

# I quesiti di Matematica per la classe di concorso A059

Prof. Michelangelo Di Stasio

Liceo Scientifico Statale *Galileo Galilei* di Piedimonte Matese (CE)

michelangelodistasio@tin.it

## **SOMMARIO**

Si propone la soluzione dei quesiti di Matematica assegnati all'ultimo concorso a cattedra. Il compito era costituito da tre quesiti di cui uno, il primo, attinente alla Biologia.

I quesiti di matematica proposti sembrano, per la loro semplicità poco adatti a valutare la preparazione dei futuri docenti di Matematica. Probabilmente, si è pensato che, poiché le risposte dovevano essere contenute in 22 righe, non fosse consigliabile proporre questioni più impegnative. C'è da dire, anche, che poco opportune ci sono sembrate le richieste riguardanti le modalità di presentazione, a livello di scuola secondaria inferiore, degli argomenti proposti: si veda, in particolare, il punto 3 del terzo quesito. È vero che si suggeriva di dare la risposta alla domanda posta servendosi del grafico, ma la costruzione di un tale grafico è alla portata di alunni di tale livello di studi? Una volta costruiti i punti  $[t_i, p(t_i)]$ , come spiegare, per un apprendimento significativo, che essi andavano raccordati con una curva e non, per esempio, con segmenti? E perché proprio con tale curva? A ben riflettere, però, in un concorso per insegnanti è bene che tali richieste siano presenti perché sono proprio esse che permettono di valutare le capacità didattiche dei futuri docenti.

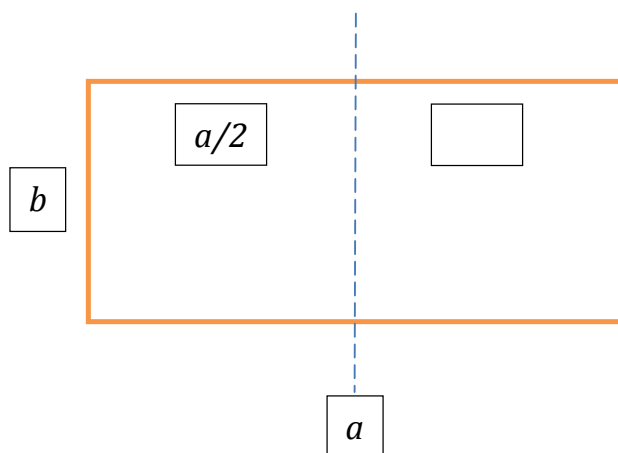
## **Quesito 2**

Un foglio rettangolare viene diviso in due fogli rettangolari uguali, tagliandolo lungo la retta che passa per i punti medi dei lati più lunghi. Ci si accorge che ciascuno dei due fogli più piccoli così ottenuti è un rettangolo simile a quello da cui si è partiti. Si dica qual è il rapporto tra i due lati del foglio iniziale, spiegandone il ragionamento in termini adatti per una presentazione nella scuola secondaria di primo grado e indicando applicazioni e motivazioni e possibili situazioni di laboratorio. Si dica poi sinteticamente cosa significa che due triangoli sono simili e che due quadrilateri sono simili. Si descriva infine in termini delle coordinate cartesiane una similitudine del piano in sé che mantiene fissa l'origine  $O$  degli assi.

### *Punto primo*

Innanzitutto, si ricorda che questa questione si ritrova nell'esame di Stato del 2000 della scuola secondaria superiore; precisamente, nel secondo quesito della prova di Matematica per i licei scientifici.

Siano, allora,  $a$  e  $b$ , con  $a > b$ , le misure dei lati del rettangolo rappresentativo del foglio rettangolare.



Si taglia tale rettangolo lungo la retta che passa per i punti medi del lato più lungo. Per i dati del problema deve valere la proporzione

$$a : b = b : \frac{a}{2},$$

da cui si deduce immediatamente che

$$b^2 = \frac{a^2}{2} \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Pertanto, il rapporto richiesto vale  $\sqrt{2}$  ed un rettangolo siffatto si può ottenere secondo la procedura seguente: si disegna un quadrato e la relativa diagonale;

poi, si disegna un rettangolo che ha come base e altezza rispettivamente la diagonale ed il lato del quadrato. Questo procedimento suggerisce il metodo più efficace per introdurre la questione a livello di scuola secondaria di primo grado.

