Sul concetto di media

1. Il concetto di media non sembra abbia attirato l'attenzione dei matematici e degli statistici come forse avrebbe meritato. Definire, come molti fanno [1] seguendo CAUCHY, « media fra più quantità date una nuova quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate » non significa press' a poco nulla; e definire le singole specie di medie che si incontrano abitualmente (aritmetica, geometrica, armonica, ecc.) è opera bensì esatta, ma puramente formale ed antifilosofica, che può servire, e male, solo per un uso empirico. Eppure il concetto di media è così semplice e così perspicuo che basta fissarvi un poco l'attenzione per ritrovarne la vera natura e la conseguente definizione matematica, come il lettore vedrà subito dalle brevi considerazioni che seguono. Le quali considerazioni ho avuto occasione di svolgere incidentalmente, in una conferenza [2] alla Sezione Milanese di « Mathesis »; e non le avrei qui pubblicate, tanto esse sono ovvie, se a ciò non mi avesse indotto la strana circostanza che le molte persone interpellate (fra le quali docenti valorosi e scienziati illustri) hanno tutte mostrato di considerare queste osservazioni come effettivamente interessanti.

2. Cominciamo da un esempio caratteristico e di natura pratica. Un' automobile noleggiata, fornita di contachilometri, percorre 225 Km.: i primi 120 alla velocità di 60 Km. per ora, e gli altri 105 alla velocità di 105 Km. per ora. Qual'è

---

(1) Cfr. questo Periodico, Vol. IV, (1924), pag. 438.

(2) « Quello che vorremmo insegnare: la veduta matematica delle questioni ».

la sua velocità media? Qui ciascun lettore penserà che, avendo l'automobile impiegate tre ore a percorrere 225 Km., la sua velocità media è data da

$$225:3 = 75 \text{ Km. per ora.}$$

Cioè ciascuno considera come dimostrato che la media di due velocità v_1 e v_2, esplicantisi per gli spazi s_1 e s_2, è data, in generale, da

$$v_m = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} \tag{1}$$

cioè della cosidetta media armonica ponderata (coi pesi s_1 e s_2).

Supponiamo ora che il noleggiatore dell'automobile si interessi del consumo della benzina. Egli troverà che il consumo fatto per i 225 Km. non è quello che si sarebbe avuto se l'automobile avesse marciato a 75 Km. per ora, ma quello corrispondente alla velocità di 80 Km. per ora.

Appare da quanto abbiamo detto che la formula (1) è vera quando si voglia la velocità media con riguardo al consumo del tempo, mentre, quando si abbia riguardo al consumo della benzina, la velocità media risulterebbe [1]

$$v_m = 60 + \sqrt{\frac{s_1(v_1 - 60)^2 + s_2(v_2 - 60)^2}{s_1 + s_2}} \tag{2}$$

venendo data da una specie di media quadratica ponderata. E se al viaggiatore interessa il consumo di tempo, al proprietario interessa il consumo della benzina, e ciascuno quindi ha ragione di tenere alla propria media.

3. Ora è pacifico che la ricerca di una media ha lo scopo di semplificare una qualche nostra questione sostituendo, in

---

(1) Ammettiamo, che il consumo c, a parità di percorso, sia espresso dalla formula $c = a + b(v - 60)^2$ dove a e b indicano coefficienti costanti, avendo l'automobile considerata un minimo di consumo per la velocità di 60 chilometri per ora; e qui non ci interessa affatto sapere fino a qual punto tale formula empirica corrisponda alla realtà sperimentale.

essa, a due, o più, quantità date una quantità sola che valga a sintetizzarle, senza alterare la visione d'insieme del fenomeno considerato. Pertanto dall'esempio precedente e da altri analoghi che è inutile presentare, risulta questo: che non ha senso parlare di *media di due* (o più) *quantità*, ma ha senso parlare di media di esse *all'effetto della valutazione sintetica di un'altra grandezza che ne dipende.* Precisando ciò secondo la abituale metodologia matematica siamo indotti alla seguente

