Esame di stato 2015 - Proposta di risoluzione del problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. *individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione **concreta** che esse rappresentano.*

Premessa: Nella traccia non è specificato cosa accade se si effettuano per esempio 2,3 minuti di conversazione.

Si può ragionevolmente pensare che 2,3 minuti di conversazione effettuata corrispondano nel piano tariffario a 3 minuti, come si evince dalla lettura di una qualsiasi bolletta telefonica.

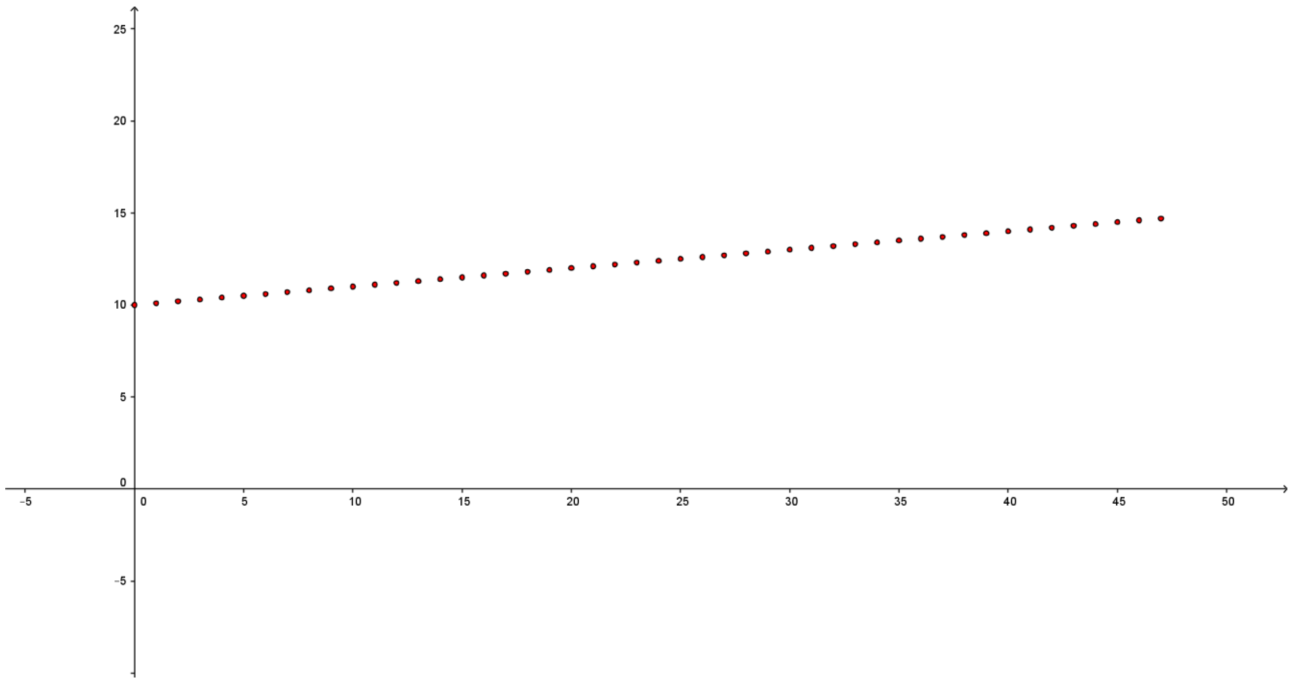
Più precisa è stata la formulazione di un analogo quesito assegnato dall' INVALSI a.s 2014-2015 (D8 pubblicato) in cui sta scritto: *"Il piano tariffario di un cellulare prevede un costo di 0,15 euro per lo "scatto alla risposta" più 0,12 euro per minuto o frazione di minuto di conversazione. Per esempio, se parlo 1 minuto e 1 secondo pago (0,15+0,24) euro, come se parlassi esattamente 2 minuti"*.

La funzione $f(x)$ (SPESA TOTALE) potrebbe essere interpretata in due modi diversi, fermo restando il fatto che la spesa è calcolata in euro, quindi l'arrotondamento deve essere fatto al centesimo di euro (*situazione concreta*).

a. come una successione crescente che ha come dominio $\{x \in N \mid 0 \leq x \leq 43200\}$ e codominio $f(x) \in Q$, con $10 \leq f(x) \leq 4330$ euro.

