I quesiti di Matematica per le Classi di concorso A047 e A049

Prof. Luigi Verolino
Università Federico II di Napoli
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione
Via Claudio, 21 [80125] Napoli
verolino@unina.it

SOMMARIO

In questa nota si propone la soluzione del compito di Matematica assegnato all'ultimo concorso a cattedra. Il compito, come gli altri scritti, è costituito da quattro (4) quesiti, da svolgersi in un tempo massimo di due ore e mezza.

INTRODUZIONE

Prima di iniziare la disamina analitica di ciascun quesito, che in quel che segue verrà risolto e commentato, è interessante iniziare con delle considerazioni di insieme sul compito proposto dal Ministero.
Il compito, nel suo complesso, è costituito da quattro (4) quesiti.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

prova scritta MATEMATICA valida per A047 e A049

Il *primo* quesito è piuttosto semplice, di livello liceale, poco adatto a scandagliare le caratteristiche dei nuovi docenti di scuola superiore. Il *secondo*, pure agevole, è troppo infarcito di domande una dietro l'altra e, francamente, mette un pochino di angoscia nel solutore. Il *terzo* è, in realtà, un doppio quesito, la cui prima parte ha poco a che vedere con la seconda. Il *quarto*, infine, è poco affine alle conoscenze di un docente di Matematica di secondaria superiore, essendo più adeguato a chi ha conoscenze fisiche-tecnologiche.
Il compito sembra essere eccessivamente lungo per quel che riguarda l'elaborazione e troppo poco concettoso: sostanzialmente, gli argomenti sono di difficoltà bassa e media ed il tempo a disposizione, per poterlo sviluppare adeguatamente, non ha certamente giocato a favore dei candidati. Soprattutto per quel che riguarda gli studi di funzione, lo spazio a disposizione era veramente esiguo: su un foglio di formato standard A4 di ventidue (22) righe occorreva effettuare lo studio di una funzione con relativa rappresentazione grafica dell'andamento.
Un caro amico, il prof. Francesco Auletta, per molti anni docente di Matematica presso alcuni licei scientifici napoletani, dopo aver visto la prova, ha affermato che si tratta di una prova priva di quell'armonia concettuale della Matematica

che dovrebbe caratterizzarla anche quando, e così dovrebbe essere, i temi proposti sono diversi. In pratica, per usare una metafora, è come se ad un violoncellista che concorre ad un posto nell'orchestra di un grande teatro lirico, anziché proporgli di suonare un brano da *Le quattro stagioni* di Vivaldi, gli proponessero di interpretare pezzi di musica Jazz, che, per quanto bello e piacevole possa essere questo genere musicale, è completamente fuori dagli interessi di quel violoncellista.

QUESITO 1

Si mostri che per ogni polinomio $P(x)$ di grado dispari e per ogni numero reale k esiste almeno una soluzione reale x dell'equazione $P(x) = k$. Si disegni poi il grafico qualitativo della funzione $f(x) = 4x^5 - 5x$, definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, e si stabilisca il numero degli elementi dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = k\}$, in dipendenza dal valore di $k \in \mathbb{R}$. Utilizzando le proprietà delle funzioni continue e delle funzioni derivabili si diano motivazioni rigorose per le affermazioni che vengono fatte.

Prima di iniziare la soluzione, vale la pena osservare che, nel testo ministeriale, non è specificato che si tratta di polinomi a coefficienti reali, anzi si comincia proprio con la frase "per ogni polinomio", che sottende una certa generalità. Ciò comporta che, assunto per esempio il polinomio di primo grado

$$P(x) = x - j \,,$$

con j unità immaginaria, l'equazione $P(x) = k$ non ammette alcuna soluzione reale per $k \in R$. Si tratta di un considerevole errore, a fronte di un quesito che si rivelerà di modesta difficoltà.