Definizione. - Data una funzione

$$y = f(x_1 x_2 \dots x_n)$$

di un certo numero, n, di variabili indipendenti, $x_1\ x_2 \dots x_n$, rappresentanti grandezze omogenee, dicesi media delle x_1 $x_2 \dots x_n$, *rispetto alla funzione* f, quel numero M che, sostituito alle $x_1\ x_2 \dots x_n$, dà il medesimo valore per la f che le $x_1\ x_2 \dots x_n$ stesse, cioè quel numero M tale che

$$f(M M \dots M) = f(x_1 x_2 \dots x_n). \tag{3}$$

È facile trasformare questa definizione in modo da dare la espressione analitica esplicita della media. A tale scopo si osservi che se, nella f, al posto delle $x_1\ x_2 \dots x_n$ mettiamo un unico valore x, la f stessa diviene una funzione di una sola variabile; chiamiamo f_1 questa funzione.

È dunque

$$f_1(x) = f(x x \dots x). \tag{4}$$

Insieme alla funzione

$$y = f_1(x)$$

consideriamo la funzione inversa che, usando il simbolismo generale delle operazioni, indichiamo con

$$x = f_1^{-1}\{y\}. \tag{5}$$

Ciò posto la media M risulta espressa da

$$M = f_1^{-1}\{f(x_1 x_2 \dots x_n)\}, \tag{6}$$

che, evidentemente, soddisfa alla definizione implicita della M data dalla (3).

4. È interessante illustrare il concetto esposto di media con i procedimenti della Nomografia [1], facendo vedere come si ottenga la media relativa a una qualunque funzione che sia rappresentata graficamente.

Per semplicità, dato anche che le nozioni di Nomografia sono poco diffuse, ci limiteremo al caso di una funzione di due sole variabili, per la comprensione del quale bastano gli elementi della Geometria analitica.

Consideriamo dunque una funzione di due variabili

$$y = f(x_1 x_2). \tag{7}$$

Assunti nel piano due assi coordinati cartesiani, relativi alle variabili x_1 e x_2, la (7) per ciascun valore $y = k$, definisce una curva di livello per la funzione y, nei punti della quale la y ha il valore k. La funzione $f(x_1 x_2)$ verrà rappresentata graficamente mediante l'insieme delle sue linee di livello, relative a valori di k abbastanza prossimi fra di loro (usualmente i valori interi 1, 2, 3 ...).

Ora, data una coppia di valori $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, questi definiscono un punto P che ha tali valori come coordinate: per il punto P passa una curva di livello (tracciata effettivamente o tracciabile per interpolazione).

Seguiamo questa linea di livello fino a incontrare in un punto Q la retta

$$x_1 = x_2$$

bisettrice del primo quadrante. La prima coordinata (o la seconda che è uguale alla prima) di questo punto Q dà il valore M della media richiesta.

Infatti, in quanto P e Q appartengono alla stessa linea di livello, risulta

$$f(MM) = f(\bar{x}_1 \bar{x}_2).$$

La seguente figura 1 rappresenta la funzione

$$y = 2x_1 + 3x_2$$

---

[1] Volendo un'idea della Nomografia si veda l'articolo di G. SUPINO « I fondamenti della Nomografia » in questo Periodico (luglio 1926).

mediante le linee di livello

$$y = 1, \quad y = 2, \quad \dots \quad y = 7.$$

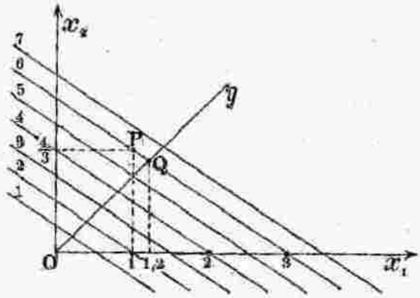

Fig. 1.

Il punto P rappresenta la coppia di valori

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

e il punto Q dà la media

$$M = 1{,}2.$$

Il grafico precedente è relativo alla media aritmetica ponderata.

