Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze

È questo l'argomento della comunicazione che avevo proposto di presentare al Convegno di Frascati (Villa Falconieri, 8-10 ottobre 1964) sul tema generale « Les mathématiques à l'entrée de l'Université: situation réelle et situation désirable »; nonostante qualche ampliamento derivante dall'invito di trasformare detta comunicazione in relazione ufficiale per l'Italia sulla prima parte del tema generale (e cioè la preparazione *prima* dell'ingresso nell'Università), rimase invariato, sostanzialmente, il tema (e la tesi) centrale, nonchè il titolo (« In che senso e fino a qual punto è utile una differenziazione di programmi a seconda dei tipi di scuola e dei futuri studi degli allievi? »).

Piuttosto che cercar di ricostruire qui (sulla base di schematici appunti) il testo più o meno esatto di quel che dissi svolgendo tale relazione nel primo giorno del convegno, ritengo assai più utile cercar di dare una visione integrata degli apporti costruttivi e in gran parte convergenti sopravvenuti nell'esame dell'argomento anche in sede di altre relazioni, in sede di discussione su queste (mia ed altre) relazioni, e, per qualche aspetto, in scambi di idee personali.

Ho avuto infatti — con sommo piacere e sollievo — l'impressione sicura che quanto timidamente vagheggiavo temendo di essere troppo ardito e ottimista è invece realizzabile, e in parte addirittura in corso di realizzazione, in misura e forma anche più avanzate. Precisamente, come si vedrà dal seguito, considero che il programma già largamente attuato in Belgio da Papy per la scuola corrispondente alla nostra media (età 11-14) e quello delineato, per la Francia del 1975, da Revuz, per il proseguimento (Liceo e simili) secondo direttive perfettamente collimanti, costituiscono (per quanto ne è apparso dalle esposizioni di tali autori e dalle discussioni cui diedero luogo) un modello sostanzialmente definitivo dell'ideale da realizzare.

Riassunto della relazione.

La relazione (la mia) cominciava con un richiamo a considerazioni di ordine generale sviluppate altrove: in un articolo sulle *esigenze della cultura matematica dal punto di vista del profano* (in corso di stampa su « Scuola e Città », ed. La Nuova Italia, Firenze; numero speciale dedicato all'insegnamento della matematica), articolo che potrebb'essere considerato come premessa, se non addirittura come parte integrante, della relazione stessa. In succinto, la tesi è questa: se c'è, come purtroppo indubbiamente c'è, un atteggiamento d'incomprensione e d'ostilità quasi generale dei profani contro la matematica, la colpa è nostra, dei matematici, perchè non vogliamo o non cerchiamo o non sappiamo presentare la matematica in modo rispondente alle esigenze del profano. La miope e autolesionista visione specialistica ci induce a vantare come un pregio la possibilità di presentare la matematica come un campo reso autonomo e staccato da ogni nesso colle altre scienze grazie alla completa astrattizzazione, mentre sarebbe essenziale superare questa veduta ristretta e caricaturale affermando la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che dovrebb'essere la cultura. Al riguardo si vedano considerazioni dell'autore in B. de Finetti, « Remore e freni sul cammino della scienza », *Civiltà delle Macchine*, 1964, e, tra quelle di altri, il volume *Le due culture* di Snow (tr. it. Feltrinelli ed., 1964) con la prefazione scrittane da Geymonat, e una conferenza del chimico (premio Nobel) Calvin (tr. it. su *Informazione scientifica*, 1964). La situazione derivante da tale lacerazione della cultura, in umanistica contro scientifica, e poi perfino tra vari campi della scienza, dovrebbe essere più generalmente sentita come fonte di angosciosa preoccupazione.

Principalmente responsabile di tale lacerazione è la malintesa deleteria aspirazione al purismo, all'autonomia, alla specializzazione, all'isolamento. Per il profano, come per ogni altra persona normale, il pregio di ogni cosa deriva dalla sua collocazione, utile o necessaria, nel più vasto tessuto d'interessi e di conoscenze capace di attirarne l'attenzione, ed è questo lo aspetto della matematica che va sottolineato in primo luogo; l'eventuale ricorso all'astrattizzazione può esser giustificato solo se e quando, in un secondo momento, tale espediente tecnico si possa dimostrare apportatore di ulteriore utilità come economia e potenza di pensiero, come creatore di nuove facoltà di visione delle cose prima e più ancora che come strumento formale per dominarle. Per rendersi ben conto di come l'aspetto matematico e quello concreto, e in particolare fisico, di ogni nozione siano cose che si possono *distinguere* ma non *separare*, basta riflettere un po' anche sulle cose più semplici, sulla legge forza = massa × accelerazione, come è acutamente fatto rilevare (insieme a molte altre osservazioni attinenti al nostro argomento) nella recentissima conferenza di F. Tricomi su « I vicendevoli rapporti fra la matematica e la fisica, ieri e oggi » (Congresso S.I.P.S., Cagliari-Sassari, 1964).

Queste stesse esigenze, illustrate per riguardo al profano, sussistono anche nel caso opposto, e cioè per la preparazione dei futuri specialisti, ossia di coloro che in vario senso e misura avranno bisogno di sviluppare gli studi matematici e di utilizzare effettivamente la matematica nel corso della loro vita, ed in particolare — per rimanere nel tema del convegno — per entrare in Facoltà universitarie implicanti più o meno intensi corsi di matematica (Matematica, Fisica, Ingegneria, Statistica, Economia, Chimica, Scienze naturali, ecc.). È vero che in questi casi può essere opportuno arrivare all'Università con qualche maggiore conoscenza o addestramento in particolari campi o algoritmi matematici, e ciò si potrà ben fare, ed anche in modo più o meno differenziato secondo i tipi di scuole e secondo le scelte di futuri orientamenti professionali; però, seguendo i concetti espressi, la differenziazione non dovrebbe riguardare che l'aggiunta o il maggior sviluppo o l'approfondimento con maggiore insistenza di aspetti o teorie od applicazioni di più specifico interesse, ma soltanto in senso marginale, fermo restando il nucleo fondamentale comune. È importante infatti evitare che lo specialista diventi in modo troppo esclusivo specialista; in certo senso è necessario che si conservi un profano con in più una specializzazione, di modo che sia sempre possibile (o almeno non impossibile per di lui colpa) il colloquio col profano, con gli altri specialisti di specialità diversa, insomma col resto del mondo. Anche dal punto di vista strettamente professionale e scientifico è del resto sempre più frequente l'esigenza del lavoro in collaborazione tra esponenti di specializzazioni diverse per un intento comune, e magari per i fini di un profano (ad es. un dirigente di azienda) che deve avere in forma accessibile le conclusioni parziali dei diversi specialisti per poter prendere la decisione in base alla sintesi che soltanto lui può trarne in funzione di sue opinioni e vedute.

La risposta alla domanda costituente il titolo della relazione sarebbe quindi: programma sostanzialmente unico, salvo differenziazioni marginali. Oltre che per il programma, la stessa risposta va data anche per riguardo ai criteri e metodi d'insegnamento, e forse anzi in modo ancora più reciso, perchè l'incomprensione che potrebbe derivare da diversità del campo delle conoscenze è meno profonda di quella cui darebbe luogo una frattura tra i modi di vedere le stesse impostazioni di partenza.