Quindi per 0 minuti di conversazione l'utente paga 10 euro, per 1 minuto di conversazione paga $1{,}10$ euro etc.

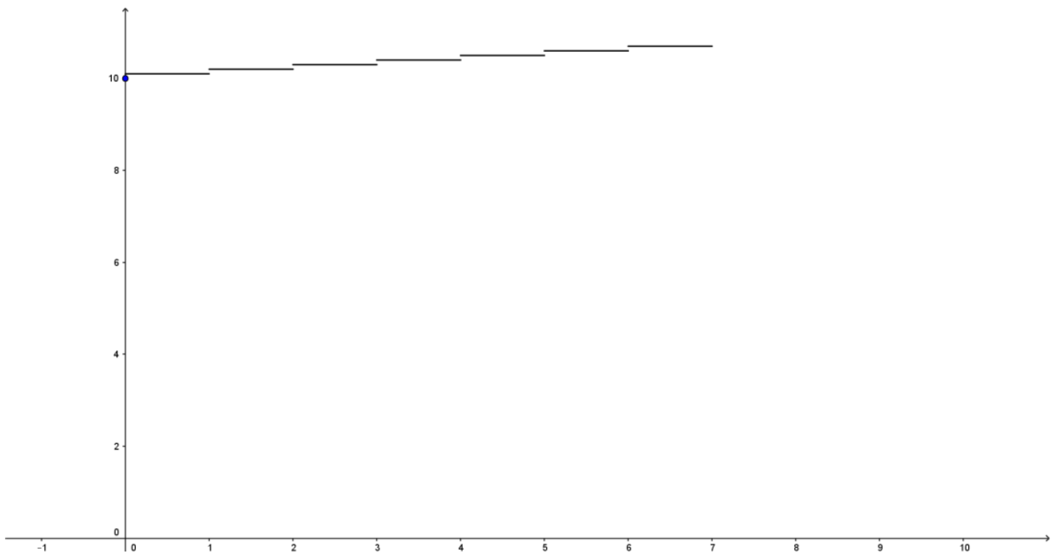
Rappresentazione di $y = f(x)$



b. Diversamente possiamo pensare che il dominio della funzione sia $\{x \in R \mid 0 \le x \le 43200\}$.

Quindi
per $x=0$ euro minuti di conversazione, l'utente paga 10 euro
per $0 < x \le 1$ minuti di conversazione, l'utente paga $1{,}10$ euro
per $1 < x \le 2$ minuti di conversazione, l'utente paga $1{,}20$ euro. etc.

Il grafico in tale caso è quello di una funzione a "step":