È istruttivo anche il grafico seguente relativo alla funzione

$$y = x_1^2 + x_2^2.$$

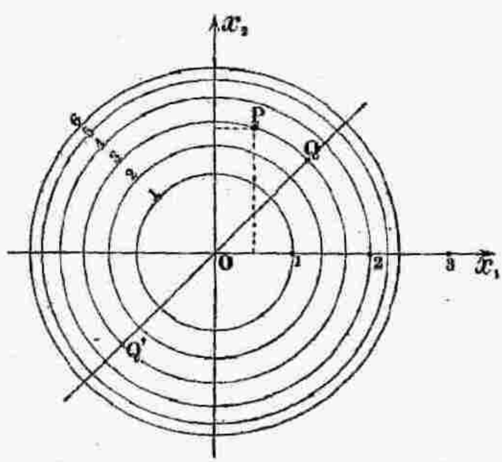

Fig. 2.

Il punto P corrisponde a $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}6$, e il punto Q dà $M = 1{,}2$.

Qui si noti che percorrendo la linea di livello passante per P, si incontra la bisettrice $x_1 = x_2$ non solo nel punto Q, ma anche nel punto Q': ciò significa che la media richiesta non è una funzione monodroma, come del resto appare dalla espressione analitica della media di cui qui si tratta (la media quadratica). Infatti in questo caso la (6) dà

$$M = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

5. Alla illustrazione geometrica del paragrafo precedente conviene aggiungere, a titolo di esempio, l'indicazione del come si presentino le medie più comuni.

Relativamente alla funzione

$$y = f(x_1 x_2 \dots x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

si ha

(7) $$f_1(x) = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)x$$

$$f_1^{-1}\{y\} = \frac{y}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

e quindi

(7') $$M = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n};$$

la M così risulta la media aritmetica ponderata.

Relativamente alla funzione

(8) $$y = f(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}$$

si ha

$$f_1(x) = x^{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)}$$

$$f_1^{-1}\{y\} = y^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}$$

e quindi

(8') $$M = (x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n})^{\left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right)};$$

la M così risulta la media geometrica ponderata.

Per $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, si ha la media geometrica abituale

$$M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Relativamente alla funzione

$$(9) \qquad y = f(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \dots + \frac{p_n}{x_n}$$

si ha

$$f_1(x) = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{x}$$

$$f_1^{-1}\{y\} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{y}$$

e quindi

$$(9') \qquad M = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \dots + \frac{p_n}{x_n}};$$

la M così risulta la media armonica ponderata

Relativamente alla funzione

$$(10) \qquad y = f(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

si ha

$$f_1(x) = nx^2$$

$$f_1^{-1}\{y\} = \sqrt{\frac{y}{n}}$$

e quindi

$$(10') \qquad M = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

la M così risulta la media quadratica.

Del tutto simile è la media quadratica ponderata relativa alla funzione

$$y = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2.$$

6. Capita molto spesso di dover considerare la media non di un numero finito di quantità, ma di un numero infinito: ad esempio quando si parla di temperatura media di un dato clima. Supponiamo qui, per semplicità (pur restando in una generalità molto ampia) che le quantità x di cui cerchiamo la media dipendano da un parametro t variabile con continuità fra due valori estremi a e b

$$x = x(t) \qquad\qquad a \leq t \leq b.$$

La funzione y rispetto alla quale vogliamo calcolare la media appare ora come una funzione di infinite variabili. È notevole il fatto che questa funzione y possa sempre esprimersi sotto la forma di un integrale definito. Infatti indichiamo con

$$\varphi \{ x \} \, dt$$

l'incremento che alla funzione y portano le x relative a t compreso fra t e $t + dt$: con ciò la y risulta data da

$$y = \int_a^b \varphi \{ x(t) \} \, dt. \tag{11}$$

In questo caso la funzione f_1 a cui si riduce la y quando si dia a tutte le x un medesimo valore (cioè, qui, si consideri la x costante) diviene

$$f_1(x) = \int_a^b \varphi \{ x \} \, dt \qquad \text{con } x \text{ costante}$$

cioè

$$f_1(x) = \varphi(x) \int_a^b dt = \varphi(x)(b - a) ;$$

e quindi la funzione inversa f_1^{-1} è

$$f_1^{-1}(y) = \varphi^{-1}\left(\frac{y}{b-a}\right).$$

Ciò posto la media delle nostre x, variabili con t, è

$$M = f_1^{-1}(y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\int_a^b \varphi \{ x(t) \} \, dt}{b-a}\right). \tag{12}$$

Conviene illustrare le cose ora indicate mediante un facile esempio.