Per dire quale sia il criterio unico da adottare e seguire rimane solo da precisare ed esemplificare i dettagli: dal già detto appare ben chiaro che, secondo le vedute qui sostenute, le nozioni matematiche vanno introdotte in nesso ad esigenze concrete applicative cui rispondono, e che le relative proprietà vanno basate su constatazioni intuitivamente accettabili del campo cui si riferiscono. Non è sufficiente però in genere, e soprattutto nell'iniziare la trattazione di un nuovo argomento, il consueto ricorso a qualche esempio scelto espressamente per giustificare o chiarire con qualche riferimento concreto le nozioni che si vogliono introdurre: il modo migliore consiste, a mio avviso, nel far comparire in modo incidentale le nozioni matematiche durante la trattazione di altri argomenti, considerando sufficientemente giustificabile e visibilmente economica agli occhi del discente la loro considerazione in astratto, come entità interpretabili in più campi e utilizzabili per più usi, soltanto dopo che ciò risulti da ripetuti incontri incidentali.

Come modello di tale procedimento è stato segnalato il felice inserimento, qua e là nei libri di testo di Emma Castelnuovo (*I numeri* e *Geometria intuitiva*), di osservazioni intese a segnalare incidentalmente certi fatti notevoli e ad informare che essi corrispondono a nozioni che i matematici chiamano funzione, gruppo, struttura, ecc. Dopo alcuni incontri con esempi di « gruppi » il discente sarà già implicitamente e intuitivamente in possesso del concetto di gruppo e capace di farne uso per le osservazioni più facili; quando il concetto gli sarà divenuto, per tale allenamento, familiare e interessante, potrà anche essere oggetto di studio di per sè, ma non prima. Lo studio sistematico, specie nella sua forma più perfetta consistente nella trattazione assiomatica, deve sopravvenire come *coronamento* di un processo di assimilazione e familiarizzazione già maturato almeno nel subcosciente, il quale non può essere violentato coll'intrusione di aridi congegni intellettualistici privi di appetibilità psicologica. Appetibilità che può derivare soltanto, o primariamente dalla diretta connessione con interessi pratici di qualsiasi genere, o mediatamente dalla connessione con concetti astratti della cui connessione con concetti già apparsi collegati al concreto ci si sia potuti adeguatamente e intimamente persuadere. A prescindere da tale motivazione didattica, pedagogica, ritengo poi che una trattazione che prendesse degli assiomi come punto di partenza sarebbe gratuita e manchevole anche dal punto di vista scientifico: d'accordo con l'affermazione fatta da Destouches e ripresa da Fréchet secondo la quale cominciare un libro dagli assiomi significa scrivere un'opera cui manca il primo volume (che occorrerebbe per giustificarli e spiegarli).

Per dare, a conclusione della relazione, qualche indicazione più specifica del modo in cui immaginerei che tali intendimenti generali dovrebbero tradursi in un programma e in un metodo per svolgerlo, accennai ad alcuni aspetti e argomenti che reputo preminenti al riguardo (pur sottolineando che non avevo studiato un programma e non presumevo che illustrando alcune idee potesse scaturirne un programma).

Il ruolo principale per una radicale semplificazione e revisione dello strumentario matematico e della visione, resa unitaria, di quasi tutti gli argomenti, spetta senza dubbio alla nozione di sistema (e spazio) lineare (affine) da introdursi immediatamente ed esclusivamente in ogni occasione; si vedano alcuni esempi in « Appendice » alla relazione « Insegnamento di materie scientifiche nella scuola media unica e preparazione degli insegnanti » (in questo *Periodico*, 1964, n. 1-2; particolarmente, voci *Tavolo, b; Baricentro, e; Ternario, diagramma; Omotetia*), che chiariscono come riterrei possibile introdurre intuitivamente, quasi come ovvie e tacite convenzioni, già per ragazzi di 11 anni e forse anche prima, le notazioni e le più elementari operazioni dell'algebra lineare per vettori (traslazioni, eventualmente forze, ecc.) e punti (punti-massa, o « formazioni geometriche di 1ª specie » secondo Grassmann-Peano). Il tutto, beninteso, in forma intrinseca (senza coordinate o sistemi di riferimento); solo successivamente (affinchè appaia come un particolare espediente, talvolta utile ma comunque inessenziale e da non erigersi a consuetudine sistematica) si può notare che i punti (e i vettori) di un piano, spazio, ecc., si possono rappresentare con coppie, terne, n-uple, di numeri reali (e sarà opportuno ricorrere ad esemplificazioni economiche, ecc. per avere facili intuitivi esempi con gran numero di dimensioni e tuttavia dotati di palese significato concreto e importanza pratica). Così e in molti altri modi si renderà evidente il valore fondamentale dell'intuizione geometrica (dello spazio affine, direttamente per 2 o 3 dimensioni, per analogia e grazie ad esempi d'altra natura, p. es. come detto economici, per n qualunque) come fondamento per la visione e rappresentazione matematica, insieme logica e intuitiva, di qualunque situazione e problema. Gli esempi non geometrici serviranno anche a mostrare come spesso soltanto gli aspetti affini abbiano senso, e giustificare così l'opportunità di ignorare fino a una fase successiva le nozioni metriche anche nell'interpretazione della geometria come veramente geometrica.

Tale fase, dell'introduzione della metrica (mediante il prodotto interno, preferibilmente tramite un concetto più intuitivo come quello di proiezione), apre subito nuovi orizzonti e fornisce con semplicità formidabili nuovi risultati (p. es., teoremi di Pitagora e di Cournot). La geometria di Euclide, tanto innaturale e pesante causa la mancata distinzione iniziale tra proprietà affini e metriche, può quindi venir lasciata in disparte.

Il piano cartesiano può venire impiegato per rappresentarvi mediante grafici l'andamento di fenomeni, ossia funzioni (p. es. temperatura di un ambiente o di un malato, crescita di una pianta, ecc.): importante cominciare da esempi non matematici per dare il concetto matematicamente corretto e generale di funzione, per rimarcare poi certi casi particolari ove la funzione si esprime aritmeticamente (p. es., $y = a/x$, linea su cui si trovano i vertici di tutti i rettangoli di area a costruiti dai ragazzi e appoggiati entro un angolo retto, come in uno degli « esperimenti » di Emma Castelnuovo). Si possono chiarire in generale i concetti di equazione (zeri di una funzione) massimi e minimi ecc. evitando il formarsi di concetti restrittivi difficilmente poi eliminabili (di equazioni come equazioni lineari, od algebriche, o comunque come necessariamente di forma « matematica »).

La nozione di convessità si presenta come fondamentale e naturale per introdurre in forma diretta ed intrinseca molti ulteriori concetti e problemi su insiemi, linee, funzioni; probabilmente dà anche la via più indovinata per la prima introduzione dei concetti dell'analisi.

Nel contempo, il piano (e lo spazio: conviene accennare sempre o quasi sempre al caso di 3 o più dimensioni anche mentre la trattazione si riferisce prevalentemente al caso piano; altrimenti si rischia, come accade per solito nella scuola, di far perdere il ricordo della terza dimensione!); il piano — dicevamo — può fornire ogni desiderabile esempio di trasformazioni su cui discutere ad es. proprietà di gruppi, sia come proprietà « fisiche » (movimenti rigidi, immagini speculari, ...), sia per condurre a scoprire (nelle similitudini) le proprietà che consentono di introdurre i numeri complessi e d'interpretarli (come punti, o vettori, o similitudini) sul piano complesso.

