essere sé stesso » e di apparire tale (non un manichino su modello ministeriale) agli altri, specie ai giovani. Ecco perché la « girandola di parole » (se anche si volesse chiamarla cosí, con troppo scarsa benevolenza) mi sembra, come premessa, indispensabile.

## 5. - L'esempio dei « mostri sacri »

A questo punto è necessario sfatare (non certo per sminuirla, ma proprio per esaltarla) la « fama » dei « mostri sacri », i risultati della cui opera sarebbero

> « inutilizzabili per l'intera scuola, perché troppo legati alla personalità di coloro che li intrapresero. Cosí per le iniziative validissime (e ripetutamente segnalate dal PdM) della prof.ssa Castelnuovo e del prof. Checcucci. Esse, nella gran massa degli insegnanti modesti e scarsamente interessati, anziché essere di sprone e guida per un lavoro meno brillante ma piú fattibile, sono un alibi ulteriore alla

> pigrizia e al disinteresse: 'La prof.ssa Castelnuovo e il prof. Checcucci, con le loro eccellenti qualità d'inventiva, con la loro ampia e sicura preparazione e cultura matematica, possono far questo; ma noi?' ».

Che occorrano doti eccezionali di capacità e di volontà per iniziare, sempre in ambiente piú o meno ostile, attività di tipo non convenzionale, è indubbio. Questo merito è immenso, e la miglior prova ne è il livore di critici boriosi e velenosi. Ma il seguire, anche in modo indipendente, tali esempi, non è difficile. I laureandi e laureande che collaborano (in una specie di « tirocinio ») ai corsi di Emma Castelnuovo (o di altre insegnanti del suo gruppo) o alla preparazione delle « Mostre » (cfr. PdM, 1973, n. 5 e 1974, n. 4-5) si permeano subito, senza forzature, del suo modo di pensare e parlare ai ragazzi, e lo applicano poi naturalmente divenendo insegnanti. La superiorità (presunta) di Emma Castelnuovo usata come alibi per « la pigrizia » di chi la ritiene irraggiungibile non sta nel fatto di essere onnisciente e infallibile, ma proprio *nel non avere* (come purtroppo quasi tutti gli « insegnanti » di fronte agli allievi) *la debolezza di volerlo far credere.* Quando, nel dialogare tra lei e gli allievi, si presenta un problema nuovo, una circostanza imprevista, lei non ha nessun disagio a dire che non le viene subito la risposta, a cercarla insieme a loro, a discutere insieme se risposte o vie di ricerca pensate da lei o da altri si rivelino esatte o errate.

Questo è saper « essere se stessi »; questo è saper *educare;* questo, e non la ridicola pretesa di farsi ritenere infallibili, incute rispetto e fiducia e simpatia.

### 6. - I giovani: esagerato ottimismo?

Gilardi giudica esagerato l'ottimismo nei riguardi dei giovani, quale ravvisa a leggere il PdM o a sentire alcune conferenze, dove:

> « sembra che, trovato il modo di interessare gli allievi e tolta ogni costrizione, tutto poi proceda ottimamente: liberata l'innata creatività saranno i ragazzi stessi a trovare il cammino buono ed inoltrarsi alacri e sicuri... ».

Eppure, a parte il tono ditirambico e l'estensione cosí incondizionata, tale affermazione mi risulta confermata da notizie concordanti relative a svariate esperienze. Ma ammettiamo pure che di quelle fallite non si abbia notizia (e del resto sarebbe a vedere se si fosse trattato di esperienze « ben fatte »; si giungerebbe a un circolo vizioso).

Ma non è forse naturale pensare che sia diverso lo stato d'animo, e quindi l'interesse, l'impegno, il « divertimento », per un ragazzo invitato a « collaborare » con un insegnante « amico », da quello di chi deve eseguire un « compito » come « obbligo » o addirittura come « castigo »?

Ciò non comporta (né credo aver mai detto) che ci si possa attendere il miracolo di veder raggiungere tutte le verità e tutte le vette senza bisogno di suggerimenti, aiuti, consigli, che è giusto e opportuno dare al momento opportuno e nella misura opportuna (per aiutare in passi difficili, non per sostituirvisi con una spinta gratuita se è possibile farne a meno). E neppure è giusto rimproverare ai contestatori di cose e istituzioni assurde il fatto che non sappiano come riformarle; in confronto ai « matusa » che non si avvedono neppure che sono assurde è già un bel passo avanti. Ma certo osservazioni del genere, in astratto, possono interpretarsi ad libitum; nell'esempio che Gilardi mi contesta (sui « disobbedienti »; PdM, 1974, n. 3, p. 20, linea in *corsivo*) è chiaro che il senso di « disobbediente » è quello risultante dal contesto, non quello di « anarcoide »).

### 7. - Il dilemma del « Che fare? »

Sul piano concreto, dell'azione da svolgere o promuovere, quello che mi sembra emergere dalle considerazioni di Gilardi è il dilemma su ciò che occorrerebbe fare: in generale, quali metodi introdurre o sperimentare nella scuola e in quale modo organizzarne l'applicazione e controlli di verifica dei risultati; specificamente per noi, in quale modo potrebbe o dovrebbe la Mathesis intervenire, vuoi indirettamente sostenendo la bontà di certi metodi e programmi o testi, o direttamente cercando di promuoverne e favorirne l'attuazione, magari assumendosi qualche parte dei compiti organizzativi e di verifica.

Queste alternative mi sembra affiorino chiaramente, anche se non del tutto esplicitamente, da varie frasi di Gilardi (di cui alcune già riportate in altro contesto):

« Delineare gli obiettivi (di una radicale trasformazione dei contenuti e dei metodi nell'insegnamento della matematica), individuare metodi e strategie per raggiungerli, predisporre verifiche non parziali o interessate dei risultati ». - Evitare il « pasticcio di iniziative anche valide, se prese singolarmente, ma sporadiche e scollate ». - Puntare, invece « su iniziative collaudate che possano essere, con opportuni accorgimenti, utilizzate largamente... » - « Qualcosa si sta facendo con il S.M.P. e il prof. Checcucci sembra abbia approntato un testo che s'ispira a quello. La direzione della Mathesis, se è convinta della validità della iniziativa, ne faccia una presentazione particolareggiata e organica, e, magari, si assuma l'iniziativa di una concreta sperimentazione rendendo esplicite le modalità di verifica dei risultati, non lasciando però la valutazione degli stessi esclusivamente a coloro che l'hanno fatta. Cosí facendo si comincerebbe finalmente a discutere su qualcosa che abbiamo *fatto* noi e non su opinioni a base di « Mi piace », « Non mi piace », che sono semplicemente espressioni di pregiudizi personali.

Può sembrare si tratti di un'alternativa chiara e facile. Vogliamo farla, una bella sperimentazione sul serio, e vedere se una certa nuova impostazione « va » o « non va »?

Ma una proposta o, piú ancora, la decisione di un'azione in tal senso, sarebbe cosa irresponsabile se non si vagliassero realisticamente tutte le circostanze di ogni genere che condizionano le possibilità e i risultati di ogni scelta.

Prima di passare a tali riflessioni, vorrei però avanzare una riserva sul giudizio negativo riguardo al « Mi piace », « Non mi piace » (a rischio di farmi lapidare come « homo insipiens »). Non dico che tali frasi abbiano valore se dette a prima vista, senza riflessione, senza darvi peso; ma, se profferite a ragion veduta, dopo sperimentati e ponderati gli elementi pro e contro, come sintesi di tutto ciò, esse esprimono a mio avviso assai piú che un freddo elenco di dati « obiettivi », al medesimo modo che dire di una persona che è « bella » o « brutta » dice assai piú che un ricco ed esatto elenco di dati somatici.

## 8. - Riflessioni sul « Che fare? »

Le riflessioni toccano aspetti svariati, convergenti nel portare a una difficile opinione finale soggetta a spinte contraddittorie. Sembra anche difficile seguire un ordine abbastanza coerente. Comunque, proviamoci.

Per cominciare, confesso il piú assoluto scetticismo nelle innovazioni promosse e imposte dall'« alto (?!) » in forma totalitaria e (a parole) bene « organizzata ». Confesso di riporre il massimo (sempre, beninteso, in senso relativo) di fiducia nello « spontaneismo » (chissà perché, tanto snobbato dai saccenti). Per me c'è la stessa differenza che sparpagliare quantità enormi di semente su tutta un'immensa landa deserta, o collocarne poche, e curarle, e curare le nuove piantine cui via via quelle già attecchite danno vita. Nel secondo caso il deserto potrà, col tempo, diventare un bosco rigoglioso, mentre nel primo il deserto e lo sforzo rimarranno sterili.