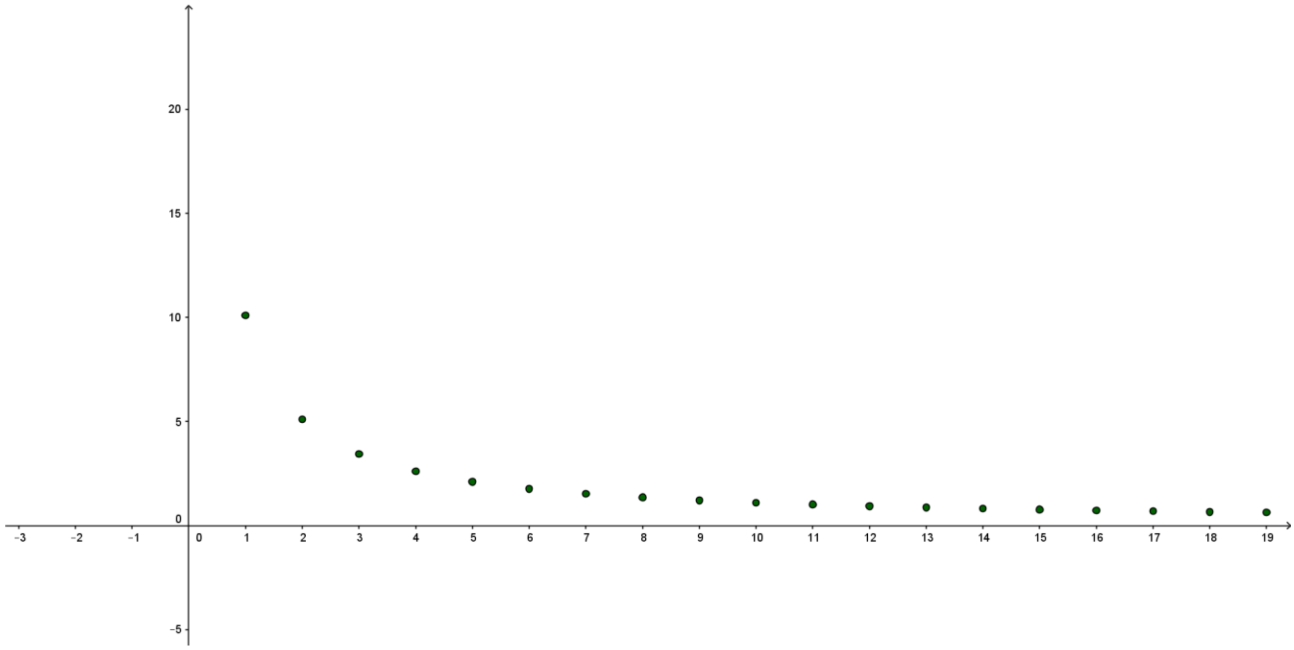
In ogni caso il minimo assoluto di $f(x)$ lo si ha per $x=0$, cioè quando l'utente non effettua alcun minuto di chiamata e $f(0)=10$ euro.
Il massimo valore di $f(x)$ lo si ha per $x=43200$, cioè quando l'utente rimane per un mese incollato al telefono e $f(43200)=4330$ euro.
Non ritengo siano corrette altre interpretazioni (per esempio considerare la funzione nel continuo) proprio per la richiesta esplicita presente nella traccia di riferirsi NON ad un modello ma ad una situazione concreta.

Esaminiamo ora come si comporta la funzione $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, costo medio al minuto.

- Osservazione: se $x=0$ non ha alcun senso calcolare il costo medio per nessuna telefonata fatta all'estero.

Se $1 \le x \le 43200$ minuti, il costo medio è:
$g(x)=\frac{f(x)}{x}=0.10+\frac{10}{x}; x \in N \mid 1 \le x \le 43200$.
Per esempio, se $x=1 \to g(1)=10.10$ euro/minuto; se $x=2 \to g(1)=5.10$ euro/minuto, etc.
E' una successione decrescente che ha come dominio $\{x \in N \mid 1 \le x \le 43200\}$ e codominio $g(x) \in Q$ e $0 < g(x) \le 1.10$ euro/minuto.

Il grafico è il seguente:



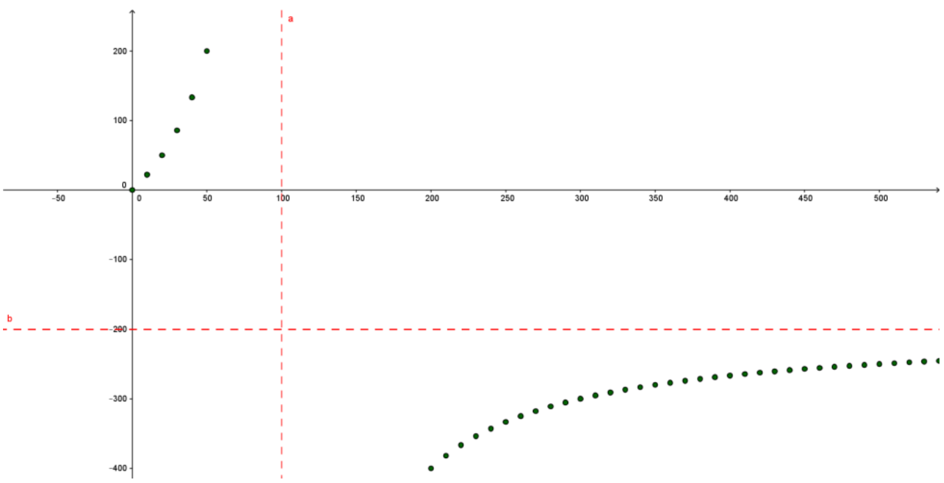
La successione $g(x)$ ha un massimo assoluto in $(1;1.10)$ per 1 minuto di chiamata effettuata e un minimo assoluto in $\left(43200;\dfrac{433}{4320}\right)$ essendo $g(43200)=\dfrac{433}{4320}\cong 0.10023$ ...... per 43200 minuti di chiamata.

