Sui prismi e le piramidi regolari razionali

Definizione di poliedro razionale.

1. Un *poliedro* si dice *razionale* quando le misure dei suoi spigoli e del suo volume si esprimono con numeri razionali.

Sono stati oggetto di studio finora i tetraedri razionali, ma i resultati noti non esauriscono il problema, le ricerche portano soltanto a determinare particolari classi di tetraedri razionali (1).

Anche il caso più semplice di tetraedri trirettangoli che si riconduce ad un noto problema dell'analisi indeterminata di EULERO (2) non è interamente risolto, per tale questione l'A. comunicherà tra breve nuovi notevoli resultati.

Qui ci proponiamo di trattare l'argomento dei *prismi* e delle *piramidi regolari razionali*, arrivando alle conclusioni per via del tutto elementare.

L'unico prisma retto regolare razionale è quello a base quadrata.

2. Sia P un prisma retto regolare razionale la cui base abbia n lati, e ne sia $2x$ il lato della base ed y l'altezza, con x e y razionali. Il prisma è razionale se l'area della sua base $nx^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ si esprime con un numero razionale e per questo

(1) Cfr. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. B. III, 1; H. 6, pag. 1065.

(2) Cfr. LEONHARD EULER: *Opera Omnia*. Series Prima. Vollständige Anleitung zur Algebra, Zweiter Theil, pag. 475. (Leipzig, Teubner 1911).

è necessario e basta che $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ si esprima con un numero razionale, si abbia cioè

(1) $$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\frac{p}{q}$$

con p e q interi.

Dalla (1) quadrando si ha:

(2) $$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}=\frac{q^2}{p^2+q^2},$$

e posto

$$t=\cos\frac{\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n},$$

(i unità immaginaria) abbiamo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}=(t^2-1)/2it$ e la (2) diventa:

$$(p^2+q^2)(t^2-1)^2+4q^2t^2=0,$$

ed infine posto

(2′) $$\omega=t^2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

si ha per ω *l'equazione di secondo grado a coefficienti interi assoluti:*

(3) $$(p^2+q^2)(\omega-1)^2+4q^2\omega=0.$$

Ma il numero ω è radice primitiva n^{ma} dell'unità, esso soddisfa quindi *l'equazione irriducibile nel campo assoluto di razionalità:*

(4) $$X_n(\omega)=\prod_{\mu_1}(\omega^{\mu_1}-1)/\prod_{\mu_2}(\omega^{\mu_2}-1)=0$$

di grado $\varphi(n)$ [$\varphi(n)$ indicatore di GAUSS del numero n], ove μ_1 percorre tutti i divisori di n [n compreso] della forma

$$n,\quad \frac{n}{p_ip_k},\quad \frac{n}{p_ip_kp_lp_m},\dots$$

che si ottengono dividendo n per un numero pari dei suoi divisori primi diversi, e similmente μ_2 percorre tutti i divisori della forma

$$\frac{n}{p_i},\quad \frac{n}{p_ip_kp_l},\dots$$

che si ottengono dividendo n per un numero dispari di tali fattori [1]; e poichè ω è radice dell'equazione di secondo grado (3) deve aversi [2]:

(5) $$\varphi(n) \leq 2,$$

cioè posto

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k},$$

con $p_1, p_2, \dots, p_k$ fattori primi diversi, deve aversi:

(5') $$p_1^{r_1-1} p_2^{r_2-1} \dots p_k^{r_k-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) \leq 2.$$

Si ha da qui che n ha soltanto i fattori primi 2 e 3, esso ha perciò la forma:

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta.$$

Per $\beta = 0$, si ha $\varphi(n) = 2^{\alpha-1}$ perciò $\alpha = 2$, $n = 4$ e *i prismi retti a base quadrata rettangolari con spigoli razionali hanno anche il volume razionale.*

Per $\alpha = 0$ si ha $n = 3^\beta$, $\varphi(n) = 3^{\beta-1} \times 2 \leq 2$ perciò $\beta = 1$ e $n = 3$, per $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ si ha $\varphi(n) = 2^\alpha \times 3^{\beta-1} \leq 2$, perciò $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $n = 6$, ma nei due casi si ha $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e i corrispondenti prismi non sono razionali.