Anche il valore di « accertamenti obiettivi », nel caso della sperimentazione, è fasullo. Quello che conta, specie nella fase di avviamento, è l'entusiasmo, la spinta morale, l'affiatamento con gli allievi e la comunità, e — per quanto concerne la preparazione specifica — la conquista di una visione sempre piú larga e profonda (in cui può ben risultare mancante senza danno qualche dettaglio « obbligatorio » secondo i « programmi », di modo che poveri ispettori o commissari d'esame rimangano scandalizzati!).

Perciò riterrei opportuno che fossero incoraggiate le iniziative individuali, i collegamenti (per scambio d'informazioni, consigli, ecc.) tra insegnanti impegnati in sforzi affini (ad es. seguendo un medesimo testo o schema di programma), gli scambi di idee fra gruppi diversi ma piú o meno affini come indirizzo, e via dicendo.

Forme piú rigide di organizzazione mi sembrano controproducenti, non solo per il già manifestato mio modo di vedere le cose, ma anche in base all'esperienza. Specie in Italia, tutte le cose fatte « sistematicamente » diventano burocratizzate (il che si esprime meglio dicendo che diventano *burofreniche*, o *burosadiche* (*). Un esempio — appropriatamente menzionato anche da Gilardi — è quello dei « Corsi pilota », ma, a parte singoli pur meritori tentativi come quello ora menzionato, basta riflettere agli incessanti e vani lavori, tipo « tela

(*) Il primo termine è stato coniato dallo scrivente, nel « Manifesto di battaglia contro il culto dell'imbecillità » (ripr. in *Un Matematico e l'Economia*, Franco Angeli ed., Milano 1969); il secondo è dovuto all'illustre pensatore francese Louis Armand (in *Plaidoyer pour l'avenir*, Colmann-Lévy, Paris 1961).

di Penelope », di organi ufficiali e commissioni ufficiose per « riforme della scuola » o di particolari come programmi, ordinamenti, ecc. (per cui tale iter può ricordare l'allucinante « Attendendo Godot », v. P.d.M., 1974, n. 3).

Organizzazioni non ufficiali, come la Mathesis o qualsiasi altra, difficilmente potrebbero sottrarsi alla medesima vischiosità e refrattarietà contro idee intelligenti, per quanti sforzi facessero. Ma per iniziative di tal genere vanno esaminate altre questioni fondamentali.

**9. - La posizione di organizzazioni tipo « Mathesis »**

Mentre è senz'altro naturale che un'associazione tipo Mathesis, proponendosi di spingere verso un miglioramento dell'educazione matematica, assuma un atteggiamento a favore delle tendenze innovative, ed anzi di tendenze innovative « di un certo tipo », sarebbe fuori luogo che si pronunciasse per una scelta specifica tra varianti ispirate a criteri comuni e tendenti a mete convergenti.

Per fare l'esempio menzionato da Gilardi (come già detto), perché la Mathesis dovrebbe proporre quale unico modello quello di Checcucci, e non, invece, quello della Castelnuovo? Aggiungo che io, personalmente, vagheggerei qualcosa di simile ma inquadrato tenendo conto anche di altre esigenze. Ne darò qualche cenno, tanto per far conoscere qualche mio parere personale. Ma se per caso (improbabile) qualcuno avesse voglia di tradurre in libro di testo quelle mie idee, a maggior ragione la Mathesis non dovrebbe propagandare un libro fatto secondo le idee del suo presidente (anzi ex..., perché è un'ipotesi improbabile ma semmai realizzabile chissà quando!).

E' certo lecito sostenere determinate idee e forme d'impostazione, e quindi segnalare i libri che meglio si adeguano a tali esigenze (come i due esistenti e quello inesistente); ma anche ciò può sembrare criticabile da parte di autori e editori di libri di diverso indirizzo. Quando si mescolano questioni di interesse, la situazione è sempre antipatica. Ma assai piú antipatico, anzi scandaloso, è che di tale malinteso « fair play » approfittino scribacchini insensati per lanciare sul mercato libri di testo orripilanti senza che sia possibile farli rinchiudere in un manicomio criminale. Mi vengono mostrate spesso bestialità incredibili, che però, pare, nessuno ha il diritto di impedire vengano date in lettura a studenti che, andando a scuola, sembra dovrebbero avere il diritto di venire istruiti e non incretiniti. Questo, comunque, è un altro problema (sebbene collegato), perché per giudicare di un'accusa occorrerebbe un organo ufficialmente competente, ed anche ciò avrebbe rischi in un paese dove nulla risulta esente da sospetti, fondati o infondati che siano.

### 10. - Le possibilità organizzative in seno alla Mathesis

Supposte superate le difficoltà pregiudiziali di cui sopra, ad es., nel senso di promuovere e seguire esperimenti di insegnamento secondo dati indirizzi, indipendentemente da distinzioni tra l'uso di metodi o libri particolari, sussisterebbe sempre il problema di come tenere collegamenti efficienti, o controlli, o mezzi di verifica, piú o meno sistematici ma comunque efficaci nei due sensi: di aiuto ai singoli insegnanti che partecipano all'esperimento, e di informazione, da parte di essi (o di qualcuno che li visita), all'organo centrale incaricato di seguire la sperimentazione.

Per far fronte a compiti siffatti occorrerebbero forze e mezzi ben al di là di quelli della Mathesis (non solo attuali, ma anche secondo le piú rosee previsioni per un migliore futuro); tutt'al piú si potrebbero promuovere periodiche riunioni tra i partecipanti alla sperimentazione, per uno scambio di impressioni, discussione di punti problematici, aggiornamento di direttive, e via dicendo. Forse sarebbe qualcosa; ma il problema non mi sembra neppure abbordabile se la buona volontà di pochi non viene rafforzata da qualche intervento ufficiale (né insufficiente né... soffocante).

### 11. - Gli esempi di altri paesi

L'esempio migliore mi sembra indubbiamente quello dell'Inghilterra (pur confessando di dover giudicare in base ad elementi molto incompleti). Ho avuto occasione di vedere (sia pur fugacemente) numerose serie di testi sul tipo di quelli dello SMP (School Mathematics Project) che danno in progressione intelligente (e in genere « a spirale », riprendendo a successivi livelli trattazioni precedentemente iniziate), e spesso legati a serie relative ad altre materie (specie scientifiche) cercando di condurre a una visione organica *integrata*. Si tratta di iniziative in vivace concorrenza, ma (per il poco che ne so) con sufficiente senso di fair play. E vengono sempre studiati, da tutti, dei perfezionamenti. Questi fatti evitano il rischio della cristallizzazione.

Anche per l'illuminato equilibrio tra gli eccessi dell'astrazione e dell'empirismo applicativo, sono pienamente consenziente con la scelta fatta da tempo dall'Unione Matematica Italiana (col far tradurre i volumi dello SMP) e del gruppo di docenti particolarmente interessati (che promossero il Convegno sullo SMP a Pallanza; cfr. PdM, 1973, n. 6 e 1974, n. 1-2), nel prendere come punto di riferimento (in senso lato, non in senso meramente imitativo) l'esempio inglese, specie tenendo presente la possibilità di integrazione fra matematica e scienze connettendo la matematica dello SMP con le scienze del Progetto Nuffield (secondo la compatibilità didattica già constatata al congresso di Exeter: cfr. Pdm, 1973, n. 6, pagg. 21-22, conferenza A.J. Malpas).

Il migliore controesempio, a mio avviso, è quello belga, di Papy. Partito con ottime intuizioni e intenzioni (quando le espose ad uno dei convegni di Frascati ne rimasi entusiasta), sviluppandole in modo troppo rigido, troppo personale, troppo esclusivo (quasi con potere dittatoriale sul suo paese, e con strane debolezze come la denominazione di « papygrammi » a certi diagrammi), la sua impostazione si è andata fossilizzando. Con ciò non voglio dirne male in assoluto (neppure potrei, non avendola seguita in dettaglio); ma voglio solo mettere in guardia dal pensare troppo superficialmente che sia ragionevole scegliere una certa via e percorrerla senza ripensamenti e senza adattamenti a mutevoli esigenze e ad ulteriori opportunità di inserimenti e sviluppi.