Ancor più diretta derivazione dalla nozione iniziale di sistema lineare è quella che conduce ad equazioni lineari, determinanti, ecc. (in forma intrinseca: ad es. determinante come prodotto alterno di vettori; solo come particolare espediente, indicando i vettori mediante le componenti in un dato sistema di riferimento, si introdurrebbe, volendo, la scrittura sotto forma di matrici ecc.).

Esemplificazioni dei criteri suesposti si possono trovare, nella misura in cui erano compatibili con la natura e scopo e destinatari di tali libri, in B. de Finetti, *Matematica logico-intuitiva* (per Fac. Econ. e Comm.) ed in B. de Finetti-F. Minisola, *La matematica per le applicazioni economiche* (per Ist. Tecn. Comm.), ed. Cremonese (risp. 1959 (3ª ed.) e 1961).

Come i pochi e sporadici cenni che precedono dovrebbero già far intravvedere, un programma e criterio ispirato a tali vedute dovrebbe rispondere a numerose esigenze che mi appaiono imperiose: — affrontare ogni problema con la massima generalità rispondente alla sua concretezza ma dando il massimo rilievo alle esemplificazioni istruttive sui casi più semplici; — impiegare sempre gli strumenti più naturali e potenti e meglio atti ad un impiego in molteplici applicazioni consentendo di unificarne la visione; — e quando non si tratta di unificazione almeno concatenare i diversi argomenti l'uno all'altro; — mostrare la funzione della matematica come strumento per approfondire e dominare lo studio — e, prima ancora, la *visione* — dei problemi concreti di ogni genere, nel modo più utile e concreto specie grazie alla creazione di *appropriati* concetti astratti; — per risultare *appropriati* essi devono essere astratti nel senso non di vuote creazioni nel vuoto ma di sintesi dell'aspetto comune che riesce utile isolare per ridurre a unità e semplicità di visione fatti apparentemente disparati.

Questa distinzione è importante, è essenziale: è la stessa che passa fra un cadavere e un uomo vivo benchè, in entrambi i casi, si possa dire che è *quasi* la stessa cosa.

Le relazioni Papy e Revuz.

Le relazioni presentate il secondo giorno da Papy (dell'Univ. di Bruxelles) ed il terzo da Revuz (dell'Univ. di Poitiers) concretano in un effettivo schema di programma degli intendimenti strettamente concordanti con quelli sopra elencati. Del resto, è già notevole il fatto che il programma delineato indipendentemente da Revuz per il livello liceale (età circa 14-18) appaia come naturale proseguimento di quello studiato e introdotto da Papy per il livello medio (circa 11-14 anni), e come concordanze notevoli sussistano con idee esposte in altre relazioni e in interventi nelle discussioni. Ciò vuol dire che le direttrici del rinnovamento sono un po' nella logica delle cose e nell'atmosfera che essa crea; tanto meglio se ciò significasse che stavo portando vasi a Samo, che la battaglia è già vinta in partenza e proseguirla sarebbe prendersela coi mulini a vento e prender lo slancio per sfondare una porta aperta. Ma è bene tuttavia che tutti coloro che « sentono » il problema perseverino nello sforzo nel modo più costruttivo e combattivo, sia perchè ogni realizzazione incontra ostacoli esterni (specie se i conservatori vi ravvisano inquietanti tracce d'intelligenza) e deve guardarsi anche all'interno da rischi di degenerazione, sia anche perchè restano sempre, tra gli stessi fautori di innovazioni, aspetti nuovi da studiare, alternative tra cui scegliere, disparità di vedute più o meno di dettaglio su cui discutere.

Riprenderemo in seguito delle questioni varie, sia generali che di dettaglio, aventi particolare attinenza con temi toccati nella precedente relazione, e con riferimento a discussioni svoltesi a Frascati. Per ora conviene limitarci a quelle concernenti direttamente i nessi con le due relazioni di Papy e Revuz.

Del programma di Papy occorre dire anzitutto che esso è già introdotto e sperimentato in Belgio su vasta scala, in migliaia di scuole, sotto la guida dello stesso Papy, personaggio eccezionalmente esuberante e dinamico, che si è meritato grande autorevolezza e fiducia non solo nel mondo scolastico ma anche in quello burocratico e politico. Il programma dei primi anni di corso ha già superato un vaglio probante; per il seguito qualche dettaglio sarà ulteriormente messo a punto. Mi limito a notizie vaghe, come le ricordo; chi ne desiderasse di più dettagliate e sicure dovrà attendere la pubblicazione della relazione.

Il programma dei primi due anni (età 11-13) comprende: Insiemi, relazioni; Interi; Gruppi; Geometria affine; Numeri reali (con forma binaria e decimale: la prima anche per giungere alla « continuità »); Vettori nel piano (sempre geometria affine).

Col terzo anno si ha l'introduzione delle nozioni metriche (partendo dalla simmetria assiale, e introducendo il prodotto scalare), pervenendo così a trattare nel modo più naturale ciò che in Euclide richiede metodi *non psicologici*. Poi si passa allo spazio (3 dimensioni), e al caso generale (spazi a n dimensioni) con esemplificazioni di natura varia (p. es. economica); sistemi di equazioni lineari.

Il programma di Revuz non è che un progetto; tuttavia esso è stato costruito e spiegato in base a una visione architettonica (spiritosamente illustrata alla lavagna con appropriati schizzi schematici), e ispirandosi al giusto principio che non si dovessero fornire nell'insegnamento trattazioni sconnesse e provvisorie inservibili allo stadio successivo, bensì elementi che vadano gradualmente e successivamente a delineare e completare la struttura unitaria di cui fanno parte. Accettato che tale struttura architettonica debba avere come basamento la teoria degli insiemi e delle relazioni, su cui poggiano i due pilastri, algebra e topologia, che sostengono « tutto il resto », e criticata la visione in cui questo « tutto il resto » viene sottovalutato (rappresentabile come un semplice frontone), presenta come adeguata la figura in cui « tutto il resto » occupa un grattacielo a molti piani, che i due robusti pilastri sostengono sollevato da terra.

particolare estremamente indovinato e divertente: Revuz non ha mancato di aggiungere in cima un camino dal quale scacciare « les mathématiques fumeuses ».

Il problema sta nel vedere come si possa costruire, nella mente dei giovani, nella fase d'insegnamento preuniversitario (Liceo), un corpo di conoscenze che costituisca non un mucchio di frammenti bensì una parte dell'edificio completo, già funzionale anche di per sè, e atta come punto di partenza per proseguire la costruzione in tappe future.

Il programma, come dicevo, s'innesta perfettamente su quello preliminare di Papy prendendo come base un forte sviluppo dell'algebra soprattutto come geometria interpretata vettorialmente ed un sufficiente benchè minimo puntello dal lato del pilastro topologia per trattare compiutamente il campo reale e complesso e l'S_n, giungendo alle nozioni fondamentali dell'analisi (in particolare alle varietà tangenti pensando all'approssimazione lineare). Anche Revuz non pretendeva indicare una soluzione univocamente fissata; su vari punti indicava alternative o dubbi, e in particolare sull'integrazione (quanto se ne dovrebbe dire e in quale forma).

