Alcune considerazioni generali sui calcoli numerici

Nella seconda edizione dei miei *Esercizi di Analisi Matematica* che pubblicherò fra breve, ho incluso un capitolo sui calcoli numerici (uso dei mezzi ausiliari di calcolo, interpolazione, quadrature approssimate, ecc.) cui ho fatto precedere poche considerazioni generali sull'argomento che, se non m'inganno, sono di natura tale da poter interessare anche un pubblico un po' più vasto di quello cui normalmente si rivolge un libro di *Esercizi*. Pertanto, benchè si tratti di cose assai poco peregrine, anzi quasi *lapalissiane*, mi permetto di farle conoscere ai lettori del « Periodico », lusingandomi che qualcuno di essi possa ricavarne qualche giovamento quando gli capiterà di dover fare dei calcoli numerici.

Anzitutto mi sia concesso di spezzare una lancia in favore dell'importanza (anche didattica) dei calcoli numerici, che da parecchi Matematici puri non è, a mio giudizio, adeguatamente valutata. Non bisogna invero dimenticare che lo scopo ultimo delle formule dell'Analisi è quello di permettere il calcolo numerico dei valori di certe variabili dati che siano quelli di certe altre. Conseguentemente, benchè spesse volte al teorico non occorra spingersi fino all'effettivo calcolo numerico delle sue formule, ciò non pertanto egli deve essere sempre pronto a farlo, non appena se ne presenti la necessità. Altrimenti (amo dire ai miei studenti) egli non farebbe miglior figura di un artigliere che non sapesse sparare i suoi cannoni.

E non deve credersi che i calcoli numerici siano cosa facile da potervisi sempre accingere senza alcuna preparazione. Tutt'altro! Tant'è vero che, per poco si esca dai casi più semplici e banali, non molti sanno eseguirli correttamente. Ad esempio, mi ricordo del caso di un noto Matematico, sotto altri rispetti distintissimo, il quale, pregato dal collega di Fisica di calcolargli una certa serie maledettamente poco convergente, adoperava — sudando sette camicie — i logaritmi a 7 decimali, mentre il numero dei termini che aveva presi in considerazione non poteva permettergli di avere, nel risultato, più di 2 o 3 cifre esatte!

Per eseguire correttamente dei calcoli numerici bisogna sovratutto aver riguardo ai tre principî seguenti:

1. *Adeguare i mezzi all'approssimazione da raggiungersi.*

Occorre cioè che la potenza dei mezzi di calcolo che si adoperano (numero delle cifre delle tavole logaritmiche, numero dei termini considerati nelle serie, ecc.) sia quella necessaria e sufficiente per raggiungere quel grado di approssimazione che si desidera. Poichè non è sempre facile decidere la cosa *a priori*, nel dubbio, *melius est abundare quam deficere* ma, anche qui, bisogna rifuggire dalle esagerazioni. Invero un calcolatore che, per esempio, eseguisse gli ordinari calcoli della Fisica (in cui si hanno, al più, 3 o 4 cifre significative esatte) coi logaritmi a 7 decimali, farebbe la stessa figura di un alpinista che si armasse di corda e piccozza per salire sul monte dei Cappuccini [1].

2. *Eseguire i calcoli con la maggiore nitidezza e, finchè si possa, in « serie » (nel significato industriale della parola).*

Se, per esempio, si devono calcolare i valori (con 4 decimali) della funzione

$$y = \log_e \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{M} \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(ch'è l'integrale di $\sec x\, dx$ preso fra 0 e φ) in corrispondenza a valori di φ procedenti, a partire da zero, di 10 in 10 gradi; si comincerà col formarsi, in corrispondenza ai vari valori di φ, i valori di $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Successivamente, mediante le tavole logaritmiche a 5 decimali, si calcoleranno i corrispondenti valori di $\operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, e finalmente si passerà dai logaritmi

[1] Nota per chi non è mai stato a Torino: È un *monte* che domina le acque del Po da ben 75 metri d'altezza!