Limitazione del numero dei lati della base di una piramide regolare razionale.

3. Ci proponiamo di determinare tutte le piramidi regolari P che hanno il lato della base $2x$, lo spigolo laterale z e il volume v misurati da numeri razionali.

Scegliendo un conveniente rapporto di similitudine k, possiamo sostituire alla piramide P un'altra simile di lato $2kx$, di spigoli kz e di volume k^3v con kx, kz, k^3v interi; possiamo

---

[1] Cfr. L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa, 1899), pagg. 208-209.

[2] Cfr. L. Bianchi: loc. cit., pag. 137.

supporre quindi i tre numeri x, z, v interi, e così pure intero numero $y = 3v / nx^2$, indicando in questa formula n il numero dei lati della base della piramide P.

La superficie della base di P è espressa da $nx^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, si avrà quindi per la sua altezza

$$\frac{3v}{nx^2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = y \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

e siccome $x / \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ è il raggio della base della piramide e z il suo spigolo, avremo:

$$x^2 / \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + y^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = z^2,$$

cioè

$$(6) \qquad (y^2 + z^2) \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{n} - (x^2 + z^2) \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + x^2 = 0$$

la quale tenuto conto delle (2) e (2′) diventa:

$$(6') \qquad (y^2 + z^2)(\omega - 1)^4 + 4(x^2 + z^2)(\omega - 1)^2\omega + 16x^2\omega^2 = 0$$

che è *un'equazione di quarto grado in* ω *a coefficienti interi assoluti.*

Ragionando come prima avremo ora per n

$$\varphi(n) \leq 4,$$

ed n avrà quindi la forma

$$n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma.$$

Se è $\gamma > 0$ deve essere per la (5′) $n = 5$, supposto invece $\gamma = 0$, si ha $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ e perciò per la (5′) $\beta \leq 1$. Per $\beta = 1$ si ha $n = 2^\alpha \times 3$, $\varphi(n) = 2^\alpha$ quindi $2^\alpha \leq 4$ ossia $\alpha = 0, 1, 2$ e perciò $n = 3, 6, 12$. Infine per $\gamma = 0$, $\beta = 0$, si ha $n = 2^\alpha$ $\varphi(n) = 2^{\alpha-1} \leq 4$, e perciò $(n \leq 3)$ $\alpha = 2, 3$ ed $n = 4, 8$.

Concludendo *il numero dei lati della base di una piramide regolare razionale può essere espresso con uno dei seguenti numeri* $n = 3, 4, 5, 6, 8, 12$.

Non esistono piramidi regolari razionali con le basi di 3, 5, 8, 12 lati.

4. *a*) Sia $n=3$ $\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, la (6) diventa:

$$4x^2+9y^2=3z^2.$$

Segue che x e perciò z sono divisibili per 3, e posto $x=3x_1$, $z=3z_1$ avremo:

$$4x_1^2+y^2=3z_1^2.$$

Sia $3^\alpha d$ con $\alpha \geq 0$ il massimo comune divisore di $2x_1$ e y, dove supponiamo d primo con 3; posto $2x_1=3^\alpha dX$, $y=3^\alpha dY$, si ha

$$3^{2\alpha}d^2(X^2+Y^2)=3z_1^2$$

con X *e* Y *primi tra loro.* Si ha da qui $z_1=3^\alpha dZ$, perciò

$$X^2+Y^2=3Z^2$$

e questa è assurda, perchè 3 non può dividere la somma di due quadrati primi tra loro (1).

b) Sia $n=5$ $\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$, la (6) diventa:

$$(y^2+z^2)\frac{7-3\sqrt{5}}{32}-(x^2+z^2)\frac{3-\sqrt{5}}{8}+x^2=0,$$

ovvero

$$(20x^2+7y^2-5z^2)+\sqrt{5}(4x^2-3y^2+z^2)=0.$$

Si ha da qui (per l'irrazionalità di $\sqrt{5}$)

$$20x^2+7y^2=5z^2, \qquad -4x^2+3y^2=z^2,$$

e perciò $\left(\frac{x}{z}\right)^2=\frac{1}{11}$, $\left(\frac{y}{z}\right)^2=\frac{5}{11}$, manifestamente assurde con x, y, z interi.

