



Luoghi geometrici e loro applicazioni

Nicola Melone

Seconda Università degli Studi di Napoli

***Scuola Estiva di Matematica per i Docenti delle Scuole
Secondarie di 2° Grado***

Montegrotto Terme, 22-25 Luglio 2014

Excusatio non petita !

È compito arduo dare una veste nuova ad argomenti triti, conferire autorità a quelli che si trattano per la prima volta, nuovo splendore a quelli desueti, chiarezza a quelli oscuri, attrattiva a quelli noiosi, e insomma rendere a tutti la loro natura e alla natura tutto ciò che le appartiene. Perciò, anche se non si consegue lo scopo, averlo perseguito è già impresa sufficientemente bella e gloriosa

(Plinio il vecchio, Epistola dedicatoria, Naturalis Historiae)

***Ipotesi di lezione sui
luoghi geometrici***

- *Introduzione storica*
- *Considerazioni didattiche*
- *Curve famose come luoghi geometrici*

Introduzione storica

Le due fonti principali per la storia della Matematica della Grecia dal VI sec. a.C. al III sec. d.C. sono

Introduzione storica

Le due fonti principali per la storia della Matematica della Grecia dal VI sec. a.C. al III sec. d.C. sono

- *la **Collezione matematica** (o Synagoge) di **Pappo** (290 – 350 d.C. ?)*

Introduzione storica

Le due fonti principali per la storia della Matematica della Grecia dal VI sec. a.C. al III sec. d.C. sono

- la **Collezione matematica** (o *Synagoge*) di **Pappo** (290 – 350 d.C. ?)
- il **Commento al primo libro di Euclide** di **Proclo** (412-485).

Introduzione storica

Le due fonti principali per la storia della Matematica della Grecia dal VI sec. a.C. al III sec. d.C. sono

- la ***Collezione matematica*** (o *Synagoge*) di **Pappo** (290 – 350 d.C. ?)
- il ***Commento al primo libro di Euclide*** di **Proclo** (412-485).

In questi commentari si parla in particolare:

- dei ***tre problemi classici*** (*trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo e rettificazione della circonferenza, o quadratura del cerchio*);
- dello ***studio delle coniche come sezioni di un cono***, attribuito a Menecmo, (Pappo riferisce di un trattato in 5 libri sui '***Loci solidi***', attribuito ad Aristeo il vecchio (370 – 300 a.C.)).

Introduzione storica

La matematica greca classica e alessandrina ha subito l'influenza culturale di ***Platone*** ed ***Aristotele***.

Introduzione storica

La matematica greca classica e alessandrina ha subito l'influenza culturale di ***Platone*** ed ***Aristotele***.

Il ***contributo principale di Platone*** è stato quello di enfatizzare l'importanza di ***definizioni accurate*** e ***dimostrazioni rigorose***.

Introduzione storica

La matematica greca classica e alessandrina ha subito l'influenza culturale di *Platone* ed *Aristotele*.

Il *contributo principale di Platone* è stato quello di enfatizzare l'importanza di *definizioni accurate* e *dimostrazioni rigorose*.

Per *Aristotele*, invece, la definizione matematica di un ente non ne garantisce l'esistenza e quindi gli oggetti di studio devono essere *costruiti*.

Introduzione storica

La matematica greca classica e alessandrina ha subito l'influenza culturale di *Platone* ed *Aristotele*.

Il *contributo principale di Platone* è stato quello di enfatizzare l'importanza di *definizioni accurate* e *dimostrazioni rigorose*.

Per *Aristotele*, invece, la definizione matematica di un ente non ne garantisce l'esistenza e quindi gli oggetti di studio devono essere *costruiti*.

I matematici greci conoscevano molti *metodi di costruzione* (costruzioni mediante *meccanismi*, le cosiddette *curve meccaniche*), ma gli strumenti privilegiati furono *riga* e *compasso*, strumenti ideali per costruire proprietà di incidenza tra rette e circonferenze e non per studiare proprietà metriche.

Introduzione storica

Non sono completamente chiari i motivi che spinsero i greci a privilegiare la riga e il compasso e molteplici sono le ipotesi avanzate dagli storici.