Gli alunni sono di conseguenza invitati a:

- ✚ disegnare il rettangolo nel modo anzidetto;
- ✚ misurare i lati  $a$  e  $b$ ;
- ✚ calcolare, con l'ausilio di una calcolatrice, il rapporto  $a/b$  ;
- ✚ dividere il rettangolo con una retta passante per i punti medi del lato maggiore;
- ✚ calcolare il rapporto tra il lato maggiore e quello minore di uno dei due rettangoli ottenuti;
- ✚ osservare che i due rapporti ottenuti sono quasi uguali (è improbabile ottenere rapporti esattamente uguali);
- ✚ considerare che il valore di tale rapporto è molto vicino al valore di  $\sqrt{2}$ .

Si può anche condurre gli alunni ad una concettualizzazione più astratta della questione, ponendo loro la seguente domanda: *Se i due rettangoli sono simili, cioè quei due rapporti sono uguali, allora è sempre vero che il loro comune valore è  $\sqrt{2}$  ?*

Agli allievi si può far osservare che una realizzazione pratica di tale rettangolo è il foglio A4, il cui formato soddisfa le richieste del problema; in tal modo questo rettangolo esce dall'ambito della Geometria pura, per diventare il modello matematico di un oggetto della vita quotidiana che ritroviamo ogni volta che usiamo una stampante oppure una fotocopiatrice, rendendo così meno severo e inquietante il volto arcigno di  $\sqrt{2}$ . Tale è, infatti, il rapporto tra i lati del rettangolo in oggetto (ente matematico) e del foglio A4, che di tale rettangolo è una particolare realizzazione.

Far lavorare gli allievi su un foglio A4, serve a motivare meglio gli alunni e li spinge a comprendere che la Matematica è intorno a noi, anche negli oggetti più semplici della vita quotidiana.

È interessante domandarsi, anche, se il rettangolo metà di quello di partenza verifica la stessa proprietà, cioè se i suoi lati  $b$  e  $a/2$  sono nello stesso rapporto dei lati del rettangolo di lati  $b/2$  e  $a/2$ . E tutti gli altri rettangoli che si otterrebbero reiterando il procedimento?

### *Punto secondo*

Due quadrilateri sono simili se hanno:

- 1) gli angoli ordinatamente congruenti;
- 2) i lati omologhi in proporzione.

La definizione precedente è sovrabbondante nel caso dei triangoli; infatti, per i triangoli, le proprietà 1) e 2) non sono proprietà indipendenti, poiché l'esistenza dell'una comporta l'esistenza dell'altra.

### *Punto terzo*

Una similitudine del piano in sé è una trasformazione tale che, comunque siano scelti due punti  $A$  e  $B$ , detti  $A'$  e  $B'$  i loro corrispondenti nella trasformazione, si può scrivere

$$\frac{A'B'}{AB} = k ,$$

in cui  $k$  è detto rapporto di similitudine. Inoltre, una tale similitudine associa ad un qualsiasi triangolo  $T$  un triangolo  $T'$ , la cui area sta in rapporto  $k^2$  con quella

di  $T$ . Una generica similitudine, che mantiene fissa l'origine degli assi, ha equazione

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = -bx + ay \end{cases} \quad (\text{similitudine diretta}),$$

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = bx - ay \end{cases} \quad (\text{similitudine indiretta}).$$

Il rapporto di similitudine vale

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Una similitudine che tiene fissa l'origine può essere pensata come un ingrandimento ( $k > 1$ ) oppure come una riduzione ( $k < 1$ ) di un qualsiasi segmento  $OA$  che tenga fisso  $O$  e dilata oppure contrae il segmento  $OA$  da  $O$  ad  $A'$ , con  $A'$  trasformato di  $A$  nella similitudine.

### Quesito 3

Il metodo del  $^{14}\text{C}$ , o Carbonio 14, per la datazione dei reperti fossili si basa sui due fatti seguenti: i) la percentuale dell'isotopo  $^{14}\text{C}$  contenuta negli organismi viventi, rispetto al totale del Carbonio contenuto negli organismi stessi, ha un valore costante  $p_0$ , indipendente dall'organismo; ii) il Carbonio 14, che è un isotopo radioattivo, decade nel tempo e ha un tempo di dimezzamento  $d$  di circa 5700 anni. Di conseguenza, la percentuale di  $^{14}\text{C}$  rispetto al totale del Carbonio, che si trova nei resti di un organismo quando è passato un tempo  $d$  dopo la morte, è  $p_0/2$ . Inoltre, se  $p(t)$  indica la percentuale di Carbonio 14 quando è passato un tempo  $t$  dopo la morte, per ogni valore di  $t$  si avrà  $p(t + d) = \frac{1}{2}p(t)$ .