Dal raffronto fra quanto detto nella mia relazione e il contenuto di questi programmi (e forse è meglio dire « del programma unitario che si ottiene saldandoli insieme »), risulta ovvio che io sottoscriverei a piene mani; naturalmente molte questioni di dettaglio non sono precisate o sono accennate di sfuggita da ambo le parti e potrebb'esserci molto da discutere al livello dell'effettiva attuazione, ma ciò è ovvio trattandosi per ora di questioni di massima su cui del resto ciascuno avrà da riflettere per scendere alla scelta di soluzioni di dettaglio.

Piuttosto importa soffermarsi ad esaminare se lo spirito informatore, i presupposti concettuali, i criteri didattici, appaiano effettivamente in armonia tra loro. Probabilmente, giudicando in base all'enfasi nel sottolineare i vari aspetti della questione, si concluderebbe che Papy (e forse Revuz) sono più di me propensi alla trattazione in forma assiomatica; da successivi chiarimenti sembra che la differenza non esista o sia piccola; comunque è importante cercar di puntualizzare la situazione indicando quali sembra possano essere le sfumature di diversità persistenti pur dopo la constatazione di una fondamentale concordanza. Posso cadere, del resto, in qualche errore di valutazione o d'interpretazione dovendo collegare reminiscenze staccate di vari interventi e di scambi di idee privati.

Alla mia affermazione, che l'assiomatizzazione deve sopravvenire come *coronamento* del processo di apprendimento, Papy obbiettò che essa deve invece essere *utilizzata* effettivamente; introducendola alla fine sarebbe « une lumière extérieure » priva di efficacia e interesse. Mi sono subito detto d'accordo: quella espressione andava al di là del mio pensiero; tenevo ad escludere d'introdurla troppo presto, ossia prima di avere una buona conoscenza intuitiva dell'argomento che permetta di giudicare dell'appropriatezza e del ruolo degli assiomi e dei concetti astrattizzati che ne derivano, e avevo omesso di dire che, giunti a questo punto, un ulteriore indugio diminuisce effettivamente l'utilità del passaggio a una trattazione assiomatica. Può darsi, ciononostante, che l'apprezzamento del « momento ottimo » sia un po' diversa (Papy lo veda anticipato rispetto al mio), ma, se il concetto è il medesimo, non c'è ragione di contendere, trattandosi di decisione che spetta all'esperienza didattica e psicologica e non a più o meno fondate ipotesi preconcette al riguardo.

Che il concetto sia il medesimo, risulta confermato nel modo più esplicito da Papy che ha insistito nel proclamare che il suo modo di procedere vuol essere *« à la fois intuitif et rigoureux »*. E, poichè anche il senso della parola *intuitivo* potrebbe dubitarsi diverso, giova citare come elemento quasi decisivo il richiamo all'*intuizione geometrica* come fondamento quasi universale (anche per la teoria dei numeri reali): per Papy « la géométrie est l'élément fondamental de la pédagogie de la mathématique moderne ». Semmai può sussistere ancora una certa diversità nel fatto di limitare gli oggetti dell'intuizione preliminarmente utilizzabili al campo geometrico, che è già in qualche senso spogliato di significato fisico, mentre per me è essenziale che siano presenti e conosciute *tutte le interpretazioni e soprattutto le più concrete e pratiche* (oggetti, persone, ecc., con grandezze quali il peso, volume, prezzo, velocità, età, temperatura, numero di telefono, ecc., secondo i casi). Perciò io riterrei essenziale che queste nozioni venissero apprese prima che l'argomento venisse fatto a brandelli fra due o più insegnanti diversi, dando l'impressione che l'insegnante di matematica si sforzi a inventare qualcosa da dire sul niente che gli resta dopo che gli altri gli hanno portato via tutto (ed è perciò che sostengo l'« abbinamento »; cfr. lo scritto (già citato) in *Per. Mat.*, 1964, 1-2).

Anche a questo riguardo Papy si mostrò d'accordo apprezzando e dichiarando di praticare la molteplicità delle esemplificazioni: fu in seguito a mia domanda (se non introducesse i vettori e loro operazioni anche come forza, velocità, operazioni contabili in più valute, « canestri » di merci, ecc.) che riferì delle operazioni economiche (ad es. matrici di processi produttivi e loro inversione); quanto alle forze si limita a un cenno per non interferire coll'insegnamento dei professori di Fisica che però spontaneamente hanno apprezzato il fatto di trovare gli studenti praticamente già in possesso delle nozioni e conclusioni dipendenti da composizione di vettori ecc. Tutt'al più può darsi che alla molteplicità di esemplificazioni preventive Papy attribuisca un'importanza meno « gnoseologica » di quanto forse lo sia dal mio punto di vista. Ed anche, ad altra mia questione, rispose convenendo che non si debba limitarsi troppo a lungo sulla geometria piana ma introdurre quasi subito i sistemi a tre e più dimensioni: non è che nei primi due anni ci si inibisca di accennare ad estensioni istruttive a più dimensioni, benchè, come è naturale, lo studio più esteso e sistematico si riferisca solamente al caso del piano.

Alcune concordanze su punti essenziali e decisivi attestano in modo indubbio l'analogia profonda di atteggiamento non solo tra Papy, Revuz e il sottoscritto, ma anche (a giudicare da alcuni passi, e spero non interpretarli oltre l'intenzione) di parecchi altri partecipanti (soprattutto Deheuwels, e poi Bass, Mme. Lelong, Pickert, Walusinski). Si tratta: — della contrarietà all'inizio assiomatico astratto; — dell'atteggiamento critico verso la « generalità » (che è un pregio solo se e quando riesce psicologicamente opportuna e didatticamente efficace); — dell'opposizione contro la tendenza a preferire l'aritmetizzazione all'intuizione geometrica (deduzione dei numeri reali dagli interi, introduzione di punti vettori operatori come colonne o righe o matrici di numeri — coordinate, componenti, elementi — anzichè come enti a sè di significato intrinseco, ecc.; — del favore a collegare la matematica (sia nell'introduzione dei concetti che negli sviluppi e nelle applicazioni) a tutto il resto, in modo concreto, e ad apprezzarne l'*utilità*. Tutto ciò conduce a disquisizioni alquanto metafisiche che sarà opportuno sviluppare a parte più avanti.

Riprendendo le considerazioni sui programmi Papy e Revuz, resta a dire, per quanto riguarda quest'ultimo, che egli lo pensa valido solo per una scuola in certo senso selezionata e intesa a dare una preparazione solida per studi universitari, quale il Liceo. A mia richiesta, convenne però che, a prescindere da modificazioni marginali (alleggerimento di parti più elevate e separabili, inclusione di eventuali argomenti specifici di varie applicazioni), lo schema generale dovrebbe rimanere inalterato — come avevo appunto sostenuto — in ogni tipo di scuola. Una domanda particolare che Revuz ha posto trovandosi in dubbio ha mostrato che tutti sono perplessi nel rispondere: quand'è che dovrebbero acquisire padronanza e speditezza nei calcoli coloro che dovranno pure raggiungerla (ad es. esercizi di derivazione, integrazione, ecc.)? Dovunque è un inconveniente, sia collocandola presto (perchè si riduce a gioco mnemonico non basato su sufficiente comprensione) sia collocandola dopo (perchè è perditempo pedestre per chi dovrebbe dedicarsi a cose più elevate). La cosa migliore sarebbe se, grazie a un'anticipata conoscenza delle funzioni e una conseguente prolungata pratica di manipolazioni su di esse, gran parte dei calcoli richiesti per esempi di derivazione e integrazione rientrassero in cose note e potessero venir rapidamente ricondotti ad esse (p. es., dando per ben acquisite le scomposizioni di funzioni razionali, le trasformazioni di espressioni con funzioni goniometriche, ecc.); ma si potrebbe trattare di un alleggerimento radicale? Difficile far previsioni.