Introduzione storica

Non sono completamente chiari i motivi che spinsero i greci a privilegiare la riga e il compasso e molteplici sono le ipotesi avanzate dagli storici.

Morris Kline sostiene, ad esempio, che ***Platone*** si opponesse all'uso di strumenti meccanici diversi da riga e compasso, in quanto appartenenti al mondo dei sensi e non a quello delle idee.

Introduzione storica

Non sono completamente chiari i motivi che spinsero i greci a privilegiare la riga e il compasso e molteplici sono le ipotesi avanzate dagli storici.

Morris Kline sostiene, ad esempio, che ***Platone*** si opponesse all'uso di strumenti meccanici diversi da riga e compasso, in quanto appartenenti al mondo dei sensi e non a quello delle idee.

Questa visione platonica fu adottata da ***Euclide*** nella ricostruzione della Matematica contenuta nella sua opera in 13 libri “***Elementi***” e quindi divenne il metodo esclusivo della matematica greca.

Introduzione storica

Negli *Elementi*, infatti, oltre cento problemi sono risolti mediante costruzioni basate sui primi tre postulati e quindi mediante il solo uso di riga e compasso, utilizzando precisamente soltanto le seguenti operazioni:

Introduzione storica

Negli *Elementi*, infatti, oltre cento problemi sono risolti mediante costruzioni basate sui primi tre postulati e quindi mediante il solo uso di riga e compasso, utilizzando precisamente soltanto le seguenti operazioni:

- *Tracciare la retta per due punti assegnati*
- *Tracciare la la circonferenza di assegnati centro e raggio (segmento);*
- *Determinare gli eventuali punti di intersezione tra due rette, tra una retta e una circonferenza, tra due circonferenze.*

Introduzione storica

Alcuni problemi non si riuscirono a risolvere con riga e compasso e per essi i matematici greci escogitarono altri metodi e strumenti, basati sulle ***curve meccaniche***.

In particolare l'attenzione si concentrò sui seguenti tre problemi, divenuti famosi nella storia della Matematica:

Introduzione storica

Alcuni problemi non si riuscirono a risolvere con riga e compasso e per essi i matematici greci escogitarono altri metodi e strumenti, basati sulle ***curve meccaniche***.

In particolare l'attenzione si concentrò sui seguenti tre problemi, divenuti famosi nella storia della Matematica:

I TRE PROBLEMI CLASSICI

- ***Duplicazione del cubo:** costruire lo spigolo di un cubo avente volume doppio di quello di un dato cubo;*
- ***Trisezione dell'angolo:** costruire due semirette che dividono un dato angolo in tre parti uguali;*
- ***Quadratura del cerchio:** costruire il lato di un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato.*

Introduzione storica

Le *curve meccaniche* (e i meccanismi per realizzarle) acquisirono, però, dignità matematica soltanto con due eventi straordinari, che consentirono di studiare tali curve come *luoghi geometrici*:

Introduzione storica

Le ***curve meccaniche*** (e i meccanismi per realizzarle) acquisirono, però, dignità matematica soltanto con due eventi straordinari, che consentirono di studiare tali curve come ***luoghi geometrici***:

L'Algebra simbolica di ***Francois Viète*** (1540-1603), che segnò il passaggio dalla ***matematica retorica*** (uso esclusivo del linguaggio naturale) e da quella ***sincopata*** di ***Diofanto*** (linguaggio naturale con alcune abbreviazioni) alla matematica simbolica



Introduzione storica

Le ***curve meccaniche*** (e i meccanismi per realizzarle) acquisirono, però, dignità matematica soltanto con due eventi straordinari, che consentirono di studiare tali curve come ***luoghi geometrici***:

L'Algebra simbolica di ***Francois Viète*** (1540-1603), che segnò il passaggio dalla ***matematica retorica*** (uso esclusivo del linguaggio naturale) e da quella ***sincopata*** di ***Diofanto*** (linguaggio naturale con alcune abbreviazioni) alla matematica simbolica



La Geometria analitica di ***René Descartes*** (1596-1650) e ***Pierre de Fermat*** (1601-1665), che consentì l'applicazione dell'algebra alla risoluzione di problemi geometrici



CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Nel 1959 ***Jean Dieudonné*** (1906-1992) nell'ambito di una manifestazione della OECE (attuale OCSE:Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico) ha affermato

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Nel 1959 ***Jean Dieudonné*** (1906-1992) nell'ambito di una manifestazione della OECE (attuale OCSE:Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico) ha affermato

***Perché insegniamo la matematica ai fanciulli?
Non certo per far loro conoscere una serie di teoremi più
o meno ingegnosi sulle bisettrici di un triangolo o la
successione dei numeri primi, che più tardi non avranno
occasione di adoperare ...***

vogliamo invece

***insegnare loro a ordinare e concatenare i propri pensieri
secondo il metodo dei matematici;***

***dato che questo esercizio rappresenta un sistema
eccellente per sviluppare***

chiarezza della mente e rigore del giudizio

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Dante nel Convivio afferma

***la Geometria è bianchissima,
in quanto è senza macula d'errore e certissima per sé***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Dante nel Convivio afferma

***la Geometria è bianchissima,
in quanto è senza macula d'errore e certissima per sé***

Bertrand Russel nella sua autobiografia scrive:

A undici anni cominciai a studiare la geometria, sotto la guida di mio fratello. Fu uno dei grandi avvenimenti della mia vita, inebriante come il primo amore. Non avrei mai immaginato che al mondo ci fosse una cosa così splendida

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Albert Einstein nella sua Autobiografia

All'età di dodici anni provai una nuova meraviglia di natura completamente diversa; e fu leggendo un libretto sulla geometria piana euclidea, capitatomi tra le mani al principio dell'anno scolastico. C'erano delle asserzioni, ad esempio quella che le tre altezze di un triangolo si intersecano in un sol punto, che - pur non essendo affatto evidenti - potevano tuttavia essere dimostrate con tanta certezza da eliminare qualsiasi dubbio. Questa lucidità e certezza mi fecero un'indescrivibile impressione. Il fatto che l'assioma dovesse essere accettato senza dimostrazione non mi dava fastidio.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

L'insegnamento della geometria è una componente essenziale per la formazione dei cittadini.

Attraverso lo studio della geometria, infatti:

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

L'insegnamento della geometria è una componente essenziale per la formazione dei cittadini.

Attraverso lo studio della geometria, infatti:

- ***si educa ad una corretta visione e rappresentazione dello spazio***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

L'insegnamento della geometria è una componente essenziale per la formazione dei cittadini.

Attraverso lo studio della geometria, infatti:

- ***si educa ad una corretta visione e rappresentazione dello spazio***
- ***si apprende l'uso del ragionamento deduttivo***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

L'insegnamento della geometria è una componente essenziale per la formazione dei cittadini.

Attraverso lo studio della geometria, infatti:

- ***si educa ad una corretta visione e rappresentazione dello spazio***
- ***si apprende l'uso del ragionamento deduttivo***
- ***si possono trasmettere aspetti estetici e culturali della geometria***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

L'insegnamento della geometria è una componente essenziale per la formazione dei cittadini.

Attraverso lo studio della geometria, infatti:

- *si educa ad una corretta visione e rappresentazione dello spazio*
- *si apprende l'uso del ragionamento deduttivo*
- *si possono trasmettere aspetti estetici e culturali della geometria*
- *si possono mostrare applicazioni della Matematica alla quotidianità*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

- 1. È un eccellente esercizio di comprensione di un testo***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

- 1. È un eccellente esercizio di comprensione di un testo***
- 2. Consente l'uso di geometria euclidea, algebra elementare, trigonometria, calcolo infinitesimale per la costruzione di semplici modelli matematici (rappresentazione analitica di un luogo) ed ha un naturale legame con la Fisica***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

- 1. È un eccellente esercizio di comprensione di un testo*
- 2. Consente l'uso di geometria euclidea, algebra elementare, trigonometria, calcolo infinitesimale per la costruzione di semplici modelli matematici (rappresentazione analitica di un luogo) ed ha un naturale legame con la Fisica*
- 3. Abitua a schematizzare attraverso un modello grafico una proposizione geometrica: un disegno, non preciso ma corretto, che trasferisca su carta le relazioni e le implicazioni logiche tra oggetti*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

- 4. Abitua a eseguire costruzioni geometriche guidate da un testo scritto***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

- 4. Abitua a eseguire costruzioni geometriche guidate da un testo scritto***
- 5. Il legame con le “curve meccaniche” dei matematici greci e con i problemi di costruzione classici consente un naturale aggancio storico-filosofico con il mondo greco classico dal VI secolo a.C. al III secolo d.C.***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Lo studio dei *luoghi geometrici* mi sembra uno strumento molto efficace sia all'interno della matematica che per i suoi naturali legami con altre discipline.