---

(1) Cfr. ad es. G. Gazzaniga: *Gli elementi della Teoria dei Numeri.* (Padova 1903), pag. 111.

c) Sia $n=8$ $\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right]$, la (6) diventa:

$$(y^2+z^2)\frac{3-2\sqrt{2}}{8}-(x^2+z^2)\frac{4-2\sqrt{2}}{8}+x^2=0,$$

ovvero:

$$(4x^2+3y^2-z^2)+2\sqrt{2}(x^2-y^2)=0,$$

ed ancora

$$x^2-y^2=0, \quad 4x^2+3y^2-z^2=0,$$

perciò $x=y$ e $7y^2=z^2$ che è impossibile con y e z interi.

d) Sia $n=12$ $\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]$, la (6) diventa:

$$(y^2+z^2)\frac{7-4\sqrt{3}}{16}-(x^2+z^2)\frac{8-4\sqrt{3}}{16}+x^2=0$$

ovvero

$$(8x^2+7y^2-z^2)+4\sqrt{3}(x^2-y^2)=0,$$

ed ancora

$$8x^2+7y^2-z^2=0, \quad x^2-y^2=0,$$

da cui $x=y$ e $z^2=15y^2$, che è assurdo con y e z interi

Espressione delle misure degli spigoli delle piramidi regolari razionali quadrangolari.

5. *a*) Per $n=4$ $\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, la (6) diventa

$$z^2-y^2=2x^2.$$

Si ha da qui che i numeri $z+y$ e $z-y$ sono pari, e posto

$$z+y=l_1\alpha^2, \quad \frac{z-y}{2}=l_2\beta^2$$

con l_1 e l_2 privi di divisori quadrati, si ha

$$l_1 l_2(\alpha\beta)^2=x^2,$$

quindi $l_1 = l_2 = l$ e perciò:

$$z + y = l\alpha^2, \quad z - y = 2l\beta^2, \quad x = l\alpha\beta.$$

Essendo $z + y$ pari, uno almeno dei numeri l, α è pari. Supposto dapprima l pari, $l = 2k$, abbiamo

$$z + y = 2k\alpha^2, \quad z - y = 4k\beta^2 \quad x = 2k\alpha\beta$$

perciò

$$z = k(\alpha^2 + 2\beta^2), \quad y = k(\alpha^2 - 2\beta^2), \quad 2x = 4k\alpha\beta$$

ossia *il lato della base* 2x *e lo spigolo laterale* z *della piramide hanno per misura rispettivamente*

$$4k\alpha\beta, \quad k(\alpha^2 + 2\beta^2)$$

con k, α, β *interi qualunque.*

Supposto invece α pari, $\alpha = 2\alpha_1$, abbiamo:

$$z + y = 4l\alpha_1^2, \quad z - y = 2l\beta^2, \quad x = 2l\alpha_1\beta$$

da cui $z = l(\beta^2 + 2\alpha_1^2)$, $2x = 4l\alpha_1\beta$, ritroviamo quindi la soluzione precedente.