Un esempio di un diverso tipo di concezione didattica è quello (per citarne uno, fra i programmi piú appoggiati ad idee psicologico-pedagogiche) promosso da Dienes (e legato a J.S. Bruner); Dienes è venuto spesso in Italia e ha spesso illustrato i suoi metodi in conferenze, ed a volte, piú efficacemente, con esperimenti fatti fare a bambini (cfr. « Una lezione di Dienes », in PdM, 1974, n. 3, pag. 47-48). Sono cose molto belle, specie quelle piú semplici e significative. (A volte cerca di far intuire attraverso giochi alquanto complicati nozioni piú riposte, e ivi il discorso, a mio modesto avviso, diventa meno naturale e non so se il messaggio possa venir recepito in modo chiaro e quindi utile).

**12. - Gli esempi italiani: Castelnuovo e Checcucci (e « ... »)**

Del libro di Checcucci ho parlato in PdM (1974, n. 3, pp. 30-34): « Matematica e realtà: tre volumi di testo per la scuola media »; dell'insegnamento di Emma Castelnuovo ho potuto apprezzare e ammirare l'efficacia attraverso un'esperienza diretta (in un anno in cui l'ebbe come insegnante, la matematica per mia figlia divenne altra cosa) e io stesso leggendo poi il suo testo fui colpito da come era possibile fare della matematica una cosa interessante e istruttiva per i ragazzini. (La cosa mi interessava particolarmente perché un tentativo analogo avevo fatto io stesso, con *Matematica logico-intuitiva*, nei riguardi delle « matricole » di Economia e Commercio).

Di entrambi i testi, per conto mio, non posso dire che bene, augurando che gli insegnanti intelligenti li adottino. Non sono in grado, beninteso, di giudicare circa la maggiore o minore difficoltà, sia da parte degli insegnanti che degli allievi, nel seguire e utilizzare quei libri un po' inconsueti (ma d'altronde è proprio l'essere inconsueti che li fa raccomandare, volendo evitare i soliti libri di testo... aridi e triti, pieni di definizioni teoremi dimostrazioni esercizi e daccapo e daccapo e spesso di sproloqui, spropositi, sciocchezze).

Quanto al « libro inesistente » che potrebbe tradurre in forma concreta dei « desiderata » che per ora sono soltanto tali nella mia mente, dovrebbe risultare assai simile ai due predetti come spirito, cercando in piú di realizzare una introduzione gradualmente sistematica e integrata di matematica e nozioni applicative da cui le astrazioni matematiche derivano.

Perciò la nozione astratta di numero verrebbe fin dall'inizio collegata all'immagine geometrica della retta (asse delle ascisse, e cosí le operazioni di somma e prodotto a traslazioni e omotetie), ed analogamente alle altre grandezze (massa, velocità, energia, prezzo, ecc.). Analogamente la geometria del piano (affine) verrebbe legata a vettori ecc. (e quella metrica all'introduzione di un « prodotto scalare »); cosí nello spazio a 3 dimensioni (ed $n$ qualunque: per problemi fisici (spazio delle fasi) e piú elementarmente per problemi economici [magazzino con $n$ merci], ecc.) tutto diviene semplice.

In particolare, la nozione di « *massa* » (o « *peso* ») dovrebbe venire fin dal primo momento inclusa nella geometria per introdurre subito, implicitamente, le « coordinate baricentriche », cominciando coll'interpretare sull'asse $x$ il punto di ascissa $x$ anche come « baricentro di una massa $x$ nel punto 1 e di una massa $1-x$ nel punto O origine (e poi in generale, nel piano, spazio, spazi a $n$ dimensioni: combinazioni lineari di forze, di funzioni, di operatori, ecc.). E cosí il « *tempo* », per *vedere* le cose in veste dinamica, ecc. ecc. Tutto ciò non per appesantire (come spesso si « usa » con astruserie, linguaggi ampollosi, e via dicendo), bensí per illustrare tutto in tutti i modi per renderlo facile, familiare, « ovvio », ma ricco di suggestione.

E fin dall'inizio, usando diagrammi di funzioni indicando come tali tutte le operazioni ecc. che si impiegano usualmente, si abitua mediante il disegno a capire l'andamento delle soluzioni di dati problemi, e viceversa, dato il disegno, a capire a quale tipo di problemi possa corrispondere.

A leggere queste indicazioni, può sembrare a prima vista che si tratti di cose astruse. Ma sono certo che, pensandoci senza preconcetti, un lettore non malevolo troverà che realmente « tutto diviene semplice » (e, soprattutto, *intuitivo:* ritengo, per dirla con una frase di Enriques che mi piace molto e ho spesso citata, che non è istruttiva una dimostrazione complicata che obbliga a crederla vera « obtorto collo » trovandone ineccepibili i passaggetti; lo è se « fa vedere — o almeno intravvedere — il « vero perché »).

Ma forse occorrerebbe, prima, svolgere secondo tali concetti dei corsi di aggiornamento (o di «ribaltamento»?) per insegnanti. Una traccia abbozzata un paio d'anni fa (e mai ancora seguita integralmente) viene riprodotta con qualche succinto cenno esplicativo come appendice del presente articolo.

Un tale insegnamento integrato sarebbe particolarmente adatto nella scuola media, dove fortunatamente l'insegnante di materie scientifiche è unico. Purtroppo, però, il progetto di un corso di laurea rispondente a tale esigenza è rimasto lettera morta. Montalenti, allora Preside della Facoltà di Scienze di Roma che per due volte aveva trasmesso al Ministero della Pubblica Istruzione la richiesta di istituire tale corso, commentò il reiterato rifiuto dicendo che « il progetto era troppo ben concepito perché potesse venir preso sul serio in Italia ».

# APPENDICE

## Premesse

Credo di aver sempre istintivamente concepito la matematica in senso « fusionista » anche prima di conoscere tale termine, come penso (e spero) appaia anche dai miei scritti (e in particolare, ad es., dal volume *Matematica logico-intuitiva)* [1] (1). Esemplificazioni fatte espressamente per illustrare gli intendimenti che vorrei fossero accolti e seguiti, si trovano (oltre che in cenni in vari articoli) in tre scritti in corso di pubblicazione [2]. Fra le pubblicazioni scolastiche esistenti (per quanto ritengo di poter dire, pur senza conoscerne nessuna in dettaglio), quella che sembra ispirarsi piú coerentemente a detta esigenza è il testo dello School Mathematics Project [3] (2).

(1) I richiami numerati, tra [ ], rinviano ai riferimenti bibliografici, alla fine dell'articolo (in genere, a scritti pubblicati nel PdM).

(3) Naturalmente, anche altri libri che ebbi modo di apprezzare e lodare (come quelli di Emma Castelnuovo e di Vittorio Checcucci) (cfr. PdM, 1974, n. 3, pp. 30-34) hanno caratteristiche analoghe; nello SMP sono però piú sistematiche e programmate. Perciò la menzione come esempio principe.

## Presentazione della presente traccia

Quella che verrà presentata qui di seguito è l'esposizione, in forma un po' più estesa, di uno schema presentato (nel marzo 1973) per un corso d'aggiornamento (per insegnanti di Scuola Media). Un corso impostato su tale linea ebbe effettivamente luogo, ma, mancando il tempo per quel lavoro preparatorio sistematico e approfondito che sarebbe stato necessario per un pieno affiatamento tra i vari docenti e collaboratori, non fu possibile se non in parte attenersi a tale concezione unitaria secondo tali direttive innovatrici.

Comunque, la decisione di pubblicare qui tale « Traccia » è legata all'argomento dell'articolo che precede e alle riflessioni cui mi ha portato la lettera — ivi ampiamente citata — del prof. Gilardi; riflessioni che finirono per convincermi — superando le riluttanze espresse poche settimane or sono in detto articolo — a dare un'idea concreta di ciò che intenderei per « impostazione fusionista ».

La riluttanza, che sopravvive pur avendo deciso di superarla, è dovuta al terrore che una semplice indicazione esemplificativa (quale è e vuol essere) potesse venir considerata come *una proposta,* magari « definitiva » [o, peggio, « definettiva » (3)].

In fondo, pubblicare la « Traccia » non è che un modo diverso d'insistere sulle raccomandazioni spesso ripetute — forse anche troppo — in forma generica e episodica circa il « modo d'insegnare »: raccomandazioni che può darsi lascino troppi margini di nebulosità per incoraggiare qualcuno a tradurle in qualcosa di preciso per metterle in pratica nel parlare ai suoi allievi.