Trattandosi di successioni e **contrariamente alla richiesta** non ha senso parlare di massimo e minimo relativo per $g(x)$.

2. *Detto* x_0 *il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina* x_1 *tale che* $g(x_1)=\dfrac{g(x_0)}{2}$.
Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 *in funzione di* x_0 *e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?*

$$g(x_1)=\frac{g(x_0)}{2}\rightarrow x_1=\frac{200x_0}{100-x_0}$$

$$x_1=h(x_0)$$



Anche i questo caso si tratta di una successione, con $1 \le x_0 \le 43200 \wedge x_0 \ne 100$ e codominio appartenente all'*insieme* dei razionali.

Poiché x_1 è il numero dei minuti di conversazione per i quali il costo medio è la metà del costo medio di una conversazione che dura x_0 minuti, la funzione $h(x_0)$ che esprime x_1 in funzione di x_0 , come si desume anche dall'osservazione del suo grafico, non ha significato realistico per $x_0 > 100$, dovendo essere $x_1 > 0$.

Trattandosi di successione quale significato attribuire all'asintoto verticale?

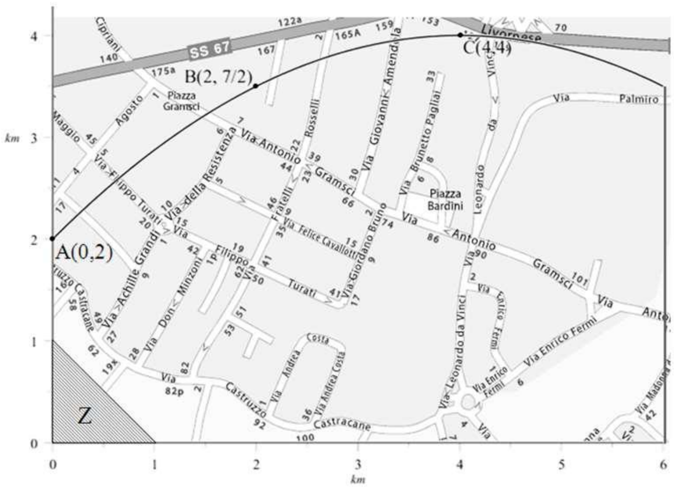
Per $x_0 = 99 \rightarrow x_1 = \dfrac{200 \cdot 99}{100 - 99} = 19800$

Per $x_0 = 100$, x_1 non esiste

Per $x_0 = 101 \rightarrow x_1 = \dfrac{200 \cdot 101}{100 - 101} = -20200$

Semplicemente l'asintoto verticale NON esiste

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse: la zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$. La porzione etichettata con la lettera Z, rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.



3. *Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.*

Osservazione:

- "*Si richiede di **verificare** che la funzione di secondo grado (parabola) passi per i punti A, B e C*" ma è evidente che la richiesta doveva essere*: **determinare** una funzione polinomiale di secondo grado che passi per i tre punti....*

Indicata con $y = ax^2 + bx + c$ l'equazione della generica parabola, imponendo il passaggio per i punti $A(0;2)$, $B\left(2;\frac{7}{2}\right)$ e $C(4;4)$ si perviene all'equazione richiesta: $y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$ con la limitazione $0 \le x \le 6$.

Osservazione:

- L'area della zona indicata nella figura presente nel testo potrebbe essere determinata calcolando l'area di un segmento parabolico al quale va aggiunta l'area di un trapezio. Procediamo con il calcolo integrale:

$$A = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx = 21\ km^2$$

L'area della zona Z è $0.5\ km^2$. L'area non coperta è $20.5\ km^2$.