• Ammesso allora che si tratti di un polinomio a coefficienti reali, si può dire che una qualsiasi funzione polinomiale è definita e continua in ogni punto dell'asse reale. Ciò comporta che ogni polinomio di grado dispari ha come codominio tutto R e, pertanto, l'equazione algebrica

$$P(x) = k$$

ha sempre almeno una soluzione. Del resto, il teorema fondamentale dell'Algebra assicura che un'equazione di grado n ha sicuramente n soluzioni, non necessariamente tutte reali, e che le radici complesse si presentano sempre con le corrispondenti coniugate. Da ciò discende che, essendo $P(x)$ un polinomio di grado dispari, deve possedere almeno una radice reale.

• La funzione polinomiale

$$f(x) = 4x^5 - 5x$$

è definita e continua $\forall x \in R$ e, poiché è costituita da due monomi di grado dispari, è una funzione dispari e passa per l'origine degli assi, essendo $f(0) = 0$. Gli altri punti in cui interseca l'asse x sono le soluzioni reali dell'equazione algebrica di quarto grado

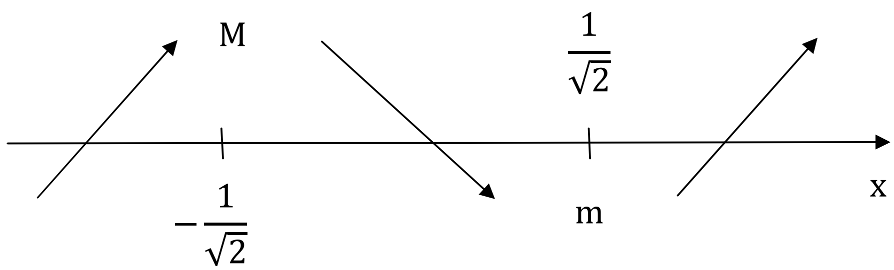
$$4x^4 - 5 = 0\,,$$

che, fattorizzando il polinomio, risultano pari a

$$\left(2x^2 - \sqrt{5}\right)\left(2x^2 + \sqrt{5}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cong \pm\, 1.0574\,.$$

La funzione è positiva per $-\alpha < x < 0 \ \vee x > \alpha$ e lo studio della prima derivata è presto fatto, dato che

$$f'(x) = 20x^4 - 5 > 0 \quad \rightarrow \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \ .$$



La funzione, allora, ha due estremi relativi: un massimo M ed un minimo m, rispettivamente, nei punti di coordinate

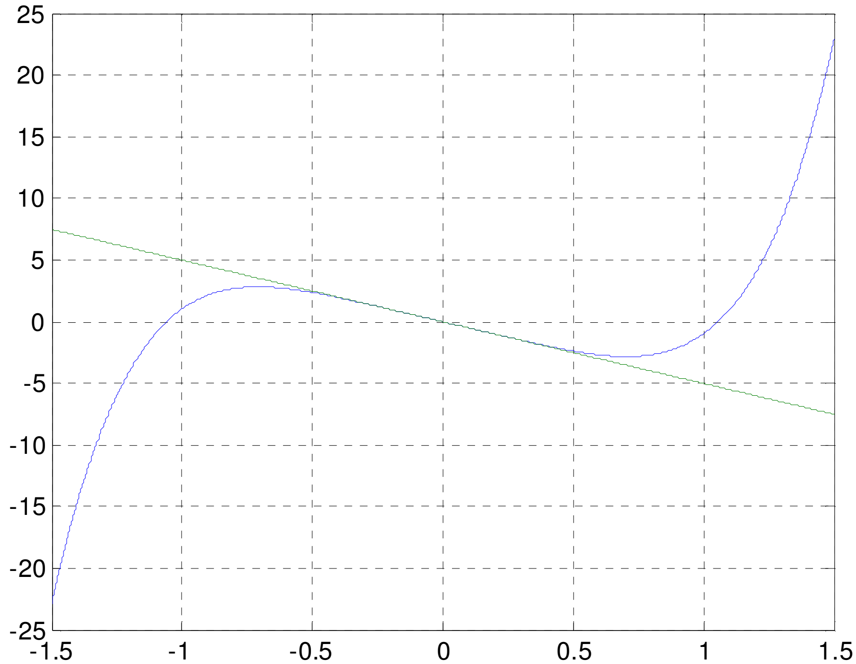
$$M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ 2\sqrt{2}\right) \ , \ \ m\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ -2\sqrt{2}\right).$$