4. *Abitua a eseguire costruzioni geometriche guidate da un testo scritto*
5. *Il legame con le “curve meccaniche” dei matematici greci e con i problemi di costruzione classici consente un naturale aggancio storico-filosofico con il mondo greco classico dal VI secolo a.C. al III secolo d.C.*
6. *L'uso **consapevole e ragionato** dei software didattici (Matlab, Mathematica, Cabri, Geogebra, ...) stimola e allena alla rappresentazione dinamica di oggetti matematici, alla formulazione di ipotesi e alla loro verifica*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Una definizione generale di luogo geometrico può essere la seguente:

Definizione 1. Un luogo geometrico di uno spazio euclideo n -dimensionale E^n è un insieme **costituito** dai sottospazi verificanti una assegnata proprietà $\mathcal{P}$.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Una definizione generale di luogo geometrico può essere la seguente:

*Definizione 1. Un luogo geometrico di uno spazio euclideo n -dimensionale E^n è un insieme **costituito** dai sottospazi verificanti una assegnata proprietà $\mathcal{P}$.*

In un piano euclideo E^2 solitamente i luoghi geometrici sono descritti da punti, quindi:

*Definizione 2. Un luogo geometrico di uno piano euclideo E^2 è un insieme **costituito** dai punti verificanti una assegnata proprietà $\mathcal{P}$.*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

1. **circocentro** di un triangolo: luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

1. **circocentro** di un triangolo: luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo
2. **incentro** di un triangolo: luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati del triangolo (mediante le 3 bisettrici)

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

1. **circocentro** di un triangolo: luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo
2. **incentro** di un triangolo: luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati del triangolo (mediante le 3 bisettrici)
3. **asse** di un segmento: luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

1. **circocentro** di un triangolo: luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo
2. **incentro** di un triangolo: luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati del triangolo (mediante le 3 bisettrici)
3. **asse** di un segmento: luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
4. **bisettrice** di un angolo: luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

Luoghi geometrici *lineari*

1. **circocentro** di un triangolo: luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo
2. **incentro** di un triangolo: luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati del triangolo (mediante le 3 bisettrici)
3. **asse** di un segmento: luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
4. **bisettrice** di un angolo: luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo
5. **piano bisettore** di un diedro: luogo dei punti equidistanti dalle facce del diedro

6. Le **coniche** come luoghi geometrici di un piano euclideo $\mathbf{E}^2$

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

6. Le **coniche** come luoghi geometrici di un piano euclideo E^2

Circonferenza: luogo dei punti la cui distanza da un punto dato (centro)
è costante (raggio)

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

6. Le **coniche** come luoghi geometrici di un piano euclideo E^2

Circonferenza: luogo dei punti la cui distanza da un punto dato (centro) è costante (raggio)

Ellisse: luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi (**fuochi**);

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

6. Le **coniche** come luoghi geometrici di un piano euclideo E^2

Circonferenza: luogo dei punti la cui distanza da un punto dato (centro) è costante (raggio)

Ellisse: luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi (**fuochi**);

Parabola: luogo dei punti equidistanti da un punto (**fuoco**) e da una retta (**direttrice**);

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

6. Le **coniche** come luoghi geometrici di un piano euclideo E^2

Circonferenza: luogo dei punti la cui distanza da un punto dato (centro) è costante (raggio)

Ellisse: luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi (**fuochi**);

Parabola: luogo dei punti equidistanti da un punto (**fuoco**) e da una retta (**direttrice**);

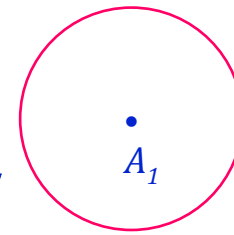
Iperbole: luogo dei punti per i quali è costante il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi (**fuochi**).