La copertura del segnale in percentuale è: $\frac{20.5}{21} \cdot 100 \approx 97.6\%$, maggiore di quello dichiarato dalla compagnia nel sito Web.

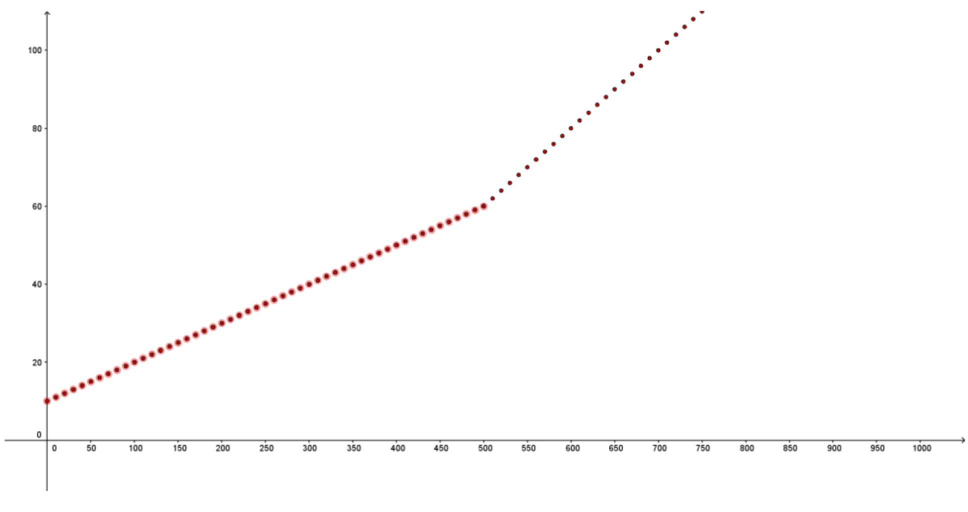
4. *L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.*

Indichiamo con $f_1(x)$ e con $g_1(x)$ le funzioni spesa totale e costo medio al minuto, nel nuovo piano tariffario.

La successione $f_1(x)$

$$f_1(x) = \begin{cases} 10 + 0.1x; 0 \le x \le 500 \\ 10 + 50 + (x - 500)0.2 = 0.2x - 40; 500 < x \le 43200 \end{cases} \quad \text{con } x \in N$$

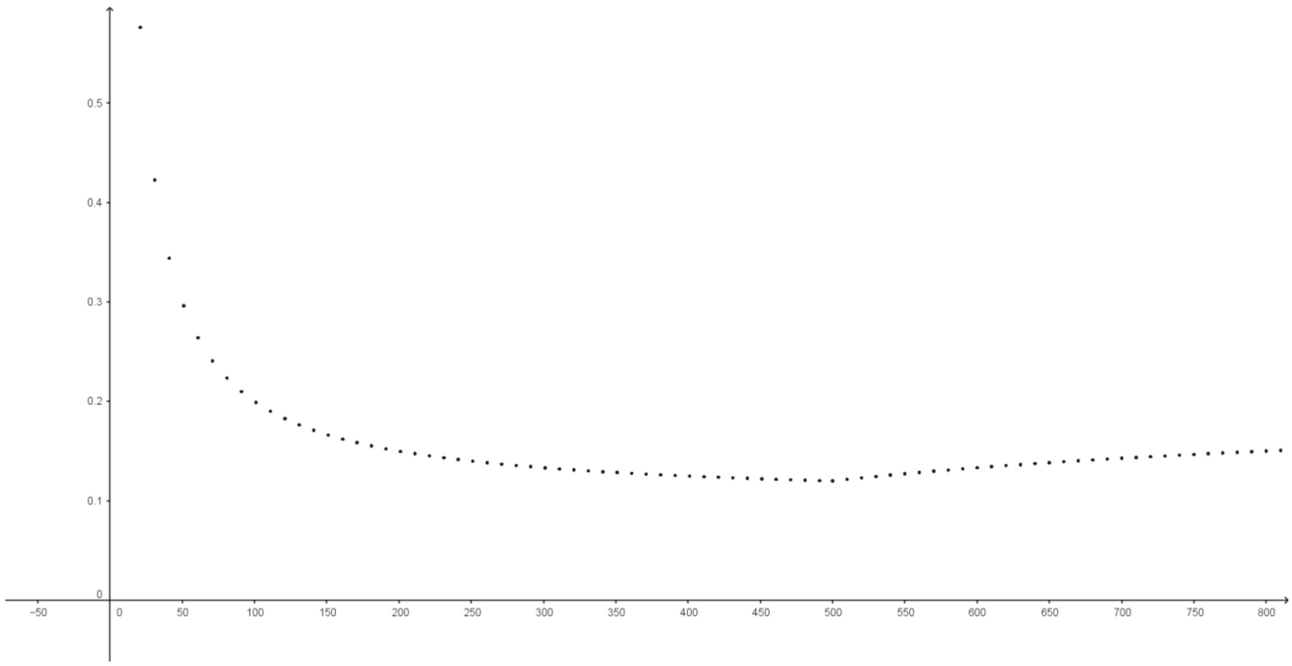
E' una successione crescente con minimo assoluto in $(0;10)$ e massimo assoluto in $(43200;8600)$