Si abbia una piramide regolare, a base quadrata di lato 1, di altezza 2. Consideriamo i lati degli infiniti quadrati sezioni della piramide con piani paralleli alla base. Si cerca fra questi il lato medio rispetto al computo del volume della piramide (cioè il lato di base di un prisma quadrato di altezza 2 ed equivalente alla piramide).

Indichiamo con t la distanza della sezione dal vertice: il lato della sezione è dato da

$$x = \frac{t}{2}$$

e l'area della sezione stessa è data da

$$\varphi(x) = x^2 = \frac{t^2}{4}.$$

Qui è

$$\varphi(x) = x^2 \quad \text{e quindi} \quad \varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Inoltre il volume y, rispetto al quale cerchiamo la media, è espresso da

$$y = \int_0^2 x^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^2 t^2 dt = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ora, in questo nostro esempio è

$$f_1(x) = x^2 \cdot 2, \quad f_1^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$$

e quindi

$$M = \sqrt{\frac{2}{3} : 2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

cioè il lato medio, ha la lunghezza $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

È poi ovvio come si presenti la generalizzazione al caso in cui le x, di cui si cerca la media, dipendano da due parametri u e v

$$x = x(uv)$$

o anche da più. E su ciò quindi non è il caso di insistere.

7. Vogliamo invece vedere, da questo punto di vista, il concetto del così detto valor medio di una funzione

$$x = x(t)$$

data in un intervallo (a, b).

Questo valor medio viene ***definito*** dalla formula

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt.$$

Esso dunque si ottiene prendendo nella (12)

$$\varphi(x) = x$$

e quindi la funzione y rispetto a cui si calcola la media è

$$y = \int_a^b x dt$$

cioè l'area definita dalla funzione $x = x(t)$. La M è l'altezza del rettangolo di base $b - a$ equivalente all'area suddetta (figura 3).

Come il concetto di funzione, così quello di valor medio della funzione stessa, ha solo significato rispetto ad una data variabile indipendente: cambiando questa cambia naturalmente anche il valor medio. La cosa si verifica immediatamente su di un qualsiasi esempio (cfr. U. Cisotti, ***Lezioni di Analisi matematica***, terza edizione, pag. 322); ma è istruttivo vederne la ragione ***a priori***.

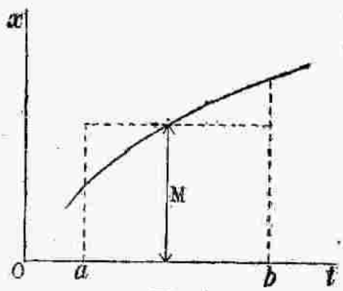

Fig. 3.

Il valor medio

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$$

appare come una media aritmetica ponderata. Diviso infatti l'intervallo (a, b) in parti infinitesime δ_i e indicato con x_i il valore della x relativo a un punto (ad esempio il punto di mezzo) dell'intervallo δ_i, il valore M risulta (a meno di un infinitesimo trascurabile)

$$M = \frac{\Sigma\, \delta_i x_i}{\Sigma\, \delta_i}.$$

Una trasformazione di variabile equivale a una dilatazione, in generale non uniforme, degli intervalli δ_i, che rappresentano i pesi relativi alle varie x_i;

$$\delta'_i = k_i \delta_i \qquad k_i \text{ variabile con } i;$$

quindi la nuova media

$$M' = \frac{\Sigma x_i \delta'_i}{\Sigma \delta'_i}$$

risulta una nuova media aritmetica ponderata, delle stesse x_i, ma con pesi affatto diversi dai precedenti, e quindi essa stessa diversa dalla precedente.

Milano, R. Università.

Oscar Chisini