Abbiamo quindi: *il lato di base, lo spigolo laterale e l'altezza di una piramide regolare razionale a base quadrata, con lato della base intero pari, spigolo laterale e altezza interi, hanno rispettivamente per misura:*

$$4k\alpha\beta, \quad k(\alpha^2 + 2\beta^2), \quad k\,|\,\alpha^2 - 2\beta^2\,|, \tag{7}$$

con k, α, β *interi positivi qualunque.*

b) Se nelle (7) k indica un numero *razionale* arbitrario, esse ci forniscono tutte le piramidi razionali regolari a base quadrata. In queste formule possiamo ancora supporre α e β primi tra loro, perchè un eventuale loro divisore comune d ci dà il divisore comune d^2 per i due numeri $\alpha\beta$, $\alpha^2 + 2\beta^2$, $|\alpha^2 - 2\beta^2|$ e il fattore d^2 possiamo includerlo nel fattore di proporzionalità k.

Osserviamo infine quando accade che a due coppie distinte di numeri primi tra loro (α, β), (α_1, β_1) corrisponde una medesima famiglia di piramidi razionali.

Deve essere

$$(\alpha^2 + 2\beta^2) / \alpha\beta = (\alpha_1^2 + 2\beta_1^2) / \alpha_1\beta_1,$$

da cui $\alpha\alpha_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = 2\beta\beta_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$, e poichè si ha $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ [da $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ segue $\alpha/\beta = \alpha_1/\beta_1$ e perciò, essendo α e β, α_1 e β_1 primi tra loro, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ contro l'ipotesi] deve essere $\alpha\alpha_1 = 2\beta\beta_1$, $\alpha/\beta = 2\beta_1/\alpha_1$ cioè $\alpha_1 = \lambda\beta$, $2\beta_1 = \lambda\alpha$ con λ intero.

L'ipotesi α_1 e β_1 primi tra loro porta $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 2$; per $\lambda = 1$ abbiamo $\alpha_1 = \beta$, $2\beta_1 = \alpha$, quindi se α è pari e perciò β dispari, le piramidi razionali corrispondenti alla coppia $[\alpha, \beta]$ si ottengono anche dalla coppia $\left[\beta, \frac{\alpha}{2}\right]$ con β dispari.

Per $\lambda = 2$ si ha $\alpha_1 = 2\beta$, $\beta_1 = \alpha$ e poichè α_1 è pari, $\beta_1 = \alpha$ è dispari, e ancora le piramidi ottenute con le coppie $[2\beta, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, α dispari, coincidono.

Concludendo, *per una piramide regolare razionale a base quadrata, il lato della base e lo spigolo laterale sono dati rispettivamente dalle formule*

$$4k\alpha\beta, \qquad k(\alpha^2 + 2\beta^2)$$

ove α e β sono primi tra loro, α dispari, e k *un numero razionale univocamente determinato.*

c) Vogliamo infine osservare che *non esistono piramidi quadrangolari regolari razionali, le cui facce laterali abbiano per misura un numero razionale.*

Indicando infatti con ka l'apotema della faccia, a deve essere razionale e per le (7) dovrà aversi:

$$(\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = a^2,$$

ossia

$$\alpha^4 + \beta^4 = a^2.$$

Il numero razionale a deve essere intero, ma è impossibile soddisfare questa equazione con α, β, a interi (¹).

(¹) Cfr. ad es. H. Weber und I. Wellstein: *Encyklopädie des Elementar-Mathematik*. Bd I; *Algebra und Analysis*, pag. 284.

Espressione delle misure degli spigoli delle piramidi regolari razionali esagonali.

5. *a*) Sia $n=6$ $\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right]$, la (6) diventa:

$$y^2+12x^2=3z^2.$$

Si ha da qui che y è divisibile per 3, e posto $y=3y_1$ otteniamo $3y_1^2+4x^2=z^2$, od anche

$$(z-2x)(z+2x)=3y_1^2.$$

Dei numeri $z-2x$, $z+2x$ uno almeno è divisibile per 3 avremo allora

$$(8_1)\qquad z+2x=3k\alpha^2 \qquad z-2x=k\beta^2$$

oppure

$$(8_2)\qquad z+2x=k\beta^2 \qquad z-2x=3k\alpha^2$$

con k, α, β interi.