E' un modo diverso, ma non troppo: si tratta sempre di indicazioni esemplificative intese a stimolare l'iniziativa di chiunque nel cercare qualcosa di analogo ma migliore: migliore per lo meno nel senso di curare l'adattamento a sue tendenze personali, a fattori ambientali, a temi di attualità generale

(3) Terrore del modo in cui possono nascere parole tipo « Papygrammi »!

o locale. Di « diverso » c'è solo il tentativo di dimostrare la possibilità di collegare organicamente tutta la creazione di concetti e metodi atti ad affrontare situazioni di ogni genere, con particolare riguardo agli aspetti « matematici ». E ciò evitando di presentarli pedantescamente, sofisticamente, iperastrattamente, iperlogicamente, ultrarigorosamente (e in definitiva ottusamente), come vuole un certo tipo di tradizione « scolastica », sia antiquata che « moderna », zelante nel nascondere ogni motivazione come cosa impura ed oscena. Il che non vuol dire che si debba o possa respingere o condannare o evitare il rigore logico o le concezioni astratte e magari sofisticate in quanto tali; forse, anzi, è spesso maggiore la necessità di rigore e sofisticazione che scaturisce da esigenze effettive, pratiche. Il guaio sta nell'imporre o lasciarsi imporre atteggiamenti o preconcetti di natura (direi) superstiziosa, che allignano, e sono duri a morire, anche nel campo della matematica.

La nostra « Traccia » è concepita in senso di « rottura » verso tali tipi di « tradizione » (e certo si potrà, forse inizialmente si dovrà, alquanto annacquarla; peccato, però!), e costituisce un tentativo d'inquadramento generale suscettibile come tale di venire impiegato a tutti i livelli. Può servire per dare semplici cenni elementari e informativi per bambini o per adulti, a scopo culturale e d'incentivo all'interesse, e può venir sviluppato per costituire l'avvio ad un apprendimento sistematico a qualunque livello, anche superiore. Ciò che piú conta (secondo il mio intendimento) è comunque la successione e connessione tra argomenti che non la specifica trattazione di ciascun argomento (che potrà essere sviluppata piú o meno ampiamente secondo i casi, salvo per i punti essenziali nei riguardi del collegamento con altri argomenti che servono comunque a tale effetto).

Un inquadramento di questo genere mi sembra essenziale soprattutto per la preparazione degli insegnanti, per i quali appare particolarmente inadeguata, anzi deleteria, la preparazione a compartimenti stagni: l'Algebra è l'Algebra, l'Aritmetica è l'Aritmetica, l'Analisi è l'Analisi, la Geometria è la Geometria (anzi no: o è la Geometriaeuclidea o è la Geometria-analitica, a seconda del tipo di scuola), e via di questo passo.

E... non parliamo delle applicazioni!... (4). Proprio al superamento di questa frammentazione nel campo matematico tende il Fusionismo, e al superamento dell'analoga frammentazione della Scienza in Materie tende l'Interdisciplinarità.

Due parole sulla forma della « Traccia » come qui pubblicata. La forma originale (1973) divideva la materia in 7 punti (o « tappe »), e, per ciascuna, le indicazioni (schematiche) di argomenti erano divise in due colonne: a sinistra gli aspetti geometrici e intuitivi (applicativi), a destra gli aspetti aritmetici e piú formali (con casuale ma indovinata analogia coi significati di « mano sinistra » e « mano destra » secondo Bruner: cfr. PdM, 1974, n. 1-2, p. 17).

Qui, la divisione in colonne è stata eliminata, sia per difficoltà tipografiche, e sia perché obbligava a condensare le indicazioni in forma schematica (e con abbreviazioni), insufficiente salvo come promemoria per chi sa già di che si tratta.

La divisione in punti (o « tappe ») è stata un po' rimaneggiata, per motivi analoghi, senza alterare sostanzialmente il disegno d'insieme ma completandolo alquanto con varie aggiunte.

La notevole sproporzione tra la brevità di alcune indicazioni e l'estensione di altre non corrisponde all'intenzione di far limitare o allargare le rispettive trattazioni nella scuola. Essa dipende invece dal ritenere superfluo dilungarsi in spiegazioni quando si tratta di argomenti già abituali, e necessario invece scendere a dettagli o addirittura ad esempi (e in particolare a riferimenti di carattere applicativo e interdisciplinare) quando si tratta di argomenti meno consueti e per i quali appaiono maggiormente profonde le esigenze di rinnovamento.

Si noti il puntuale inserimento di concetti e problemi attinenti a discipline diverse (quanto piú possibile diverse, tanto meglio) allo scopo di far apprezzare ogni concetto e procedimento, presentato contestualmente nelle piú varie accezioni

(4) C'è da meravigliarsi se l'inchiesta IEA (cfr. PdM, 1974, n. 3, pp. 35-40) ha trovato che gli studenti italiani « sanno tutto ma non a che serve »?

applicative in tutta la ricchezza della sua significatività. Sarà opportuno riconoscere, volta a volta, le nozioni ed esemplificazioni tratte da ciascun tipo di discipline: Algebra, Aritmetica, Analisi, Geometria, Fisica, Probabilità e Statistica, Economia, ecc.

Nel concludere queste premesse, mi sia permesso di richiamare l'attenzione su due brani di testi ufficiali (della C.I.I.M., Commissione Italiana per l'Insegnamento Matematico), riportati a pp. 3-5 del precedente fascicolo (e sui due pezzulli che seguono a pag. 46 ); essi appaiono in perfetta sintonia coi criteri seguiti nella presente « Traccia » (benché, naturalmente, potranno esservi mille altri modi di perseguire altrettanto seriamente e impegnatamente, o anche meglio, gli intendimenti ivi prospettati).

## Una proposta di Programma di Giovanni Prodi

Dopo che il presente articolo era già pronto, ebbi il piacere di apprendere dal collega Prodi (per chi non lo sapesse, Ordinario di Analisi nell'Università di Pisa) che egli aveva preparato (per il Biennio) un Programma ispirato ad intendimenti assai concordanti coi concetti qui esposti. E non solo, ma egli ha cercato, ed ha avuto la possibilità, di sperimentarlo personalmente, prestandosi a fungere da insegnante in un Biennio (di un Istituto privato). Egli ha potuto cosí verificare — sia pure, per ora, in modo parziale — la validità dell'impostazione prescelta, consistente nell'affrontare argomenti di particolare interesse e contenuto, congiuntamente concettuale e applicativo. In tal mondo i giovani acquistano il senso di cosa sia e di come e perché possa interessare e giovare la matematica se intesa come strumento per affrontare problemi reali e non come mero strumento di tortura, come arida congerie di astruserie non giustificate agli occhi dei discenti.

Esiste anche un testo dattiloscritto che riassume le lezioni finora svolte. Penso che, quando sarà completato e perfezionato con gli inevitabili ripensamenti, sarebbe assai utile venisse pubblicato.

## ECCO LA TRACCIA

### 1. - Logica; certezza e incertezza; rappresentazione geometrica

*Proposizioni*, o *Eventi*: in condizioni di *certezza* due alternative: VERO o FALSO, SUCCESSO o INSUCCESSO, SI' o NO, oppure (per schematizzazione che risulterà subito utile) 1 o 0; in condizioni d'*incertezza* (d'incompleta informazione, ecc.) tre risposte possibili: SI, NO, NON SO (cioè: evento *certo* o *impossibile* o *possibile* rispetto alle Tue conoscenze (5)).

Schematizzazione geometrica: rettangolo suddiviso in parti (mediante « *tagli* » o « *patate* », secondo convenienza visiva); cancellare (fare nere) le parti impossibili (inizialmente, se non evitate già nel disegno, e poi man mano che si suppongono acquisite informazioni).

Operazioni logiche su proposizioni (o Eventi) e corrispondenti immagini geometriche (Negazione, Prodotto logico e Somma logica, ossia Complementare, Intersezione, Unione) in forma sia Booleana che aritmetica [**4**].