La derivata seconda

$$f''(x) = 80x^3 \ ,$$

mostra che la funzione volge la concavità verso l'alto per $x > 0$, mentre verso il per $x < 0$ volge la concavità verso il basso. Nell'origine degli assi vi è un flesso discendente con tangente di inflessione pari a $y = -5x$.

La figura che segue mostra in blu il grafico della funzione ed in verde quello della tangente inflessionale.



• Dal grafico riportato si stabilisce facilmente che l'equazione

$$f(x) = k\,, \quad k \in R\,,$$

ammette

- una sola soluzione per $|k| > 2\sqrt{2}$;
- tre soluzioni distinte per $|k| < 2\sqrt{2}$;
- due soluzioni coincidenti ed una terza distinta per $k = \pm\, 2\sqrt{2}$.

Si tratta di un quesito più idoneo per gli esami di stato del liceo scientifico, ma meno appropriato a mettere in luce le abilità e le conoscenze di un futuro docente di Matematica.

QUESITO 2

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

e si diano una descrizione algebrica e una interpretazione geometrica dell'insieme delle soluzioni di ciascuna equazione e del sistema. Si scriva una equazione lineare nelle incognite x, y, z, diversa da quelle scritte sopra, che, aggiunta al sistema, ne lascia invariato l'insieme delle soluzioni. Si scriva inoltre una equazione lineare nelle incognite x, y, z che aggiunta al sistema iniziale lo rende impossibile (ossia non ci sono terne (x, y, z) che soddisfano le due equazioni iniziali e anche quella aggiunta). Si dia una interpretazione geometrica dell'equazione che si è aggiunta, in ciascuno dei due casi indicati.

• Il sistema di equazioni lineari assegnato nello spazio tridimensionale R^3

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \, , \\ 2x - y = 2 \, , \end{cases}$$

è costituito dalle equazioni cartesiane di due piani e rappresenta l'intersezione tra essi. Ora, posto

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) ,$$

dato che (nel riquadro è evidenziato un minore non nullo)

$$rango(A) = rango(A|b) \, ,$$

si conclude che il sistema assegnato, in forza del teorema di *Rouché-Capelli*, è compatibile, cioè ammette soluzioni ed i due piani sono *incidenti*.

I due piani sono, rispettivamente, ortogonali ai vettori

$$
\begin{array}{lll}
x + y + z = 3 & \perp & \vec{n}_1 = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}\ , \\
2x - y = 2 & \perp & \vec{n}_2 = 2\hat{x} - \hat{y}\ ,
\end{array}
$$

dove con $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ sono stati indicati i versori dei tre assi. Il prodotto vettoriale

$$
\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z} \neq \vec{0}
$$

rappresenta un vettore perpendicolare al piano individuato dai due fattori e da esso si deduce che i due piani avranno come intersezione una retta r, avente vettore direttore $\vec{v} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$ o parallelo a questo prodotto vettoriale, una cui possibile rappresentazione parametrica è

$$
r: \quad x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t\ , \quad y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t\ , \quad z = t\ ,
$$

con $t \in R$.

• Un'equazione lineare, diversa da quelle date, che lasci invariato l'insieme delle soluzioni del sistema, si ottiene dalla combinazione lineare delle due equazioni del sistema, scegliendo a piacere due numeri reali λ e μ non nulli, in modo che sia

$$
\lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y - 2) = 0\ .
$$

Ad esempio, posto $\lambda = -2$ e $\mu = 1$, si ottiene l'equazione

$$
3y + 2z = 4\ ,
$$

diversa dalle due assegnate e che, aggiunta al sistema, ne lascia invariato l'insieme delle soluzioni.