1. Quanto vale  $p(3d)$ ? Quanto vale all'incirca  $p(t)$  per  $t = 29.000$  anni?
2. Si disegnino due assi cartesiani, mettendo sull'asse orizzontale i tempi da 0 a 50000 anni e sull'asse verticale le percentuali da zero a 100. Si rappresentino poi sull'asse orizzontale i punti  $t_1 = d, t_2 = 2d, \dots, t_6 = 6d$  e si rappresentino nel piano i punti di coordinate  $[t_1, p(t_1)], [t_2, p(t_2)], \dots, [t_6, p(t_6)]$ .
3. Con argomentazioni adattabili per una presentazione nella scuola secondaria di primo grado, anche utilizzando il grafico, sia dia una stima del valore  $t^*$  in corrispondenza al quale la percentuale  $p(t^*)$  è il 70%.
4. Osservando che la percentuale  $p(t)$  segue una legge esponenziale del tipo  $p(t) = p_0 e^{-ct}$ , si esprima la costante  $c$  in termini del tempo di dimezzamento  $d$ . Grazie a questo si dia una formula per il valore  $t^*$  di cui al punto precedente.

#### Punto 1

Per il significato di  $d$ , si può scrivere che

$$p(3d) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_0.$$

Ora, 29000 anni corrispondono a

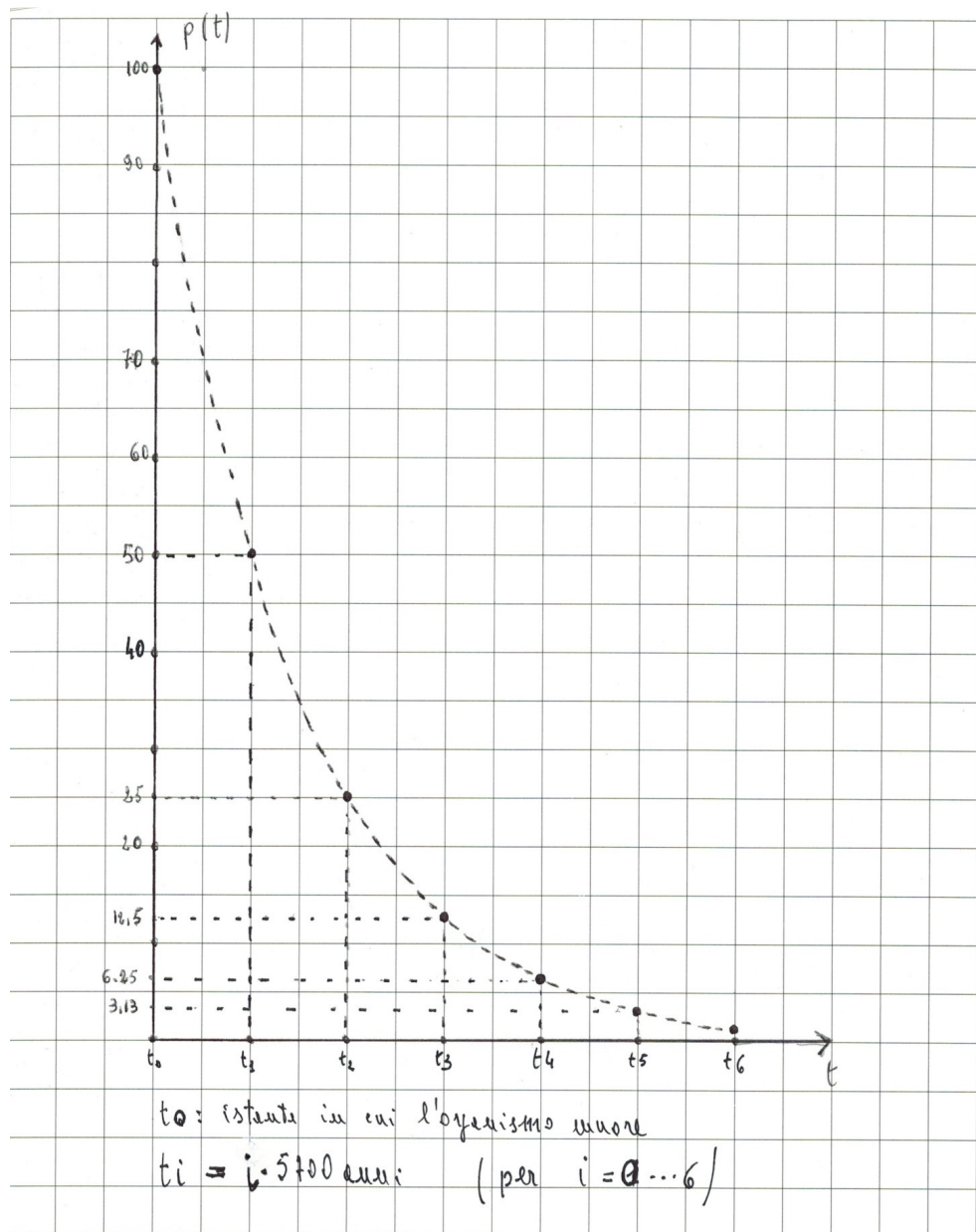
$$\frac{29000}{5700} = 5.08,$$

approssimativamente 5.1 tempi di dimezzamento. Pertanto, si ha

$$p(29000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{5.1} p_0 \cong 0.03 p_0.$$

#### Punto 2

Di seguito il grafico richiesto.



### Punto 3

Una possibile presentazione, come detto inizialmente non semplice, della questione a livello di scuola media inferiore potrebbe essere la seguente.

Indicati con 1 un tempo di dimezzamento, cioè il numero di anni, nel caso in esame 5700, alla fine dei quali la percentuale di C14 diventa la metà di quella iniziale, con 2 due tempi di dimezzamento e così via, si costruisce una tabella come la seguente che mette in relazione i tempi di dimezzamento e la percentuale di C14 corrispondente presente nell'organismo.

| $t$   | $p(t)$ |
|-------|--------|
| 0     | 100    |
| 1     | 50     |
| 2     | 25     |
| ..... | ...    |
| ..... | ...    |