In condizioni d'incertezza, finché non sai se una proposizione E (o « evento ») è vera o falsa (SI o NO), e dici NON SO, potrai esprimere il Tuo grado di fiducia nel fatto che sia vero mediante un valore intermedio fra 0 (certezza del NO) ed 1 (certezza del SI), P (E), detto probabilità di **E** (secondo la Tua opinione, e in base allo stato d'informazione che man mano si modifica). Significato (salvo precisazioni): dire che la probabilità che Tu attribuisci all'evento E è $p$, ad esempio $p = 0{,}62$, significa dire che il diritto a vincere 1 (p. es. 100 lire) se risulta che E è vero equivale, per Te, a ricevere $p$ (nell'es., 620 lire) certamente.

Analogia: una massa $p$ nel punto $x = 1$ e una massa $1 - p$ nel punto $x = 0$ (origine) equivale alla massa 1 nel baricentro, $x = p$. Esperimentare con bilancia (v. figura);

così si introducono le coordinate baricentriche e il calcolo

(5) Secondo un utile uso (introdotto da L. J. Savage), invece di alludere a «un tale » si dice Tu (per immedesimare l'ascoltatore nella situazione). (Su L. J. Savage, v. cenni in PdM, 1972, n. 1-2, pp. 63-65).

baricentrico [5];

mostrando le suddivisioni (sul regolo della bilancia) in 10 parti uguali, poi 100, 1000, ecc., indicabili con 1, 2; 3 ecc. cifre decimali, si vede che i numeri decimali illimitati misurano con precisione ogni lunghezza (o, analogamente, altra grandezza), in particolare ogni probabilità. (La scelta di 10 come base è indifferente; la conclusione vale sempre; altra base usata — specie per il calcolo elettronico — è 2: numerazione binaria, con due sole cifre, 0 e 1 [6]). I numeri (quali ora introdotti) si dicono « numeri reali ».

La valutazione delle probabilità è vincolata da condizioni di coerenza: ad es., se E' ed E'' sono eventi incompatibili (cioè: è impossibile che si verifichino entrambi: uno esclude l'altro), le probabilità dell'evento $E=E'+E''$ (che si verifichi uno dei due, non importa quale) dev'essere valutata in modo che $P(E)=P(E')+P(E'')$. (Se non segui questa norma, Ti metti in condizione di perdere certamente se uno scommette contro di te accorgendosi dell'errore e approfittandone). Su considerazioni del medesimo genere si costruisce tutto il calcolo delle probabilità.

## 2. - Insiemi e insiemistica

*Insiemi* (o classi, aggregati, ecc.): raggruppamenti arbitrari di *elementi* qualsiasi (oggetti, persone, numeri, punti, ecc., ecc.).

Con $x \varepsilon A$ si indica la proposizione « l'elemento $x$ *appartiene* all'insieme A ». E' ovvio pertanto che le operazioni logiche sulle proposizioni si trasferiscono anche agli insiemi (Complementare, Intersezione, Unione, come già accennato per figure geometriche; Oss.: opportunità « complemento » risp. a fissato ambiente).

Corrispondenze tra insiemi, in particolare biunivoche.

Numero di elementi di un insieme: intero (finito), o infinito (cenno: numerabile, continuo, esistenza maggiori) [7].

Prodotto cartesiano di insiemi (coppie $a_i b_k$ di elementi di A e B).

Somma e prodotto (per interi positivi) da interpretazioni insiemistiche (unione di insiemi disgiunti, prodotto cartesiano).

### 3. - Numeri (reali) e grandezze

Il metodo (meccanico: bilancia) usato per indicare i numeri tra 0 ed 1 come ascisse sull'intervallo (0,1) si estende a tutti i numeri (ascisse di tutti i punti della retta). Il punto di ascissa $x$ è sempre il baricentro di masse $x$ nel punto 1 ed $1-x$ nel punto 0; cambia solo che in tal caso o $x$ od $1-x$ è negativo (basta pensare a una carrucola con cui il peso della massa « negativa » $x$ oppure $1-x$ agisce verso l'alto).

Altri metodi: pensare di possedere un regolo rigido per trasportare le distanze *parallelamente* (e *solo* allora), oppure di poter immergere la retta in un piano affine (cfr. n. 7), ottenendo lo stesso risultato graficamente.

In ogni caso risultano cosí definiti i *vettori* sulla retta, e quindi

le *traslazioni* $(P'=\mathbf{u}+P)$

e le *omotetie* $(P'=C+m(P-C)=mP+(1-m)C)$, ecc.

Nel caso di grandezze, il prodotto ha spesso un significato diretto (ad es.: forza x spostamento = lavoro; 10 kg x 2 metri = 20 kilogrammetri) specie disponendo di sistemi metrici coerenti [8].

### 4. - Aritmetica; numeri interi

Per i calcoli numerici, occorre partire dal caso semplice dei numeri interi.

Dati due insiemi disgiunti, con risp. $n$ ed $m$ elementi, $n+m$ ed $nm$ sono il numero di elementi della loro unione e del loro prodotto cartesiano (numero delle coppie). Coppie $(n, m)$ di uguale: somma, $n+m-1$ su rette; *prodotto*, (secondo il numero di divisori di $nm$) su iperboli equilatere; *rapporto*, infiniti su retta per O.

Operazioni consuete. La divisione di due interi dà un numero periodico, e viceversa; tali numeri si dicono « razionali » [9] (e sono solo un'infinità numerabile); tutti gli altri (un'infinità continua, come tutti i numeri) si dicono « irrazionali » (probabile reminiscenza dello sgomento dei pitagorici per la smentita — con la scoperta che $\sqrt{2}$ è « irrazionale » — della convinzione che tutti i numeri fossero « razionali ». La male.

Divisibilità: se la retta per O ed $(m, n)$ ha un punto $(1, y)$ ($y$ intero) sulla verticale $x=1$, $n$ è divisibile per $m$ (infatti, comunque, è $n=my$); se tale retta ha comunque altri punti interi piú vicini all'origine, e sia $(x, y)$ il piú vicino, $m/x=n/y$ è il m.c.d. di $m$ ed $n$. Cosette del genere sono utili come aiuto a « vedere » le cose. Esempi di rappresentazioni o procedimenti istruttivi e gradevoli (in un campo spesso reso pesante) sono raccomandabili: [10], [11].

Induzione matematica completa: suo uso (spesso elegante!) per dimostrare risultati validi per ogni intero $n$. Esempi: credenza è caduta; la parola rimane; un po' buffa, ma poco $1+2+...+n= \frac{1}{2}\, n(n+1)$; $n$ rette tagliano il piano in (?) parti; id. piani che tagliano lo spazio;...

## 5. - Aritmetica: numeri reali

In genere i numeri reali sono noti solo con un numero finito di cifre decimali (salvo siano definite con leggi semplici), il che significa che sono noti a meno di un errore (secondo le convenzioni di arrotondamento; in genere non piú di 1 in piú o in meno sull'ultima cifra indicata). In tal caso in ogni calcolo si ha un risultato per eccesso e uno per difetto se si tiene conto di tutti gli errori risp. nel modo che influiscano in eccesso o in difetto sul risultato. Il metodo è troppo prudenziale se si ammette che gli errori siano casualmente arrotondamenti tutti per eccesso o tutti per difetto; in tal caso è da attendersi che (parzialmente) si « compensino » tra « in piú » e « in meno ». In ipotesi di tal genere, l'errore risultante dal sovrapporsi di $n$ errori di uguale ordine di grandezza non è quello unitario moltiplicato per $n$, bensí solo per $\sqrt{n}$ (cfr. n. 13).

## 6. - Proporzionalità diretta e inversa

Molti esercizi di aritmetica riguardano problemi di proporzionalità diretta od inversa. Sono meno noiosi e piú istruttivi collegandoli a rappresentazioni grafiche già viste (per interi; ora da estendere a tutti i numeri, in modo da usarle come primi esempi di *funzioni*).

Tra due numeri, o grandezze, qualsiansi, $x$ e $y$, la proporzionalità diretta significa $y=kx$ e quella inversa $y=k/x$ (ovvero: $y/x$=costante ($k$), risp. $xy$=costante ($k$). La prima equazione dà una retta (per l'origine), la seconda un'iperbole equilatera (che ha gli assi cartesiani come asintoti: rette cui si avvicina sempre piú).