• Basta considerare un qualsiasi piano parallelo alla retta r e che non la contenga, come può essere semplicemente

$$x + y + z = 4\,,$$

per ottenere una nuova equazione lineare che, aggiunta al sistema iniziale, lo rende impossibile.

Si tratta di un tipico esercizio del PNI oppure del primo esame di Algebra e Geometria, specificatamente ammannito al primo anno di studi di tutte le facoltà scientifiche e tecniche e costituisce, dunque, uno scandaglio di nuovo troppo modesto per sondare la preparazione dei futuri docenti.

QUESITO 3

Si definiscano la divisione con resto tra i polinomi a coefficienti reali e la divisione con resto tra gli interi, mettendo in luce le analogie tra le due situazioni. Si descriva l'algoritmo di Euclide per la determinazione del massimo divisore comune di due interi e si spieghi perché produce in effetti il MCD. Si indichino possibili motivazioni, applicazioni, attività di laboratorio, riferimenti all'origine storica dell'algoritmo nella misura delle grandezze

• La divisione tra polinomi è analoga alla divisione ordinaria tra numeri ed è un *algoritmo* che consente di trovare il quoziente tra due polinomi, di cui il secondo di grado non superiore al grado del primo. Si tratta di un'operazione che si può svolgere a mano, poiché suddivide il problema in varie divisioni tra monomi, facilmente eseguibili. E proprio come tra i numeri

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}\,,$$

così tra polinomi in una variabile, definiti su un campo, sussiste l'uguaglianza

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

in cui $Q(x)$ è detto quoziente e $R(x)$ è il resto. Nel caso in cui il resto è nullo, si dice che il numeratore $N(x)$ è divisibile per il denominatore $D(x)$. Ad esempio, si può scrivere

$$\frac{x^4 + x^3}{x^2 + 1} = x^2 + x - 1 - \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Questa prima parte del quesito sembra piuttosto scollegata dalla seconda parte, quasi un refuso, tanto è difficile trovare una correlazione tra i due argomenti trattati. Qui non si vuole mettere in evidenza l'assenza di collegamento: si vuole più semplicemente affermare che, nella maniera in cui viene posto il quesito, sembra non esserci connessione tra la prima e la seconda parte.

• La ricerca del massimo comun divisore tra due numeri a e b è fatta, di solito, seguendo l'algoritmo standard che si insegna a scuola: si cercano i divisori dei due numeri, poi si prendono i divisori comuni con il minimo esponente. Questo algoritmo è sufficiente per numeri che hanno divisori primi piccoli, ma basta provare, per esempio, con la coppia $(4687, 2279)$ per toccare con mano la laboriosità e la difficoltà pratica di una simile maniera di procedere.

Si ricorda che un algoritmo è procedimento con cui trovare la soluzione di un problema. È formato da un elenco di istruzioni, che devono essere in numero finito, in modo tale da avere la certezza che prima o poi ci sarà un arresto. Inoltre, le istruzioni devono essere univocamente interpretabili, ossia non si possono avere dubbi sul significato da dare alle singole istruzioni. Così di fronte allo stesso problema, se usiamo tutti lo stesso algoritmo, sicuramente faremo le stesse cose.

Esiste un algoritmo molto più efficiente per la ricerca del massimo comun divisore tra due interi, riportato da Euclide (*Elementi*, Libro VII, Proposizione 1), e di immediata traduzione in un linguaggio informatico. L'algoritmo si basa sulla proprietà che segue.

TEOREMA - Se a e b sono naturali con $a \geq b > 0$ e

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Allora d è un divisore di a e b se, e solo se, è un divisore di b ed r.