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Esempi

7. Due generalizzazioni elementari dell'asse di un segmento in $\mathbf{E}^2$ e in $\mathbf{E}^3$

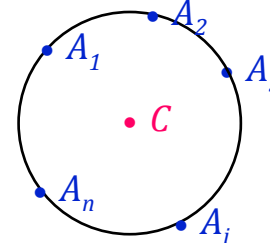
7.1 Il luogo dei punti di $\mathbf{E}^2$
equidistanti da n
punti $A_1, A_2, \dots, A_n$
fissati è



se $n=1$



se $n=2$

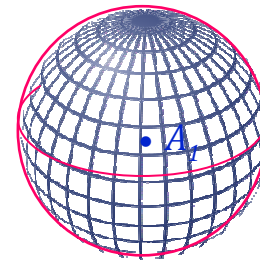


se $n \geq 3$ e i punti appartengono
ad una stessa circonferenza

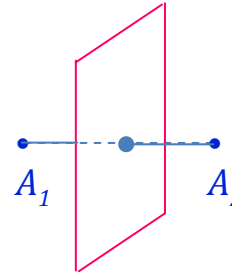
ϕ

se $n \geq 3$ e i punti non appartengono
ad una stessa circonferenza

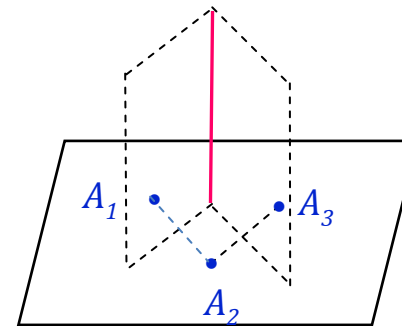
7.2 Il luogo dei punti di E^3 equidistanti da n punti $A_1, A_2, \dots, A_n$ fissati è



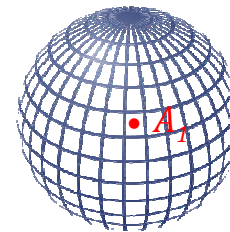
se $n=1$



se $n=2$



se $n=3$ e i punti non sono allineati

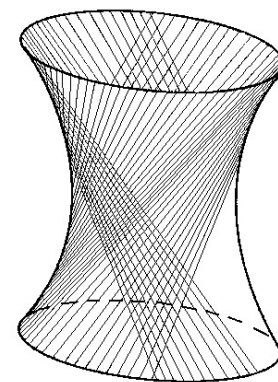
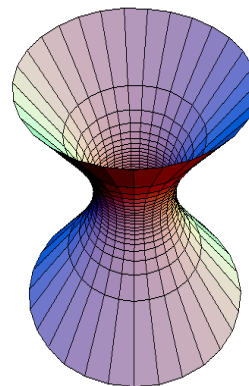


se $n \geq 3$ e i punti appartengono ad una stessa sfera

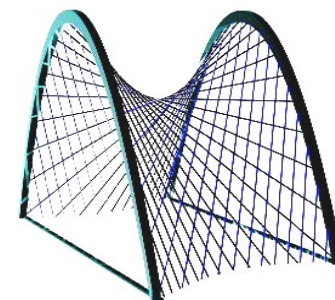
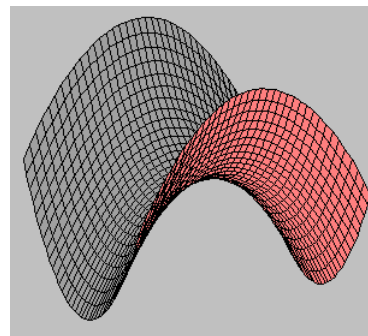
ϕ

se $n \geq 3$ e i punti non appartengono ad una stessa sfera

8. Il luogo delle rette di E^3 incidenti 3 rette sghembe è un iperboloide iperbolico



9. Il luogo delle rette di E^3 parallele ad un piano ed incidenti 2 rette sghembe è un paraboloide iperbolico



CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

a) gli oggetti geometrici fissi

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) gli oggetti geometrici fissi***
- b) il punto che descrive il luogo***