Qualche discussione ebbe luogo più in generale sulla maggiore o minore difficoltà di realizzare un così considerevole arricchimento di programma per giovani delle età considerate; a me pare però — come ebbi a dire nella discussione — che i dubbi potevano semmai apparire giustificati per la fase iniziale (delle età 11-14); dopo che per essa si ha il responso favorevole dell'esperienza di Papy, la via per proseguire è aperta. Ed anzi, diviene sempre maggiormente semplice rispetto a quelle dei metodi attuali per l'effetto cumulativo del fatto che le molte semplificazioni particolari vengono a costituire un sistema organico, unitario, limpido.

Digressioni quasi metafisiche.

Veniamo alla digressione quasi metafisica necessaria per chiarire le questioni più generali sopra accennate. Non è che io ami le questioni metafisiche o intenda fare della metafisica; al contrario, il mio intendimento è di svuotare l'apparenza metafisica e mostrare che dissipando tale cortina fumogena (scacciandola attraverso il camino dal grattacielo di Revuz!) la sostanza delle questioni diviene semplice e naturale; volendo usare un termine filosofico, il mio intendimento è di mettere in luce il significato delle questioni dal punto di vista pragmatista. Si veda ad es., al riguardo, G. Vailati, *Scritti* (ed. Seeber, Firenze, 1911), e in particolare (a pp. 933-941) « Il pragmatismo e i diversi modi di non dir niente ».

Partire assiomatizzando in astratto, senza riferimento a casi ed esigenze che giustifichino praticamente la creazione di certi schemi mentali, può piacere per vanto di purezza o dispiacere per il senso d'inutilità, gratuità, vacuità, di ciò che è mero « jeu d'esprit » (Lelong). Come gusto propendo per il secondo atteggiamento perchè ambisco considerare la matematica come elemento vivo e utile per la scienza e l'umanità, non segregato in uno squallido (seppur superbo) isolamento. Come constatazione di fatto, vedo poi che anche i modelli creati nel vuoto *vengono poi in effetti usati per applicazioni*, e in genere *applicati male,* con discredito della matematica, perchè della rispondenza ai problemi reali non si erano curati i matematici creandoli nè si preoccupano gli utilizzatori confidando che se un modello è matematicamente ineccepibile si può applicare senz'altro. Ma, a mio modo di vedere, ritengo soprattutto vuota e illusoria ogni definizione o frase che sia astratta in senso diverso da quello di condensare più nozioni o affermazioni particolari, e soffro nel vedere non raramente (e forse proprio solo in Italia) dei matematici lasciarsi infettare da questo rancido modo di pensare tipico di certo umanesimo metafisicheggiante o addirittura crociano.

È futile metafisicheria chiedersi ad es. « in che cosa consista » il « concetto di numero », o « del numero 2 » considerato come « entità » a sè (e, anzichè « il concetto », vorrei qui dire, come Adriano Tilgher inventò con sottile intendimento satirico, « il Begriffo »). Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere *d, u, e* non hanno un significato di per sè ma lo assumono usandole per formare la parola « due », così anche il « due », o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo hā in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se « questo tavolo è lungo meno di 2 metri » è vera o falsa). Così $2+3=5$ è un modo sintetico e di per sè vuoto di esprimere il fatto che, in condizioni da precisare operativamente come sopra, ciò vale per cani, metri, viaggi, ecc. Considerazioni del genere ho sviluppato un po' più ampiamente nel 1° capitolo del già citato volume « Matematica logico-intuitiva ».

Un altro preconcetto e movente del ragionare in astratto è, per molti, la preoccupazione « di bandire l'intuizione, perchè talvolta induce in errore ». La preoccupazione può esser giustificata in delicate questioni di critica dei principi; fuori di tali situazioni eccezionali è ben maggiore il rischio di errare per mancanza del controllo dell'intuizione che non per sue imperfezioni se è presente. Volerla bandire sarebbe come cavarsi gli occhi perchè esistono le « illusioni ottiche » senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente.

Della « generalità » non bisogna fare un feticcio: come di ogni cosa, bisogna vagliarne spassionatamente e caso per caso il pro e il contro. Va osservato anzitutto che la « generalità » di un risultato matematico non è un pregio *logico*: esso è infatti soltanto o tautologicamente falso o tautologicamente vero e quindi identico rispettivamente a (se così ci si vuole esprimere) $1=0$ oppure $0=0$. Il maggiore o minor pregio non può essere che *psicologico*: pregio *per noi* che (come mirabilmente disse Galileo) manchiamo della capacità di vedere istantaneamente le cose che abbiamo implicitamente ammesso insieme a certe ipotesi. Ma allo stesso modo e per lo stesso motivo manchiamo della capacità di vedere istantaneamente (ed anche lentamente, a volte) tutte le conclusioni particolari « contenute » in un enunciato generale. Per solito vi sono delle conclusioni particolari che sono particolarmente importanti e interessanti, e conviene soffermarsi dedicando speciale attenzione ad esse; la convenienza di aggiungere un enunciato generale o di inquadrarlo in altro ancor più generale dipende da circostanze come il fatto che esso getti nuova luce sui casi particolari, o che ne includa altri aventi ancora un certo interesse, o che in un ambiente più largo la cosa risulti più semplice, ecc. (però a volte, specie in quest'ultimo caso, la semplicità rischia di far perdere di vista gli aspetti più rilevanti del caso particolare che veramente interessa). L'astratto per l'astratto può ridurre lo studio a un mero vaniloquio; è per lo meno difficile distinguere se ciò che uno studente dice è o non è vaniloquio: se lo ripete, oppure ragiona, oppure crede di ragionare ma solo in quanto segue dei nessi verbali, ma non quelli sostanziali, ossia, se il motore del cervello è fuori funzione oppure funziona ingranando e facendo presa sulle cose oppure funziona in folle rimescolando solo parole.

Deheuwels spiegò benissimo a questo riguardo e nello stesso spirito il dissenso dal concetto che «massima generalità sia massima economia» cui s'informa il criterio didattico di certi bourbakisti: ciò sarebbe vero soltanto se (contrariamente a quanto detto) un'occhiata a una foto panoramica bastasse ad afferrare tutti i dettagli come esaminandone innumerevoli ingrandimenti. Basta del resto riflettere sulle osservazioni di matematici che erano anche saggi: si pensi alla raccomandazione di Enriques sull'opportunità di dare la dimostrazione di un risultato *nel caso più semplice in cui si presenta nella sua generalità* (ad es., se basta, nel piano anzichè per n dimensioni), si pensi alla meraviglia di Felix Klein nel dire di quel tale professore che trattava subito delle serie di potenze in n variabili senza soffermarsi sul caso $n=1$. Ma, se non vogliamo degnar di attenzione queste voci di altri tempi, possiamo apprendere gli stessi insegnamenti dalla voce dei giovani di oggi: si potrà trovare uno che non sa distinguere sugli esempi più elementari, nè spiegare, per funzioni di una variabile, la differenza tra convergenza e convergenza uniforme, pur essendo in grado di declamare le definizioni riferite al caso di spazi normati, oppure uno che sa dire il nesso tra funzioni analitiche e rappresentazione conforme ma ignora che ciò vale nel caso più semplice, $f(z)=az$, prodotto = similitudine, e via discorrendo. Non sarebbe assai meglio saper vedere chiaramente il caso fondamentale, e magari aver solo una certa idea intuitiva della possibilità di estensione?