La dimostrazione è immediata: poiché $r = a - qb$ ogni divisore di a e b è anche un divisore di r; al contrario, poiché $a = qb + r$, ogni divisore di b e di r è anche un divisore di a.

Si può allora procedere eseguendo successivamente le divisioni intere

$$a = q_0 b + r_0\,, \quad b = q_1 r_0 + r_1\,, \quad r_0 = q_2 r_1 + r_2\,,$$

fin quando si ottiene come resto zero. Il penultimo resto rappresenta il massimo comun divisore cercato. Infatti, applicando più volte il teorema citato, si ha la seguente catena di uguaglianze:

$$MCD(a;b) = MCD(b;r_0) = MCD(r_0;r_1) = MCD(r_1;r_2) = \cdots.$$

Questa catena si interrompe quando si trova che un resto r_i è divisore del resto precedente r_{i-1} e ciò accade quando la loro divisione dà resto zero, ovvero

$r_{i+1} = 0$, per cui, procedendo a ritroso, si ha che quel penultimo resto r_i è divisore sia di a che di b. Che poi r_i sia il divisore massimo tra a e b è garantito dal fatto che, nella ricerca, si procede dal numero più grande, vale a dire a, decrementando verso zero tramite le divisioni successive.

Ad esempio siano $a = 60$ e $b = 36$. Allora, 60 diviso 36 ha quoziente $q_0 = 1$ e resto $r_0 = 24$, ovvero $60 = 1 \cdot 36 + 24$. Poi, si esegue la divisione tra l'ultimo quoziente e l'ultimo resto, ovvero 36 diviso 24, ottenendo $q_1 = 1$ ed $r_1 = 12$, ovvero $36 = 1 \cdot 24 + 12$. Poi ancora 24 diviso 12, l'ultimo quoziente diviso l'ultimo resto, ottenendo $q_2 = 2$ e $r_2 = 0$. Avendo ottenuto un resto zero, l'algoritmo termina ed il MCD è il penultimo resto, ovvero r_1, cioè $MCD(60; 36) = 12$.

Usando la catena di uguaglianze illustrata sopra, si giunge allo stesso risultato con il divisore che *scorre* verso sinistra, mentre a destra *entra* il resto della divisione precedente:

$$MCD(60; 36) = MCD(36; 24) = MCD(24; 12) = 12.$$

• Euclide descrisse questo algoritmo nel suo libro degli *Elementi*. Invece di usare i numeri interi, però, utilizzò i segmenti di retta e, pertanto, l'algoritmo è utile anche a determinare il massimo comune divisore di due segmenti. Egli originariamente formulò il problema geometricamente, al fine di trovare una *misura* comune per la lunghezza di due segmenti, e l'algoritmo procedeva sottraendo ripetutamente il più corto dal più lungo.

Comunque, malgrado la sua venerabile età (300 a.C.), l'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore di una coppia di interi rimane uno degli strumenti assolutamente necessari nell'ambito della Teoria dei Numeri.

Si tratta di un quesito tradizionalmente lontano dagli studi matematici, dato che viene studiato nel corso di Algebra e poi viene ripreso solo per pochi, quale esempio di algoritmo iterativo, nei corsi introduttivi di Informatica.

QUESITO 4

Fissato un numero $\sigma > 0$, si consideri la funzione distribuzione *gaussiana* (o *normale*)

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, della quale si assume noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

1. Si disegni il grafico qualitativo della funzione g indicando la posizione dei flessi.
2. Si disegni il grafico qualitativo della funzione
$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$
3. Si mostri che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = 0$$
4. Si mostri, indicando solo i passi essenziali, che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx = \sigma^2$$
5. Si indichi il significato che, nel contesto della teoria della Probabilità, hanno le funzioni g ed f, il parametro σ e gli integrali che si trovano nei punti 3 e 4.