Funzione $g_1(x)$ costo medio

$$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{10+0.1x}{x};1<x\le 500\\ \dfrac{0.2x-40}{x};500<x\le 43200\end{cases}$$

Grafico



E' una successione decrescente per $1\le x<500$, crescente per $500<x\le 43200$.

Ha massimo assoluto in $(1;1.10)$ e minimo assoluto in $(500;0.12)$.

0.12 euro rappresenta il minimo costo medio in questo nuovo piano tariffario che si ottiene con 500 minuti di chiamata nel mese.
Il nuovo piano tariffario è altamente improbabile perché con esso vengono penalizzati proprio gli utenti che maggiormente utilizzano la connessione!

- **Trattandosi di successioni non ha alcun senso parlare di massimi e minimi relativi, continuità, derivabilità etc.....**

Conclusione:

Problema male formulato e concettualmente "povero".

Nella traccia si riscontrano errori e richieste che non hanno alcun senso proprio nella situazione concreta ripetutamente invocata nella traccia del problema.

Inesistente la parte di analisi studiata in classe quinta.

Ulteriori osservazioni sull'approssimazione.
Possiamo pensare di approssimare i valori di $g(x)$- costo medio- per esempio al centesimo di euro .
In tal caso i grafici di $g(x)$, $g_1(x)$ e di $x_1 = h(x_0)$ vengono a cambiare radicalmente.
Per esempio la funzione $g(x) = 0.10$, costante, per un numero x di minuti compresi tra $[2001; 43200]$. In particolare in tal caso non sono più vere le conclusioni relative alla funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 dove x_1 è il numero dei minuti di conversazione per i quali il costo medio è la metà del costo medio di una conversazione che duri x_0 minuti. La funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 ha significato realistico per $x_0 \geq 100$, diversamente da quanto sopra osservato.

x 0 = n. minuti di conversazione	costo medio	costo medio approssimato ai centesimi
100	0,2	0,20
101	0,199009901	0,20
102	0,198039216	0,20
103	0,197087379	0,20
104	0,196153846	0,20
105	0,195238095	0,20
106	0,1943396226	0,20
107	0,1934579439	0,20
4500	0,102222222	0,10
4000	0,1025	0,10
3500	0,102857143	0,10
3000	0,103333333	0,10
2500	0,104	0,10
2400	0,104166667	0,10
2100	0,104761905	0,10
2050	0,104878049	0,10
2040	0,104901961	0,10
2035	0,104914005	0,10
2030	0,104926108	0,10
2025	0,104938272	0,10
2020	0,104950495	0,10
2015	0,104962779	0,10
2010	0,104975124	0,10
2005	0,104987531	0,10
2001	0,104997501	0,10

Siamo in tema di contestualizzazione allora il costo medio è quello indicato nella terza colonna della tabella, come effettivamente è nei casi concreti.

Con tale approssimazione, per esempio si ha: $g(2005) = \frac{g(100)}{2} = \frac{g(101)}{2} = ... = \frac{g(105)}{2}$.