Il guaio è che si spinge l'astrattismo fino a pensare che anche i matematici e in particolare gli studenti siano enti astratti dotati di un cervello astratto funzionante da recipiente astratto per ogni astrazione astrattamente logica; al contrario, anche se di per sè la matematica è semplicemente logica, essa non esiste per noi e per gli studenti se non in funzione dei processi in minima parte logici e ben più psicologici in cui ne consiste l'apprendimento, l'apprezzamento, l'interesse, l'assimilazione, od invece la repulsione o l'indifferenza. Chi insegna matematica si chieda sempre che opinione si farebbe di un medico che, trovandolo bisognoso di ferro, gli somministrasse limatura di ferro anzichè qualche composto che lo contenga in forma assimilabile, in base all'assioma che, dal punto di vista logico, si può affermare che il ferro è sempre ferro.

Dell'aritmetizzazione vanno esaminati due aspetti, criticandola dapprima dal punto di vista che si potrebbe dire gnoseologico e quindi da quello pratico e didattico. Avverto subito che ciò che dico dal primo punto di vista (e che dissi a Frascati come idea improvvisata) non va preso troppo sul serio se non come argomento per dimostrare che neppure la tesi opposta e abituale deve necessariamente prendersi del tutto sul serio.

Le due tesi contrapposte consistono nel dare la preferenza, nella costruzione dei numeri reali, al procedimento *aritmetico* (partendo dagli interi e attraverso i razionali, tipo Dedekind) o a quello *geometrico o fisico* (partendo da lunghezze, p. es. ascisse su una retta, o altre grandezze qualunque; tipo Burali-Forti, postulati delle «Grand, +»). La prima è generalmente preferita, perchè parte dagli interi che costituiscono una sottoclasse più «semplice» di numeri ed evita il ricorso all'intuizione geometrica. Come «avvocato del diavolo» ritengo doveroso notare che neppure l'intuizione e la derivazione aritmetica sono al di sopra di ogni discussione (sugli assiomi di Peano, le critiche intuizioniste, ecc.), e che tanto vale basarsi sull'intuizione geometrica (che appare forse più evidente e rende certamente il cammino più facile). La discriminazione (a mio avviso troppo radicale) tra «diretta accettabilità» di numeri interi e altri risente probabilmente dell'affermazione quasi «teologica» fatta (se non erro) da Kronecker, secondo la quale «soltanto gli interi sono creati da Dio, il resto è invenzione nostra»; per conto mio, ammesso che la questione avesse un senso, non vedrei motivo per non dare la stessa risposta, poco importa quale, in entrambi i casi.

Senza bisogno di contrastare le vedute correnti sul piano della preferibilità logica (o addirittura «teologica»!) si potrebbe ugualmente giungere, in modo che dovrebbe soddisfare tutti, ad accettare con minor riluttanza la costruzione di tipo geometrico (secondo Papy, ma anche con approvazione di Morin ed altri; non ricordo con sicurezza chi). Nell'immaginare di pervenire a misurare le lunghezze, attraverso successive divisioni a metà o in decimi delle suddivisioni via via ottenute, mediante numeri reali scritti in forma binaria o decimale, non occorre alcuna ipotesi geometrico-fisico-metafisica (e direi senz'altro metafisica ovverossia fittizia) sull'esistenza e unicità dei punti corrispondenti ad ogni numero reale; si tratta comunque di una convenzione che precisa per comodità matematica le cose ben oltre i limiti aventi senso nelle misurazioni pratiche e nella stessa concepibilità in senso fisico, e ciò tanto se si trasportano sulla retta i numeri reali creati dal nulla al modo di Dedekind quanto se i numeri le si creano sopra col pensare concettualmente lecito l'immaginare di poter ripetere le suddivisioni indefinitamente (o, più concretamente, misurare una lunghezza in cm, poi il residuo in mm, e i residui successivi in decimi, centesimi, millesimi, ecc. di mm).

Resta sempre la possibilità di rilevare poi, se si vuole, e in modo molto rapido e chiaro, che è possibile anche la via di Dedekind: infatti dividendo due interi si ottengono numeri decimali (o binari) periodici (razionali) e gli altri (irrazionali: la loro esistenza si constata così in modo ovvio) ne sono visibilmente elementi di separazione.

A me è sempre parso che il campo reale sia il più intuitivamente noto (e penso — chissà se nessuno psicologo ha fatto indagini al riguardo? — che la cosa sia abbastanza comune, pur sapendo solo per caso di qualche altra persona); non riuscivo a capire, a 4 o 5 anni, perchè mai uno zio, per spiegarmi qualcosa di aritmetica, insistesse che *non si può fare* $2-5$ (come se non esistessero, anche sul termometro, i numeri negativi), e poi non ho mai capito perchè, analogamente, prima di considerare $2/5$ e poi $\sqrt[2]{5}$, si fingesse di credere che tali numeri non esistessero; nè quando poi ho appreso il motivo di questo modo di procedere son mai riuscito a considerare ragionevole il ricorso a definizioni tanto difformi per numeri reali a seconda di circostanze accessorie come l'essere interi o razionali o irrazionali (accessorie specie pensando alle grandezze, ove l'aver misura intera o razionale o irrazionale dipende (1) dall'arbitraria scelta dell'unità di misura). E in certo senso mi sembra proprio meno inquietante pensare a tutti i numeri reali di un intervallo (come punti di un segmento finito, sia pure essendo essi stessi in numero infinito) piuttosto che a *tutti* gli interi. Ciò richiama infatti l'immagine di collezioni spropositatamente numerose di oggetti più o meno uguali come 10^{1000} cani o viaggi o anche solo granelli di sabbia come nell'*Arenario* di Archimede, oppure grandezze spropositatamente enormi come 10^{1000} metri o secondi o grammi; ed è spiegabile un certo senso di sgomento, che dal piano psicologico può penetrare come dubbio nel campo logico, così come appare da vari atteggiamenti riguardo ai « paradossi dell'infinito » (2).

Passando ora dall'aritmetizzazione del campo reale a quella della geometria e dell'algebra lineare, non solo si possono ripetere aggravate le critiche precedenti, ma se ne aggiungono altre nuove di portata ancora maggiore e non più limitate alla sfera concettuale. Per aritmetizzazione della geometria e dell'algebra lineare intendo il procedimento consistente, nel caso

---

(1) E solo con sforzo di fantasia, perchè non ha certo senso chiedersi effettivamente se una data sbarra ha lunghezza razionale o irrazionale rispetto al metro-campione di Sèvres.