Attenzione: sono due casi importanti, ma troppo spesso s'ingenera l'idea che ogni dipendenza funzionale sia una proporzionalità (diretta o inversa)! Ma vi sono esempi istruttivi, ad es. quello del problema delle scorte nel caso piú semplice. Abbiamo un consumo giornaliero $c$ di una merce, per la quale il prezzo d'acquisto è $p$, il prezzo giornaliero di conservazione in magazzino è $q$ (sempre per quantità unitaria) ed ogni operazione d'acquisto (quale che sia la quantità) comporta inoltre una spesa fissa $k$. Ogni quanto tempo conviene fare gli approvvigionamenti? Scegliendo un tempo $t$, ogni acquisto riguarda una quantità $ta$ con una spesa $tac$ piú la spesa *fissa* $k$; il magazzinaggio di una quantità (in media, fra $ta$ e 0) $\frac{1}{2}ta$ per tempo $t$ costa $\frac{1}{2}t^2aq$; in totale la spesa è $tac+k+\frac{1}{2}t^2aq$, e, dividendo per $t$, si ha la spesa per unità di tempo: $ac+k/t+$ $+\frac{1}{2}taq$ (un termine costante, uno direttamente e un altro inversamente proporzionale al tempo $t$). La soluzione piú vantaggiosa si ha [12] quando i due ultimi termini (incidenza per unità di tempo della spesa fissa $k$ e del magazzinaggio $q$) si rendono uguali.

E' agevole provarlo anche geometricamente per la proprietà dell'iperbole equilatera $y=k/x$: la tangente in un suo punto $(x, y)$ è la retta per $(0, 2y)$ e $(2x, 0)$, ossia la diagonale del rettangolo con due lati sugli assi e il centro in $(x, y)$.

## 7. - Geometria affine; piano affine

Proprietà affini: rette, parallelismo, confrontabilità di segmenti paralleli (ma non ortogonalità, confrontabilità di segmenti non paralleli) ecc.

Piano affine: piano vettoriale senza metrica. Presi tre punti arbitrari O, U, V risp. come origine e punto unità dell'asse $x$ e dell'asse $y$, tutto va come usualmente salvo che non ha senso (o comunque non sappiamo che ne abbia) chiedersi se gli assi sono ortogonali o no e se i segmenti OU e OV siano uguali o no (come lunghezza).

Convenzione ragionevole in particolare se $x$ ed $y$ sono grandezze di diversa natura (p. es. il tempo e un prezzo) o i punti O, U, V rappresentano zucchero, latte e cacao, quali componenti della cioccolata (come in un problema di « programmazione lineare » svolto da Emma Castelnuovo coi suoi allievi [5]).

Altra esemplificazione (economica): una contabilità di magazzino (in molte merci) oppure una contabilità in molte monete diverse, dove entrate uscite e saldi iniziale e finale sono vettori (nel piano, in due dimensioni, ma in pratica le dimensioni sono decine o centinaia o migliaia).

Venendo all'aspetto geometrico, tutto ciò che postuliamo è: data una retta $r$ e un punto A, sappiamo tracciare la parallela ad $r$ passante per A, sia $r'$. Analogamente tracciamo la parallela per A ad altra retta $s$ (non parallela ad $r$), sia $s'$. Abbiamo un parallelogrammo. Con tale costruzione possiamo trasportare ovunque un vettore (lati opposti di un parallelogrammo, presi in senso concorde, rappresentano il medesimo vettore, e hanno « uguale lunghezza »). Prese le due diagonali, esse s'intersecano nel punto mediano... per trasporto parallelo come indicato si vede che è possibile confrontare le lunghezze di segmenti paralleli (ma non in altri casi).

Questa situazione è effettivamente quella realistica in molti casi di problemi *lineari* (come negli esempi economici, ecc.) ma non metrici (ed è bene tenerlo presente per evitare errori o almeno affermazioni prive di senso).

Importante: notare che l'uso di coordinate baricentriche, di per sé, è semplicemente *affine* (come tale, a meno, cioè, di non introdurvi una metrica compatibile ma non richiesta se non eventualmente per motivi d'altra natura).

Il metodo affine di trasporto parallelo di una distanza (cfr. n. 3) si può interpretare ora come segue: dato il segmento $A_0A_1$ su una retta $r$, si prenda una parallela $r'$ e si costruisca una linea a zigzag tra le due parallele, lati a due a due paralleli, e in modo che il primo zigzag congiunga $A_0$ con

$A_1$. Tutti i punti successivi $A_2$, $A_3$,... sono equidistanti. Volendo dimezzare le distanze basta incrociare un zigzag con altra diagonale, e cosí si può proseguire dividendole in quarti, ottavi, ecc. ecc.

### 8. - Geometria metrica; operazioni, gruppi; funzioni

Molti argomenti, ma ben noti; bastano pochi cenni per sottolineare qualche aspetto su cui giova insistere.

Partire da trasformazioni affini (vederne gruppi, ecc.) nel piano e vedere come vi venga introdotta una *metrica* (prodotto scalare, modulo, ortogonalità, angoli...) scegliendo la trasformazione $i$ tra quelle il cui quadrato è $-1$ (cambiamento di segno, ossia di « verso », dei vettori). Per il modulo della somma di due vettori (e idem per $n$) si ha subito la formula di Carnot (e in partic. di Pitagora).

In particolare il gruppo delle similitudini (omotetie x rotazioni), esprimibili anche come $a+ib$ (omotetia+omotetia x rotazione ad angolo retto), introduce direttamente e significativamente nel campo complesso [13].

Nel piano cartesiano $(x, y)$ si visualizzano con grafici le funzioni $y=f(x)$, nonché le proprietà che le definiscono o di cui, comunque, godono in particolare, sotto la forma di equazioni funzionali [14]. Importante familiarizzarsi in tal modo con le principali, curando anche l'esattezza *concettuale* del disegno (ad es.: andamento in prossimità di radici multiple). Funzione inversa (ribaltamento del grafico intorno alla bisettrice $y=x$), proprietà (visualizzabili) di somme, prodotti, ecc. di funzioni (ad es. per massimi e minimi) [15]. Funzioni di funzioni (costruz. grafica, ecc.).

### 9. - Topologia; calcolo differenziale

Nozioni topologiche in forma intuitiva e analisi critica dei modi d'introduzione rigorosa (« intorni », « aperti », « chiusura »,...) in generale. In particolare, per funzioni di una variabile (cenni piú variabili, ecc.) *continuità* (semplice, uniforme, assoluta); *limite* o meglio: insieme-limite, o almeno minlim e maxlim, lim come caso particolare se minlim=maxlim (tale coincidenza, frequente tra le funzioni abituali, è un fatto eccezionale se si parte dal pensare a funzioni « qualunque »).

Analogamente, per *tangente* (alla curva), e quindi per *derivata,* meglio considerare la minima e massima derivata a sinistra e a destra (in caso di coincidenza si avrà una derivata sinistra e una destra, e se ancora coincidono una derivata tout-court). Si tratta di confrontare la curva $y=f(x)$ con le rette $y=f(x_0)+m(x-x_0)$, separando quelle che, in un intorno a sinistra (risp. a destra) di $x_0$ stanno sotto, o sopra, o sono sempre intersecate, dalla curva in oggetto $y=f(x)$. (Ciò vale anche nel caso di $f(x)$ qualunque, tanto discontinua e irregolare da non potersi neppur parlare propriamente del diagramma come « curva »).

Analogamente si può procedere per le derivate successive (in particolare per concavità o convessità $y''$, confronto con parabole tangenti) e per la curvatura (confronto con cerchi tangenti: notare però che tale nozione non ha senso se $x$ e $y$ sono grandezze diverse (ad es. tempo e lunghezza, temperatura e pressione, ecc.)).

Sottolineare l'importanza di non dare senso a grandezze o nozioni o proprietà non insite nel fenomeno che s'intende studiare ma introdottesi parassitariamente per esigenze di rappresentazione analitica o geometrica!

## 10. - Leggi differenziali (deterministiche)

A prescindere dai cenni precedenti (opportuni soltanto come premesse critiche), l'introduzione delle nozioni di derivata e integrale dovrebbe essere contestuale alla presentazione del problema del funzionamento di leggi deterministiche da cui dipenda tutto il futuro grazie alla loro azione istante per istante (6).

---

(6) Non a caso in un programma ministeriale « Equazioni differenziali » precede i cenni sulle nozioni di derivata ecc. (anche se questa preferenza per l'ordine logico-motivazionale su quello scolastico-nozionistico viene spesso ritenuta frutto di una svista).