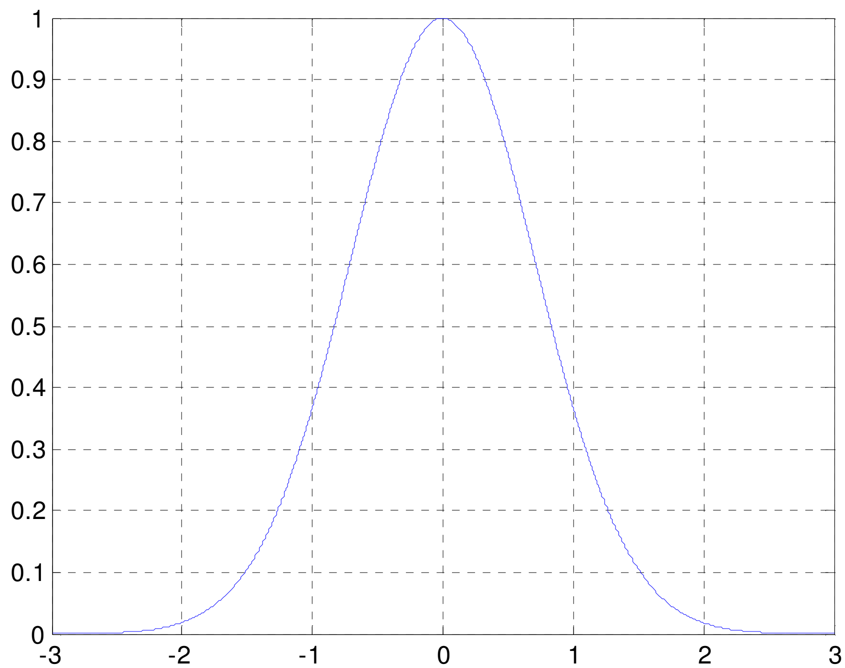
Questo quesito è stato già assegnato, in buona sostanza, agli Esami di Stato del 2007 nelle scuole italiane anche all'estero. Si tratta, dunque, ancora di un quesito di taglia liceale.

1. La ben nota funzione, anche detta campana o curva degli errori, di Gauss

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

è una funzione definita e continua $\forall x$, è pari con un massimo per $x = 0$. È disegnata nella figura che segue, riportando in ascisse ed in ordinate, rispettivamente le variabili normalizzate

$$u = \frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\,, \qquad y = \sigma\sqrt{2\pi}\, g(x) = \exp\left(-u^2\right).$$



Dal 1989 al 2001, il ritratto di Karl Friedrich Gauss (177 – 1855) ed una distribuzione normale di curve apparvero sulla banconota da dieci marchi tedeschi. Le funzioni gaussiane si collocano tra le funzioni speciali 'elementari' e sono introdotte nei primi corsi di Analisi; esse mancano però di integrali elementari, in altre parole, i loro integrali non possono essere espressi mediante composizioni semplici, operazioni razionali e radicali, di funzioni elementari.

Per quanto riguarda i flessi della funzione, basta eseguire le derivate

$$y' = -2u \exp(-u^2)\,, \quad y'' = 2(2u^2 - 1)\exp(-u^2)\,,$$

per concludere che la funzione volge la concavità verso l'alto per $|u| > 1/\sqrt{2}$, mentre per $|u| < 1/\sqrt{2}$ volge la concavità verso il basso; quindi, vi sono due flessi nei punti

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad x = u\sigma\sqrt{2} = \pm\,\sigma\,.$$