La percentuale quindi diminuisce secondo le potenze di  $1/2$ . Perciò la relazione che descrive il fenomeno è

$$p = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

dove  $t$  è il numero dei tempi di dimezzamento e  $p$  è la percentuale di C14 corrispondente.

Si riportano in un sistema di assi cartesiani i tempi di dimezzamento in ascissa e le percentuali in ordinata ottenendo una serie di punti. Si dovrà far riflettere gli allievi sul fatto che la diminuzione del carbonio non avviene improvvisamente alla fine di ogni tempo di dimezzamento, ma avviene con continuità. Questa osservazione consentirà di unire i punti del piano cartesiano con una curva il cui andamento è suggerito dalla disposizione stessa dei punti e che sarà quella disegnata nella pagina precedente. Questa curva permette anche di vedere in quale momento la percentuale di C14 presente nell'organismo sarà uguale al

70%. Questa percentuale letta in ordinata corrisponde ad una ascissa che rappresenta, come si legge nel grafico, circa la metà di un tempo di dimezzamento.

#### *Punto 4*

La curva di equazione

$$p(t) = p_0 e^{-ct}$$

deve passare per il punto

$$\left(d, \frac{1}{2}p_0\right)$$

e, pertanto, deve essere

$$\frac{1}{2}p_0 = p_0 e^{-cd} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-cd} \rightarrow -cd = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow -cd = -0.69 \rightarrow c = \frac{0.69}{d}.$$

Dunque, la formula che risolve il punto precedente è

$$0.7 = e^{\left(-\frac{0.69}{d}\right)t},$$

da cui si ottiene immediatamente

$$-\left(\frac{0.69}{d}\right)t = \ln(0.7) \rightarrow t = \frac{0.36}{0.69}d \rightarrow t = 0.52 \cdot 5700 = 2945 \text{ anni}.$$

Si conclude che 2945 *anni* dopo la morte dell'organismo la percentuale di carbonio si è ridotta del 30%. L'espressione analitica di  $p(t)$  è del tipo

$$p(t) = p_0 e^{-ct} ,$$

laddove

$$p(t) = p_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{d}} = p_0 e^{\frac{t}{d} \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = p_0 e^{-0,69 \frac{t}{d}} = p_0 e^{-ct} ,$$

avendo, per brevità, posto

$$c = \frac{0,69}{d} .$$