(2) Curiose conclusioni a tale proposito si trovano ad es. in E. Borel, *Les paradoxes de l'infini* (ed. Gallimard, Paris, 1946). Beninteso, le considerazioni precedenti cercano solamente di esprimere vaghi stati d'animo che *non pretendono* (anzi, secondo me, *non possono*) aver valore alcuno come « argomentazioni ». In particolare, si tratta di mera illusione ottica se, per il fatto di poter abbracciare con lo sguardo o con l'immaginazione un segmento, lo sgomento per l'*infinitamente piccolo lì dentro* può esser minore che per l'*infinitamente grande al di fuori*, di cui è immagine per inversione. Anche dal punto di vista fisico, se dal lato del molto grande possiamo incontrare barriere che rendono inavvicinabile l'infinitamente grande (eventuale limitatezza dell'universo, velocità della luce), lo stesso avviene dal lato opposto (struttura corpuscolare, teoria dei quanti); conclusioni ipotetiche anche più radicali sono quelle prospettate da St. Ulam (nella sua « von Neumann Lecture », Princenton, 1963, forse tuttora inedita, dal titolo: « Combinatorial analysis in infinite sets and some physical theories »).

più estremo, nel *definire* il piano (o l'S_n) come l'insieme delle coppie (o n-uple) di numeri reali (punti e vettori *non sarebbero che* queste n-uple, magari distinguendo se scritte in riga o in colonna), le applicazioni lineari di S_n in S_m *non sarebbero che* le matrici $(n \times m)$, e via di questo passo. La variante meno estrema — che rimuove i motivi di critica concettuale ma non gli inconvenienti pratici nei cui riguardi è irrilevante — consiste nell'ammettere, sì, che i punti possano essere realmente punti geometrici o punti materiali o canestri di merci ed i vettori possano essere realmente forze o velocità o gradienti di temperatura o d'altro, ma che per rappresentarli e per operare su di essi si debba sistematicamente ricorrere alle loro componenti secondo un certo sistema di riferimento.

Fortunatamente diversi relatori (oltre a Papy, ricordo in particolare Pickert che ha validamente insistito su tale punto) hanno preso netta posizione contro tale indirizzo: che i vettori di un qualunque S_n possano esprimersi sempre come combinazioni lineari di n tra essi scelti ad arbitrio purchè linearmente indipendenti è vero per definizione; che si possa quindi rappresentarceli sempre con le componenti rispetto a un sistema di riferimento, scelto opportunamente di volta in volta o tenuto fisso, è pacifico; che ciò possa costituire spesso uno strumento comodo e prezioso di calcolo è bene saperlo. Fin qui tutti d'accordo. Il fatto che spesso convenga usare l'automobile non significa però che si debba vivere sempre nell'automobile e ancor meno farsi saldare rigidamente al telaio. Il fatto che, al momento del calcolo numerico, convenga indicare un numero in cifre decimali, non significa che convenga, operando su numeri generici a e b, indicarli anzichè con tale singola lettera con $a_{n(a)}a_{n(a)-1} \ldots a_3a_2a_1a_0$ essendo le a_i le cifre di $a = \Sigma_i a_i 10^i$, e così per b, e in tal modo complicare tutti i calcoli; lo stesso è l'appesantimento che con altrettanto inesistente costrutto si consegue scrivendo i vettori (e quindi il prodotto scalare e vettoriale ecc.) mediante componenti e mediante mostruosi sviluppi confezionati mediante componenti e via via di peggio in peggio; lo stesso è l'appesantimento che si ha considerando la *geometria analitica* come un dominio a sè dove si *deve* riferire tutto a coordinate anche se non ce n'è bisogno anzichè insegnare che, ogni qual volta nella trattazione di un problema si giunga a un punto ove compaiono in evidenza grandezze su cui appaia promettente operare per conseguire i risultati desiderati, conviene provare ad assumerle come « coordinate » (specie quelle che già si conoscono: soprattutto cartesiane, ma, se presentano vantaggi non compensati dalla minor familiarità, qualunque altro sistema: tutto è relativo, come dev'essere, alle conoscenze e gusti dell'interessato).

Ma, oltre e sopra tutti i singoli motivi addotti, c'è una ragione più profonda e generale che mi fa giudicare negativamente tutto ciò che (di proposito, in base a preconcetti culturali, oppure involontariamente, come effetto di consuetudini invalse) crea un distacco, una distinzione, fra i problemi effettivi, pratici, concreti, che richiedono l'applicazione della matematica, e ciò di cui il matematico si occupa. D'accordo (però — vedremo — solo in un certo senso e *fino a un certo punto*) che in un problema di fisica, o d'ingegneria, o d'economia, un matematico *potrà* limitarsi a considerare i dati come vettori (senza curarsi che si tratti di forze o di spostamenti o di prezzi ecc.) e le leggi come equazioni (senza curarsi di come e perchè debbano valere); ma se egli ritiene di *doversi* estraniare dal significato e ignorarlo si rende assai più simile a una fattucchiera che vuol guarire un malato guardandone la fotografia che a un medico che lo vuol curare visitandolo. È parimenti vero che un logico aristotelico potrebbe concludere, nel classico esempio di sillogismo, che « Socrate è mortale » senza sapere cosa significhino le parole Socrate, uomo, mortale ed anzi anche senza sapere se sono o non sono parole, ma tale ignoranza non è nè necessaria nè raccomandabile nè utile per meritarsi o conservarsi la reputazione di logico valente rispettabile e immacolato.

Ciò porta direttamente all'ultimo tra gli argomenti indicati per questa digressione quasi metafisica: l'atteggiamento verso le applicazioni. Pur evitando di ripetere cose già dette (specialmente nella « parte prima » della conferenza su « L'apporto della matematica nello sviluppo del pensiero economico » al Congr. Un. Mat. It., Genova, 1963: cfr. *Atti*, pp. 238-277) resta molto da dire e occorre dire qualcosa, specie in relazione a concetti emersi nei dibattiti a Frascati.

Sull'*atteggiamento verso le applicazioni* pesa tuttora il vieto pregiudizio aristocratico che contrappone come inconciliabili la sublime dignità anche culturale di tutto ciò che è fine a sé stesso e la volgare spregevole strumentalità di tutto ciò che partecipa dell'onta di essere utile per qualcuno o qualcosa. Poco importa ch'io dica o non dica quanto tale mentalità mi ripugni, dato che importa soltanto l'aspetto riguardante la matematica; come vorrei, però, che il matematico — così come il poeta per bocca del Carducci — tenesse a non esser considerato « un perdigiorno che va intorno con il naso sempre in aria » bensì « un grande artiere che al mestiere fatto ha i muscoli d'acciaio! »

Della necessità e utilità reciproca dell'*apertura* di ogni scienza e ramo della cultura verso tutti gli altri, della collaborazione, della comprensione, dell'interdipendenza, si è avuto occasione di far cenno più volte. Agli effetti dei pregiudizi, secondo cui pensare a ciò che è *utile* è cosa meschina e disonorevole, *servire* significa abbassarsi a posizione subordinata e umiliante, *applicare* la matematica significa contaminarla e tarparle le ali destinate ai voli eccelsi, occorre distinguere e precisare. Per *utilità* può intendersi a volte l'interesse egoistico (e neppur ciò è male entro un certo limite), ma in genere si tratta, specie nel nostro discorso, di utilità nell'interesse generale, per lo più neppure o secondariamente interesse direttamente materiale ma interesse per il progresso delle altre scienze, della scienza nel suo complesso, ed anche della matematica stessa purchè non la si voglia a torto considerarne avulsa. E l'utilità è reciproca: sono i problemi effettivi che generano la vera matematica, non le culture in serra od in vitro; e non è disdicevole servizio ma sommo vanto per la matematica l'essere a sua volta strumento essenziale di progresso in altri campi. E quand'anche tale reciprocità non sussiste, la soddisfazione del rendersi utile conta ben più del narcisismo di chi si compiacesse di una fatua bellezza davanti allo specchio. Perchè non ripetere « Io ho quel che ho donato »?