decimali delle tangenti ai loro logaritmi naturali prendendo i logaritmi (decimali) dei logaritmi trovati, aggiungendo a questi il numero costante $\mathrm{Log}\,\frac{1}{M} = 0{,}36222$ e passando quindi ai numeri. Il calcolo verrà all'uopo predisposto nel modo seguente:

φ	$\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\mathrm{Log\,tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\mathrm{Log\,Log\,tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\mathrm{Log\,log}_e\,\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	y
0°	45°	0	......	0
10	50	0,07619	$\bar{2}{,}88190$ $\bar{1}{,}24412$	0,1754
20	55	15477	$\bar{1}{,}18969$ $\bar{1}{,}55191$	3564
30	60	23856	$\bar{1}{,}37760$ $\bar{1}{,}73982$	5493
40	65	33133	$\bar{1}{,}52026$ $\bar{1}{,}88248$	7629
50	70	43893	$\bar{1}{,}64240$ 0,00462	1,0107
60	75	57195	$\bar{1}{,}75736$ 0,11958	3170
...	...	.....	......	.....

In quest'esempio è capitato di dover aggiungere a tutti i numeri di una colonna uno stesso numero (0,36222). Questa operazione, che è assai frequente, si esegue nel modo più comodo scrivendo il numero costante da aggiungere (o togliere) sull'orlo di una striscetta di carta:

0,36222

che si sovrappone successivamente ai vari numeri della colonna (cominciando dal basso, per non far macchie d'inchiostro). I risultati delle singole operazioni si scrivono nelle interlinee.

Un'altra osservazione da tener presente è che se vi sono delle coppie (o anche terne) di numeri di cui occorra far la somma, converrà predisporre le cose in modo che essi risultino scritti uno sotto l'altro. Bisogna cioè evitare, finchè è possibile, di dover ricopiare dei numeri, perchè ciò fa perdere del tempo ed è frequente causa di errori.

3. *Tutti i calcoli devono essere controllati.*

Anche il calcolatore più esperto, se ha da eseguire dei calcoli un po' lunghi, commette degli errori. Perciò, invece di cercare di conseguire il fine — quasi impossibile a raggiungersi — di *non sbagliare*, bisogna proporsi l'altro di *trovare gli errori e correggerli.* A tale scopo bisogna *sempre* predisporre un acconcio mezzo di controllo dei risultati ottenuti. E il maggior lavoro per ciò necessario sarà anche ampiamente ricompensato dalla minor tensione di spirito che si avrà in tutto il calcolo.

Nel caso frequente che si abbiano da calcolare i valori di una certa funzione *regolare* $f(x)$ (dotata cioè di derivate dei primi ordini continue nell'intervallo che si considera) in corrispondenza a valori di x ugualmente distanziati fra loro, il metodo di controllo più comunemente usato è la formazione del quadro delle differenze della funzione, che (se il numero dei valori calcolati di $f(x)$ lo consente) converrà spingere fino ad ottenere differenze con solo due o tre cifre significative. In tal modo gli eventuali errori commessi nei valori di $f(x)$, che si ripercuotono *ingranditi* nelle successive colonne delle differenze, si renderanno evidenti e potranno venire eliminati ripetendo il calcolo dei valori *sospetti*, cioè di quelli che si trovano nelle orizzontali dove si manifestano le più forti irregolarità nelle differenze.

Giova però avvertire che non sempre è facile discernere sicuramente le irregolarità nelle differenze dovute a piccoli errori nei valori di $f(x)$, da quelle — diciamo così — *fisiologiche*, dovute a fenomeni d'approssimazione, che spesso danno luogo ad inevitabili errori di una o anche due unità dell'ultimo ordine decimale nei valori calcolati. È questione di pratica e anche, un po', d'intuito. Comunque è sempre utile aver presenti i due specchietti seguenti che mostrano schematicamente e a titolo d'esempio, come si propaghino nelle colonne delle differenze dei varî ordini, degli errori di un'unità commessi in uno dei valori di $f(x)$ oppure in due successivi, in sensi diversi:

f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
	—		—	
—		—		+1
	—		+1	
—		+1		−4
	+1		−3	
+1		−2		+6
	−1		+3	
—		+1		−4
	—		−1	
—		—		+1
	—		—	
—		—		—
	—		—	

f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
	—		—	
—		—		+1
	—		+1	
—		+1		−5
	+1		−4	
+1		−3		+10
	−2		+6	
−1		+3		−10
	+1		−4	
—		−1		+5
	—		+1	
—		—		−1
	—		—	

Ad esempio, nel caso della funzione $y(\varphi)$ calcolata dianzi, il quadro delle differenze (sino al terz'ordine) si presenta sotto l'aspetto seguente:

y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
0,0000			
	+1754		
0,1754		+56	
	1810		+63
3564		119	
	1929		88
5493		207	
	2136		135
7629		342	
	2478		243
1,0107		585	
	3063		
3170			

e presenta una sufficiente regolarità per poterne inferire che i valori calcolati sono giusti. In quest'altro esempio invece (specchietto di sinistra) il 4° valore è errato (di 8 unità della 5ª decimale in più):

	y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
	0,93246			
		+1539		
	94785		−9	
		1530		+9
	96315		0	
		1530		$\boxed{-21}$
—	97845		$\boxed{-21}$	
		1509		$\boxed{+25}$
	99354		+4	
		1513		−5
	1,00867		−1	
		1512		0
	02379		−1	
		1511		
	03890			

y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
0,93246			
	+1539		
94785		−9	
	1530		+1
96315		−8	
	1522		+3
97837		−5	
	1517		+1
99354		−4	
	1513		+3
1,00867		−1	
	1512		0
02379		−1	
	1511		
03890			

com'è chiaramente indicato dall'andamento delle differenze delle quali, quelle più manifestamente anomale, sono state racchiuse in un rettangolo. Lo specchietto di destra mostra l'andamento delle differenze dopo ch'è stato corretto l'errore.

Riguardo ai *mezzi ausiliari di calcolo* (logaritmi e altre tavole, macchine, regolo calcolatore, strumenti grafici, abachi, ecc.) io penso che sovratutto non bisogna avere esclusivismi ed antipatie ma cercare invece di avvalersi di essi nel miglior modo possibile, adoperando ciascuno nei casi in cui è più appropriato. Per esempio il regolo calcolatore, verso cui molti Matematici puri hanno una ingiustificata antipatia, può rendere dei servigi veramente preziosi. Precisamente esso è indicato in tutti quei casi (e sono moltissimi!) in cui bastano sole 2 o 3 cifre significative. E così pure è utilissimo nell'interpolazione dei logaritmi a 7 decimali, altrimenti così faticosa!

Lo stesso si dica per le *macchine calcolatrici*, nei riguardi delle quali è molto difficile dare un giudizio sulla loro effettiva utilità in *tutti* i calcoli che si presentano nelle Matematiche pure ed applicate, in quanto tali macchine sono svariatissime e ricevono — si può dire, ogni giorno — importanti perfezionamenti. Comunque io ritengo che oggi, anche a prescindere dall'alto costo di queste macchine, non si può ancora dire che esse siano atte a sostituire i logaritmi in tutti i casi e, forse, non li sostituiranno mai completamente. È però fuori dubbio che in molti casi (calcolo di serie, integrazioni numeriche, ecc.) le macchine calcolatrici sono preziose, ed è un vero peccato che il loro alto costo ne ostacoli tanto la diffusione fra i Matematici, e perfino nei nostri Istituti universitari. Allo stato attuale della tecnica io credo che il tipo di macchina più conveniente alla comune dei Matematici sia quello conosciuto sotto il nome di « Brunswiga nova ».

Quanto agli strumenti di calcolo grafico, l'unico che mi sembri veramente pratico è il planimetro di Amsler.

Torino, Università.

F. Tricomi