Dai sistemi (8_1), (8_2) si ha rispettivamente:

$$z=\frac{k}{2}(3\alpha^2+\beta^2),\qquad x=\frac{k}{4}(3\alpha^2-\beta^2)$$

$$z=\frac{k}{2}(3\alpha^2+\beta^2),\qquad x=\frac{k}{4}(\beta^2-3\alpha^2).$$

Si ha allora: *le piramidi regolari esagonali, razionali, aventi il lato della base e lo spigolo laterale intero, e l'altezza misurata da* $\left[\mathrm{y}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}=\right]\mathrm{y}\sqrt{3}$ *con* y *intero, hanno il lato della base, lo spigolo laterale e l'altezza misurati rispettivamente da:*

$$(9)\qquad \frac{k}{2}\,|\,\beta^2-3\alpha^2\,|,\quad \frac{k}{2}(3\alpha^2+\beta^2),\quad k\alpha\beta\sqrt{3},$$

ove α, β, k *sono interi, con la condizione* k *pari se* $\alpha+\beta$ *è dispari.*

b) Se nelle (9) k indica un numero *razionale* arbitrario, esse ci forniscono tutte le piramidi regolari razionali a base esagonale.

Possiamo supporre come prima α e β primi tra loro; osserviamo poi che a due coppie distinte $[\alpha, \beta]$, $[\alpha_1, \beta_1]$ corrisponde una medesima famiglia di piramidi razionali se si ha:

$$(3\alpha^2 + \beta^2)/\alpha\beta = (3\alpha_1^2 + \beta_1^2)/\alpha_1\beta_1,$$

cioè $3\alpha\alpha_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = \beta\beta_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$, ovvero essendo

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0, \quad 3\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1 \quad \text{e} \quad \alpha/\beta = \beta_1/3\alpha_1$$

ed infine $\beta_1 = \lambda\alpha$, $3\alpha_1 = \lambda\beta$ con $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 3$.

Per $\lambda = 1$ abbiamo $3\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \alpha$, cioè se β è divisibile per 3, e perciò α primo con 3, le piramidi corrispondenti alle coppie $[\alpha, \beta]$, $\left[\frac{\beta}{3}, \alpha\right]$ coincidono.

Per $\lambda = 3$ si ha $\beta_1 = 3\alpha$, $\alpha_1 = \beta$ e β primo con 3 e le piramidi corrispondenti alle coppie $[\beta, 3\alpha]$, $[\alpha, \beta]$ coincidono.

Concludendo abbiamo: *In ogni piramide regolare razionale a base esagonale, il lato della base e lo spigolo sono dati rispettivamente dalle formule:*

$$k\,|\beta^2 - 3\alpha^2|, \quad k(3\alpha^2 + \beta^2)$$

ove α e β sono interi primi tra toro, β primo con 3, e k *un numero razionale univocamente determinato* (1).

Riassunto dei resultati.

6. a) *I prismi retti regolari razionali sono soltanto quelli a base quadrata.*

b) *Le piramidi regolari razionali sono soltanto quadrangolari ed esagonali; nel primo caso le misure del lato della base, dello spigolo laterale e dell'altezza sono date rispettivamente dalle formule:*

$$4k\alpha\beta, \quad k(\alpha^2 + 2\beta^2), \quad k\,|\alpha^2 - 2\beta^2|,$$

(1) È facile provare che non esistono piramidi regolari razionali a base esagonale le cui facce laterali abbiano per misura un numero razionale.

con α *e* β *interi primi tra loro,* α *dispari,* k *razionale qualunque; nel secondo caso, le misure del lato della base, dello spigolo laterale e dell' altezza si esprimono rispettivamente con le formule:*

$$k\,|\beta^2 - 3\alpha^2|, \qquad k(3\alpha^2 + \beta^2), \qquad 2k\alpha\beta\sqrt{3},$$

con α *e* β *interi primi tra loro,* β *primo con* 3, *e* k *razionale qualunque.*

Firenze, Università.

Giovanni Sansone