Il termine *servire* non va certo inteso nel senso di bassa prestazione mercenaria o coatta, e se forse qualcuno (come è stato detto, parlando di professoroni d'ingegneria) ha così scarso concetto della matematica e dei matematici ciò può solo esser giustificato, in parte, proprio dalla tendenza all'isolamento che riduce a pochi formalismi ed esclude dall'esame di merito le capacità di collaborazione del matematico. Per correggere l'interpretazione di « servire » come « servilismo » o « schiavitù », si pensi alla ben più vicina interpretazione contenuta nel più alto e onorifico di tutti i titoli di tutti i tempi « Servus servorum Dei »; quanto sarebbe deludente veder preferire, per la matematica, a quello di « servitrice di quanti servono la scienza », qualche pomposo titolo come « Calcolo sublime », più vicino a quello, accattato dai pagani, di Pontifex Maximus.

L'*applicazione* è poi necessaria più ancora alla matematica che a chi se ne avvantaggia, perchè solo mettendola alla prova si può vagliare l'efficienza, la funzionalità, la fecondità di una teoria; e sono queste qualità essenziali che ne costituiscono il pregio anche dal punto di vista estetico, come occorre spesso ricordare perchè il gusto non degeneri nel decadentismo di sterili raffinatezze, di pretensiosi e goffi ornamenti, di macchinose e fumose invenzioni (da scacciare attraverso il camino di Revuz).

Credo di aver vuotato il sacco, e vorrei augurarmi di non dover più parlare di faccende quasi metafisiche; purtroppo però molte cose sono come le ciliegie ...

SPUNTI DIVERSI.

In un incontro interessante e vivace come è stato quello di Frascati innumerevoli sono gli spunti che andrebbero ripresi per completare sia pure il quadro delle questioni il cui chiarimento avrebbe interesse ai fini del tema del presente articolo e delle relazioni cui si riferisce. Limitiamoci ad alcuni, brevemente, un po' alla rinfusa.

Una domanda fattami da Viola: se intendo e credo possibile (lui ne dubita) che la matematica vada appresa come la lingua materna; in tal caso, studiarne *dopo* la grammatica è noioso. L'espressione mi è piaciuta; la risposta è che ritengo si dovrebbero apprendere « come la lingua materna » quelle nozioni preliminari che servono a destare interesse per un problema e favorire la comprensione delle spiegazioni da far seguire quando sono attese, appropriate e non tardive. Ciò non solo come espediente per rendere più piacevole l'argomento, ma come necessità per far capire il perchè delle cose e non solo il verbalismo degli enunciati e il formalismo degli algoritmi.

Campedelli, Manara, Pescarini, forse altri, si preoccupavano di non abbandonare la geometria di Euclide come argomento tradizionale e perciò stesso culturalmente importante. Ritengo sarebbe molto opportuno (ma specialisti come loro dovrebbero studiare il modo di farlo *bene!*) inserire un non troppo esteso ma succoso saggio di tale metodo appena completata (coi primi necessari sviluppi) l'introduzione delle nozioni metriche (intorno ai 14 anni del programma Papy); il saggio potrebbe — come programma massimo — dare un quadro comparativo degli assiomi, dell'ordine di concatenazione dei diversi concetti, dei modi di ragionare, dei vantaggi e degli svantaggi, dello sviluppo storico, ecc., dei due diversi sistemi: quello di Euclide e quello preconizzato. Come programma minimo, far almeno intravvedere qualcosa su ciascuno degli aspetti menzionati, e sviluppare estesamente parecchi esempi significativi.

Spunti interessanti (in Revuz e altri) in favore del calcolo numerico e questioni connesse, ingiustamente sottovalutate da chi ama limitarsi alla matematica del perfetto. Importante invece e istruttivo tener sempre presente che bisogna fare i conti con l'approssimazione e l'errore: ignorare ciò non significa innalzarsi ma impoverirsi. (Ho già citato troppe volte una conforme osservazione di Castelnuovo, del 1912). Interessante: in una classe (non ricordo chi l'ha detto) i giovani hanno respinto la conclusione che dall'uguaglianza di un 1° e 2° segmento, e poi 2° e 3°, ..., 90° e 100° si potesse concludere l'uguaglianza del 1° e l'ultimo (giustamente, pensavano all'accumularsi degli effetti dell'inesattezza: necessità di non presentare come ovvie delle convenzioni in certo senso più progredite, ma in altro senso più sempliciste, di quelle spontanee per i giovani). Qui anche si possono inserire considerazioni statistico-probabilistiche (fatti cenni, non discusse).

E fermiamoci qui. Come si vede, l'avvio sembra sempre più promettente, e confortante la convergenza d'intendimenti che col procedere degli scambi d'idee potrà sempre meglio perfezionarsi e definire le residue questioni dubbie. Non bisogna però sottovalutare le difficoltà; e basti qui menzionarne una per tutte, espressa spiritosamente da Mme. Lelong come « une loi naturelle »: *non è permesso insegnare ai giovani ciò che i loro padri e le loro madri non hanno a suo tempo imparato.*

Questa frase paradossale illumina bene quali e quante difficoltà sia fatale debbano incontrarsi dall'esterno, per l'incompresione e il misoneismo inevitabile nei profani e aggravato dai tristi ricordi che i profani di oggi conservano dell'insegnamento di ieri. Ma, tuttavia, i pericoli maggiori dobbiamo sempre temere di rivederli riaffiorare tra noi stessi per la possibilità sempre latente e incombente che i vecchi difetti permangano o risorgano nonostante ogni rinnovamento di contenuti e perfino favoriti da esso.

Vi sono tre terribili forze che concorrono a sostanziare tale minaccia. C'è la tendenza naturale di ogni cosa a perdere l'iniziale slancio intelligente e degradarsi a vieta routine, e purtroppo tale tendenza è particolarmente connaturata al tradizionale spirito scolastico. Vi sono poi due motivi specifici della matematica, opposti come punto di partenza ma spesso indiscernibili come estrinsecazione finale: cioè la mortifera aridità e meccanicità del formalismo. Vi può essere il motivo elevato e pregevole che si ispira alla critica dei princìpi e dei fondamenti, del quale però, chi non sia tanto colto e specializzato ed acuto ed appassionato da apprezzarlo, rimane solo un'impressione di pedantesco formalismo. E vi può essere il motivo aberrante di aiutare i pigri e i deficienti ed obbligare di riflesso anche gli intelligenti a risolvere problemi e superare esami senza capirne il senso, riducendo la matematica alla mnemonica ripetizione di enunciati applicazione di regolette e ricorso a schemini standardizzati. Nei due casi, che ci si proponga turpemente di insegnare a *imparare senza capire*, oppure, troppo ambiziosamente, ad imparare a capire ciò che è dato prematuramente e superfluamente, il risultato è sempre di *imparare senza capire*.

Ed è questo il fatto mostruoso che caratterizza la mentalità scolastica in quell'aspetto deteriore che occorre combattere: il proporsi (consapevolmente o no) di condurre all'annullamento e abbrutimento delle intelligenze finemente ma terribilmente sintetizzato dalla frase seguente (è una citazione inglese) che potrebbe distinguere chi è stato sufficientemente istupidito da meritare la maturità: «*Io posso imparare e credere una cosa senza capirla; è tutto questione di allenamento!*»

B. de Finetti