SCHEDA 2

Gli aspetti sorprendenti dell'uguaglianza: 1+8+27+64=100:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ 4^3 = 10^2$$

La somma dei primi quattro cubi è uguale ad un quadrato: il quadrato di dieci.

E' un caso unico oppure no? Vediamo le prime somme a cominciare da:

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

Ma è anche

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ 4^3 + 5^3 = 15^2$$

C'è una regolarità stupefacente! A secondo membro si ha sempre un quadrato e la sua base è la somma delle basi dei cubi, la somma cioè dei primi n numeri interi! Possiamo proseguire. Ne potremmo dedurre che, per ogni n, è:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ 4^3 + \cdots .. + n^3 = \ (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots . + n)^2$$

Già sappiamo che $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$?

Se no, possiamo applicare il metodo del piccolo Gauss e dedurre anche che:

$$1 + 3 + 5 + \cdots \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2 \quad (*)$$

E, ancora:

$$2 + 4 + 6 \ldots \ldots + (2n - 2) + 2n = ?$$

Torniamo alla nostra somma di cubi.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ 4^3 + \cdots .. + n^3 = \left(\frac{n(n+1}{2}\right)^2$$

Supposta vera per n, è vera anche per n+1? Vediamo passando da n al suo successivo n+1:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ 4^3 + \cdots .. + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2}{2}\right)^2$$

L'ultima uguaglianza è vera se

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1}{2}\right)^2$$

Che è una identità.

Quindi sappiamo che la nostra congettura vale per n=1,2,3,4,5. Essendo valida per n=5 deve essere tale anche per n=6; valida per n=7 deve esserlo per n=8 e così via. Essa è vera per ogni n, quindi è vera in generale.

E' questa una dimostrazione ottenuta applicando il principio d'induzione matematica.

Possiamo provare la validità di (*) anche nel seguente modo:

Sia P(n) la proposizione

$$1+3+5+\cdots\ldots+(2n-3)+(2n-1)=2n\cdot\frac{n}{2}=n^2$$

Per n =1 è P(1): $1=1^2$ che è valida

Supponiamola P(k) valida, cioè

$$1+3+5+\cdots\ldots+(2k-1)=k^2$$

Sommiamo 2k+1 ad entrambi i membri, otteniamo:

$$1+3+5+\cdots\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+\ (2k+1)$$

$$1+3+5+\cdots\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

Ovvero P(k+1) è valida.

Dimostrate con il principio d'induzione matematica che S(n)= $\frac{n(n+1)}{2}$ è vera per ogni n.

Trovate un'espressione per : $1^2+2^2+3^2+\ 4^2+\cdots..+n^2$ e dimostrate che è vera applicando l'induzione matematica.