Esempi di equazioni differenziali del 1° ordine (traducibili graficamente in un campo di direzioni: nel punto $(x, y)$ freccetta in direzione corrispondente ad $y'=f(x, y)$, linee integrali quelle che in ogni punto hanno la direzione della freccetta). Da un esame del genere si possono ricavare a vista le proprietà delle linee integrali corrispondenti a particolarità dell'equazione differenziale.

Altri esempi per problemi del 2° ordine (in particolare per caduta gravi, moto pianeti).

## 11. - Funzioni di piú variabili

Almeno cenni descrittivi su nozioni analoghe in piú dimensioni:

— superficie $z=f(x, y)$, piano tangente (appross. 1° ordine) e paraboloide (id. 2° ordine; curvature: punti ellittici, parabolici, iperbolici, secondo intersezioni col piano tangente);

— funzioni (p. es., potenziale) $u=f(x, y, z)$, e gradiente (vettore **f**), significato (almeno intuitivo) di grad, div, rot in nesso a campo conservativo, solenoidale, irrotazionale.

Introduzione di $f(x, y)=\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (e id. piú dim.) e proprietà caratteristiche di tale funzione (per successive considerazioni in Probabilità e Statistica).

## 12. - Distribuzioni (statistiche)

Se, di una certa popolazione, o di un gruppo qualunque di persone, abbiamo rilevato certe caratteristiche (per esempio: età, statura, peso, numero dei figli, reddito, ecc.), conoscerne la *distribuzione* (ad es. per statura), significa sapere quanti tra essi (o, piú spesso, in quale percentuale o « frequenza ») hanno statura di... (per intervalli, usualmente, di cm in cm), ossia (equivalentemente) quale sia il numero (o la percentuale) di individui di statura inferiore ad ogni dato valore. Oltre a questa conoscenza completa, interessa in genere (e ancor piú) averne un'idea mediante dati sintetici, riassuntivi. Per cominciare dai piú semplici, la media aritmetica dà un'idea dell'ordine di grandezza, e lo scarto quadratico medio dà un'idea di quanto nella distribuzione ci si scosti dalla media (in piú o in meno).

Interpretazione meccanica: baricentro e giratore (momento d'inerzia); rammentare (o dim. qui): momento d'inerzia minimo se ci si riferisce al baricentro.

Concetto di « media » in generale (secondo Chisini); proprietà ed impiego delle medie piú notevoli; in particolare: medie associative, teorema di Nagumo-Kolmogorov [16].

Mediana, Valori di posizione (Quartili, Decili, ecc.).

Rappresentazioni grafiche (funzione densità e funzione di ripartizione); significato ivi di medie ecc.

## 13. - Distribuzioni di probabilità

Stesse cose, se al posto di frequenze si parla di probabilità.

Se X è un numero aleatorio (nel discreto): valori possibili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilità rispettive $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la media ponderata $P(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$ è la *previsione* di X: ossia il prezzo (« equo », secondo la valutazione di probabilità supposta) per un guadagno aleatorio X (quale descritto). $P(X-m)^2$ (con $m=P(X)$) è la *varianza* $\sigma^2(X)$, e la sua radice, $\sigma(X)$ si dice *scarto standard* (o scarto quadratico medio). Conoscendo $m$ e $\sigma$ si ha già un'indicazione sufficiente per certi scopi. In particolare disuguaglianze (prob. $< 1/t^2$ di cadere fuori dell'intervallo $m \pm t\sigma$: disuguaglianza di Bienaymé-Cebysev) e per conclusioni tipo « leggi dei grandi numeri ».

Se $Y_n$ è la somma di $n$ numeri aleatori $X_1,\ldots,X_n$ (per semplicità di scrittura supponiamoli a previsione nulla: è un innocuo cambiamento di origine), e gli $X_h$ sono *non correlati*, o in particolare *stocasticamente indipendenti*, è $\sigma^2(Y_n)=\sigma^2(X_1)+\ldots$ $\ldots+\sigma^2(X_n)$; se gli $X_n$ hanno tutti il medesimo, $\sigma$, indichiamolo $\sigma_x$, si ha $\sigma_y^2=n\sigma_x^2$, $\sigma_n=\sqrt{n}\sigma_y$. (Per brevità omettiamo le definizioni, che si trovano in ogni trattazione di probabilità e statistica). Come « succo » sotto certe condizioni (dette sia pur senza spiegazione) il grado d'incertezza su una somma cresce meno che proporzionalmente ad n; se prendiamo la media, $Y_n/n$, tale grado diminuisce (ordine di grandezza $1/\sqrt{n}$); prendendo $Y_n/\sqrt{n}$ esso è costante.

Sotto condizioni un po' piú restrittive anche la forma della distribuzione tende a diventare *stabile*, e perciò essa deve essere *stabile* nel senso tecnico del termine, cioè tale che si conserva facendo somme di addendi (stocasticamente indipendenti) che la seguono. Ammettendo queste considerazioni sommarie, bastano intuitive proprietà di natura geometrica per concludere che non può trattarsi che della nota « distribuzione normale » (o « gaussiana », o « curva degli errori »), con densità $f(x)=K\exp(-\frac{1}{2}x^2)$. Ma anche varie altre distribuzioni praticamente e concettualmente importanti vanno studiate.

## 14. - Esempi e applicazioni

Problemi classici (Testa e Croce, Dadi, Roulette) possono dare anche spunti interessanti nuovi. Ad es., varie circostanze (rovina di un giocatore, ritorno all'equilibrio, sequenze di Testa, ecc.) vengono illuminate pensando alla successione di colpi come a una « passeggiata a caso » in un reticolo di strade. Utile anche il nesso col calcolo combinatorio (ad es., nel caso di Testa e Croce, le probabilità di 0, 1, 2, ..., $n$ Teste su $n$ colpi sono i coefficienti binominali (riga $n$-esima del « Triangolo di Tartaglia ») divisi per la loro somma (che è $2^n$: lo sviluppo è $(1+1)^n$).

Piú istruttivi i problemi con significato economico (Teoria delle decisioni). Un esempio: (Problema del giornalaio) che deve decidere quante copie di un giornale acquistare (al prezzo $a$) essendo $v$ il prezzo di vendita (le copie invendute sono sua perdita). La risposta è semplice seguendo un ragionamento « marginalistico » (il che è utile, perché ciò è il fondamento di ogni problema economico di equilibrio, di scelta appropriata). Egli deve comprare $n$ copie se egli ritiene superiore al rapporto $a/v$ (prezzo d'acquisto rispetto a prezzo di vendita) la probabilità di vendere almeno $n$ copie, ma non quella di venderne almeno $n+1$ [17].

Questo e altri problemi diventano piú complessi (e interessanti) se si considera la possibilità di chiedere (a un certo costo) informazioni; la procedura assume allora la forma di albero [18] o diagramma di flusso [19].

Analoghe situazioni (ma con la complicazione della contrapposizione di interessi) nella Teoria dei giochi (per cui l'opera fondamentale è stata *Theory of Games and Economic Behavior* di J. von Neumann e O. Morgenstern).

## 15. - La valutazione delle probabilità

Salvo casi schematici (Testa e Croce? ma, anche lí, siamo proprio certi che la moneta sia « perfetta », ecc. ecc.?) la valutazione delle probabilità varia anche notevolmente da persona a persona. Come conoscere l'opinione soggettiva di un individuo circa la probabilità di un dato evento? Ad esempio, dei tre risultati (1, X, 2, cioè vittoria, pareggio o sconfitta della squadra ospitante) per una data partita di calcio? Si può chiedere d'indicare tre numeri, per es. 50-30-20, o 30-40-30, ecc. (come indicato anche su parecchi quotidiani), ma quale incentivo occorre per responsabilizzare, persuadere a riflettere a stabilire ed esprimere l'opinione effettivamente coscientemente formata?

Occorre un sistema di penalizzazioni che « punisca » (secondo il suo giudizio) chi dà una risposta diversa da quella che interpreta fedelmente la sua opinione. Anche qui soccorrono le coordinate baricentriche: in un triangolo equilatero, i cui vertici simboleggiano i tre risultati (1, X, 2), indichiamo il pronostico (ad es.) 50-30-20 col baricentro dei tre vertici coi pesi rispettivi (50%, 30%, 20%); come penalizzazione si prenda poi il quadrato della distanza tra tale punto e il vertice del risultato effettivo. La previsione di penalizzazione è il momento d'inerzia delle tre masse rispetto al punto indicato, che è *minimo* scegliendo come tale punto il baricentro [20].