2. L'integrale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\;dt$$

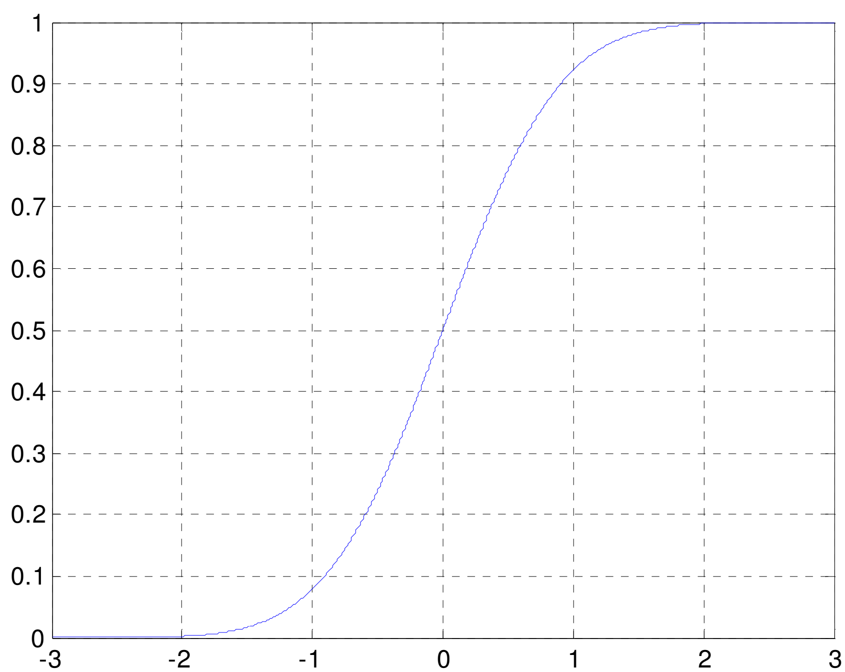
rappresenta la funzione di distribuzione cumulativa o funzione di ripartizione e si può riscrivere come segue

$$f(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x g(t)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/(\sigma\sqrt{2})} \exp(-u^2)\, du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

avendo chiamato con erf (x) la ben nota funzione degli errori. La funzione $f(x)$ è una funzione sempre positiva e crescente, essendo la sua prima derivata proprio $g(x)$ che è positiva, ha un flesso in $x = 0$, laddove $g(x)$ è massima, e possiede i due asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

Essa è rappresentata nella figura che segue, sempre in funzione della variabile adimensionale $u = x/(\sigma\sqrt{2})$.



3. Dato che la funzione $g(x)$ è pari, segue immediatamente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\ dx = 0\ ,$$

essendo l'integrando una funzione dispari.

4. Si osservi anzitutto che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, g(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, x\, g(x)\ dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, g'(x)\ dx\ ,$$

dato che $g'(x) = -xg(x)/\sigma^2$, come è agevole verificare. Integrando per parti ed essendo l'integrando esponenzialmente attenuato all'infinito, si può ancora scrivere

$$I = -\sigma^2 [x\, g(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = 0 + \sigma^2 = \sigma^2\ .$$

5. In Statistica ed in Teoria della Probabilità, le funzioni gaussiane si presentano come funzioni di densità della *distribuzione normale*, che è la distribuzione di probabilità limite di somme sufficientemente complicate di funzioni di distribuzione, in accordo con il teorema del limite centrale. La distribuzione normale relativa al valore atteso m e alla deviazione standard σ e normalizzata ha la forma generale

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

L'integrale del punto 3 indica semplicemente che la funzione gaussiana assegnata è a media nulla, mentre quello del punto 4 è la definizione della varianza, che in generale è data da

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \, g(x) \; dx \, .$$

È un quesito lungo ed elaborato, certamente molto più del primo, inadatto ad un candidato di estrazione matematica, più idoneo ad un candidato di estrazione tecnologica o fisica, vista la rilevanza applicativa della curva di Gauss.

CONSIDERAZIONI FINALI

Si sottolinea ancora una volta che la laboriosità dei quesiti proposti mal si adattava al poco spazio e tempo messo a disposizione del candidato e, pertanto, sarebbe stato più indicato proporre un compito con meno calcoli e maggiori spunti di riflessione, magari premiando maggiormente creatività algoritmica e fantasia risolutiva, come si fa, ad esempio, da sempre nei problemi di accesso alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Infine, vale la pena sottolineare che il primo quesito è sbagliato nella sua formulazione.