Il metodo è effettivamente seguito, con risultati interessanti (anche in altri campi: meteorologia, previsioni economiche, ecc.).

# Proposta di programma di matematica per il biennio

(secondo indicazioni di G. Prodi)

Le indicazioni in *grassetto* riguardano i *Campi di problemi* utilizzati per introdurre l'argomento e attirarvi l'interesse. Quelle in *tondo* (colonna a sinistra) e quelle in *corsivo* (colonna a destra) precisano rispettivamente gli *Elementi di teoria* essenziali e quelli costituenti *Obiettivi collaterali.*

**Elementi di Calcolo delle probabilità. Problemi elementari di carattere geometrico, combinatorio, ecc.**

Introduzione alla nozione di probabilità. Eventi disgiunti. Esperimenti indipendenti. Frequenze; valori medi. Prove ripetute e numeri di Pascal. Impiego dei grafi.

*Ripetizione delle frazioni: equivalenza, addizione, moltiplicazione. Nomenclatura insiemistica; prodotto cartesiano.*

**Questioni elementari di aritmetica**

Numeri razionali relativi; proprietà delle operazioni. Espressioni, sviluppo e fattorizzazione. Prodotti notevoli. Struttura di ordine.

*Relazioni in un insieme. Applicazioni fra insiemi.*

**Questioni elementari di ottimizzazione**

Equazioni e disequazioni. Calcoli approssimati. Introduzione intuitiva dei numeri reali.

Distanza. Rette; incidenza e parallelismo. Ordine sulla retta. Semipiani.

*Relazioni di equivalenza.*

**Problemi di minimo cammino**

| | |
|---|---|
| Simmetria assiale. Simmetria centrale. Rapporti di proiezione. Teorema di Pitagora. | *Coseno e seno (di angoli convessi)* |

**Calcoli elementari di astronomia (distanze, periodi)**

Assi cartesiani; rette, cerchi, sistemi lineari..

Disequazioni nel piano.

**Altre questioni di aritmetica**

| | |
|---|---|
| Elementi di aritmetica: massimo comun divisore, algoritmo di Euclide. Classi di resti.<br>I polinomi; divisibilità.<br>I numeri complessi. | *Numeri primi* |

**Trasformazioni; nozione di Gruppo**

| | |
|---|---|
| Le isometrie, le similitudini. | *Nozione di gruppo e di omomorfismo* |

**Dinamica di una popolazione**

Potenze con esponente intero, negativo, razionale.

La funzione esponenziale. I logaritmi.

**Probabilità « geometrica »**

L'area (come misura). Equivalenza di figure.

# Ancora una proposta

(secondo indicazioni di Lina Mancini-Proia)

*Aggiungiamo il testo di un'altra proposta di programma di cui abbiamo avuto conoscenza dopo che il testo del presente fascicolo era composto (N.d.D.).*

Aggiungiamo il testo di un'altra proposta di programma di cui abbiamo avuto conoscenza dopo che il testo del presente fascicolo era composto (N.d.D.).

*Proposta di sviluppo dei contenuti per l'insegnamento della matematica nel biennio in vista degli obiettivi da raggiungere* (quali riportati nell'articolo sulla CIIM (*))

Questa proposta è stata verificata positivamente nel Liceo Virgilio di Roma, sez. sperimentale, dalla prof.ssa Lina Mancini Proia nel corso degli ultimi cinque anni scolastici. (Quattro ore settimanali).

**I anno**

Presentazione intuitiva delle isometrie piane. In questo contesto si prende lo spunto per rivedere, precisare ed integrare le conoscenze che l'alunno dovrebbe avere delle proprietà geometriche fondamentali.

Gli insiemi numerici N, Z, Q. Si tratta di un'introduzione assiomatica, ma gli assiomi vengono stabiliti dall'esame comparato di questi insiemi e di quelli delle congruenze mod. n, a partire dalle congruenze mod. 12.

Introduzione intuitiva degli irrazionali.

Insiemi e relazioni.

---

(*) V. questo fascicolo, p.

Nozioni di logica delle proposizioni.

Le rotazioni dei poligoni regolari che riportano la figura su se stessa. Dal confronto della struttura di questi insiemi e di quella delle congruenze mod. n si giunge alla costruzione del concetto di struttura di gruppo.

Nozioni di calcolo letterale.

Nozioni di calcolo combinatorio. Definizione di probabilità e applicazioni alla genetica.

Grafici empirici. Rappresentazione per punti delle funzioni $y=ax$, $y=ax^2$, $xy=k$.

Costruzione delle isometrie a partire dalle simmetrie ortogonali. Traslazione e vettori. Rappresentazione analitica e matriciale dei vettori, loro somma. Proprietà dei parallelogrammi. Rotazione, proprietà angolari dei poligoni.

Accenno all'esistenza della geometria della sfera; il valore assiomatico di una scienza razionale.

**II anno**

L'anello dei polinomi. Il teorema di Ruffini e la divisione dei polinomi.

Le funzioni ed i loro grafici. Gli zeri di una funzione. Risoluzione dell'equazione di primo grado e dei sistemi di primo grado di due equazioni in due incognite.

Calcolo con i radicali.

La funzione $y=ax^2+bx+c$. Proprietà delle radici di una equazione di secondo grado.

Primo approccio alla funzione esponenziale e logaritmica.

Cerchio e circonferenza, angoli al centro ed alla circonferenza. Poligoni inscrittibili e circoscrittibili.

Costruzione del gruppo delle isometrie a partire dal prodotto di simmetrie ortogonali.

Omotetia e similitudine nel piano. Il gruppo delle similitudini.

Calcolo delle probabilità. Probabilità dell'unione di due eventi, probabilità dell'intersezione, probabilità condizionata e correlazione positiva e negativa. Formula di Bayes. Il problema delle prove ripetute. Definizione assiomatica di probabilità.

# Bibliografia

1. B. de FINETTI, *Matematica logico-intuitiva*, 3ª ed., Cremonese, Roma 1960.

2. B. de FINETTI, *Orientamenti scientifici*. « Un tentativo di fusionismo » e « Perché la Matematica? », in corso di stampa.

3. P. BARONE, « Pallanza: Corso Didattica SMP », *PdM*, 1973, n. 6, e (Relazione) « Corso di didattica SMP (1973) », *PdM*, 1974, n. 1-2.

4. A. DI CAMILLO, « The Mathematical Intelligencer », *PdM*, 1973, n. 3.

5. E. CASTELNUOVO, « Le applicazioni del calcolo baricentrico », *Le Scienze* (ediz. ital. di *Scientific American*), n. 18, febbraio 1970.

6. B.de FINETTI, *Il « saper vedere » in matematica*, ed. Loescher, Torino 1967.

7. M. LIPPI, « Insiemi finiti, insiemi infiniti », *PdM*, 1974, n. 1-2.

8. B.de FINETTI, « Contro la "matematica per deficienti" », *PdM*, 1974, n. 1-2.

9. F. SCARPINI, « Numeri periodici, serie geometrica », *PdM*, 1973, n. 5.

10. B. RIZZI, « L'albero e il traliccio degli interi », *PdM*, 1973, n. 5.

11. Vedere F. Scarpini, [9].

12. Vedere B.de FINETTI, [6], pp. 34-35.

13. B.de FINETTI, « Tre personaggi della matematica: i numeri *e*, *i*, $\pi$ », *Le Scienze* (ediz. ital. di *Scientific American*), n. 39, novembre 1971.

14. B. RIZZI, « Interpretazione di alcune equazioni funzionali », *PdM*, 1973, n. 4.

15. B.de FINETTI e F. MINISOLA, *La matematica per le applicazioni economiche*, ed. Cremonese, Roma 1961.

16. B.de FINETTI, « Oscar Chisini ed il suo insegnamento », *PdM*, 1966, n. 1-2. Per una trattazione più completa, vedere: B. de FINETTI, « Sul concetto di media », *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, A.II. (1930-31).

17. Vedere B.de FINETTI, [6] p. 54.

18. F. KARTESZI, « Grafi e didattica », *PdM*, 1974, n. 1-2.

19. E. CASTELNUOVO, D. e C. GORI-GIORGI, « Les graphes de flux dans l'enseignement sécondaire », *Educational Studies in Mathematics*, 1974, n. 5, pp. 467-492.

20. Vedere B.de FINETTI, [6], e, per una trattazione piú completa, B.de FINETTI e F. MINISOLA, [15].