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) gli oggetti geometrici fissi*
- b) il punto che descrive il luogo*
- c) gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) gli oggetti geometrici fissi*
- b) il punto che descrive il luogo*
- c) gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*
- d) le relazioni matematiche cui deve soddisfare il punto che
descrive il luogo*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) gli oggetti geometrici fissi*
- b) il punto che descrive il luogo*
- c) gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*
- d) le relazioni matematiche cui deve soddisfare il punto che
descrive il luogo*

Per determinare la rappresentazione analitica di un luogo si procede al modo seguente:

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) *gli oggetti geometrici fissi*
- b) *il punto che descrive il luogo*
- c) *gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*
- d) *le relazioni matematiche cui deve soddisfare il punto che descrive il luogo*

Per determinare la rappresentazione analitica di un luogo si procede al modo seguente:

- *si individua un “conveniente” riferimento cartesiano*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) gli oggetti geometrici fissi*
- b) il punto che descrive il luogo*
- c) gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*
- d) le relazioni matematiche cui deve soddisfare il punto che
descrive il luogo*

Per determinare la rappresentazione analitica di un luogo si procede al modo seguente:

- si individua un “conveniente” riferimento cartesiano*
- si introducono i parametri nell’ambito degli oggetti variabili*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Per affrontare lo studio dal punto di vista analitico di un luogo geometrico di un piano euclideo E^2 definito da una proprietà $\mathcal{P}$, è utile rappresentare la proprietà $\mathcal{P}$ con un disegno evidenziando:

- a) *gli oggetti geometrici fissi*
- b) *il punto che descrive il luogo*
- c) *gli oggetti geometrici variabili che fanno descrivere il luogo*
- d) *le relazioni matematiche cui deve soddisfare il punto che descrive il luogo*

Per determinare la rappresentazione analitica di un luogo si procede al modo seguente:

- *si individua un “conveniente” riferimento cartesiano*
- *si introducono i parametri nell’ambito degli oggetti variabili*
- *mediante le relazioni matematiche si esprimono le coordinate del punto che descrive il luogo in funzione dei parametri introdotti (equazioni parametriche del luogo)*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Molti luoghi geometrici sono “***elementari***”, mancano cioè oggetti geometrici variabili (di cui alla lettera *c*) e le relazioni matematiche (di cui alla lettera *d*) collegano direttamente il punto che descrive il luogo agli oggetti geometrici fissi.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Molti luoghi geometrici sono “*elementari*”, mancano cioè oggetti geometrici variabili (di cui alla lettera *c*)) e le relazioni matematiche (di cui alla lettera *d*)) collegano direttamente il punto che descrive il luogo agli oggetti geometrici fissi.

In tali casi la rappresentazione analitica del luogo è ***molto semplice***, essendo sufficiente imporre alle coordinate cartesiane del generico punto $P(x,y)$ del piano di verificare le relazioni matematiche contenute nella definizione (di cui alla lettera *d*)).

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Molti luoghi geometrici sono “*elementari*”, mancano cioè oggetti geometrici variabili (di cui alla lettera *c*)) e le relazioni matematiche (di cui alla lettera *d*)) collegano direttamente il punto che descrive il luogo agli oggetti geometrici fissi.

In tali casi la rappresentazione analitica del luogo è ***molto semplice***, essendo sufficiente imporre alle coordinate cartesiane del generico punto $P(x,y)$ del piano di verificare le relazioni matematiche contenute nella definizione (di cui alla lettera *d*)).

Tutti i luoghi degli esempi 1-7 precedenti sono di questo tipo .

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Questi luoghi sono semplici e complessi allo stesso tempo.

- ***presentano il vantaggio della semplicità della determinazione della loro rappresentazione analitica***

ma

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Questi luoghi sono semplici e complessi allo stesso tempo.

- *presentano il vantaggio della semplicità della determinazione della loro rappresentazione analitica*

ma

- *la proprietà che li definisce non consente di costruire il luogo per punti e, quindi, non si può studiare elementarmente la forma della curva*

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Questi luoghi sono semplici e complessi allo stesso tempo.

- ***presentano il vantaggio della semplicità della determinazione della loro rappresentazione analitica***

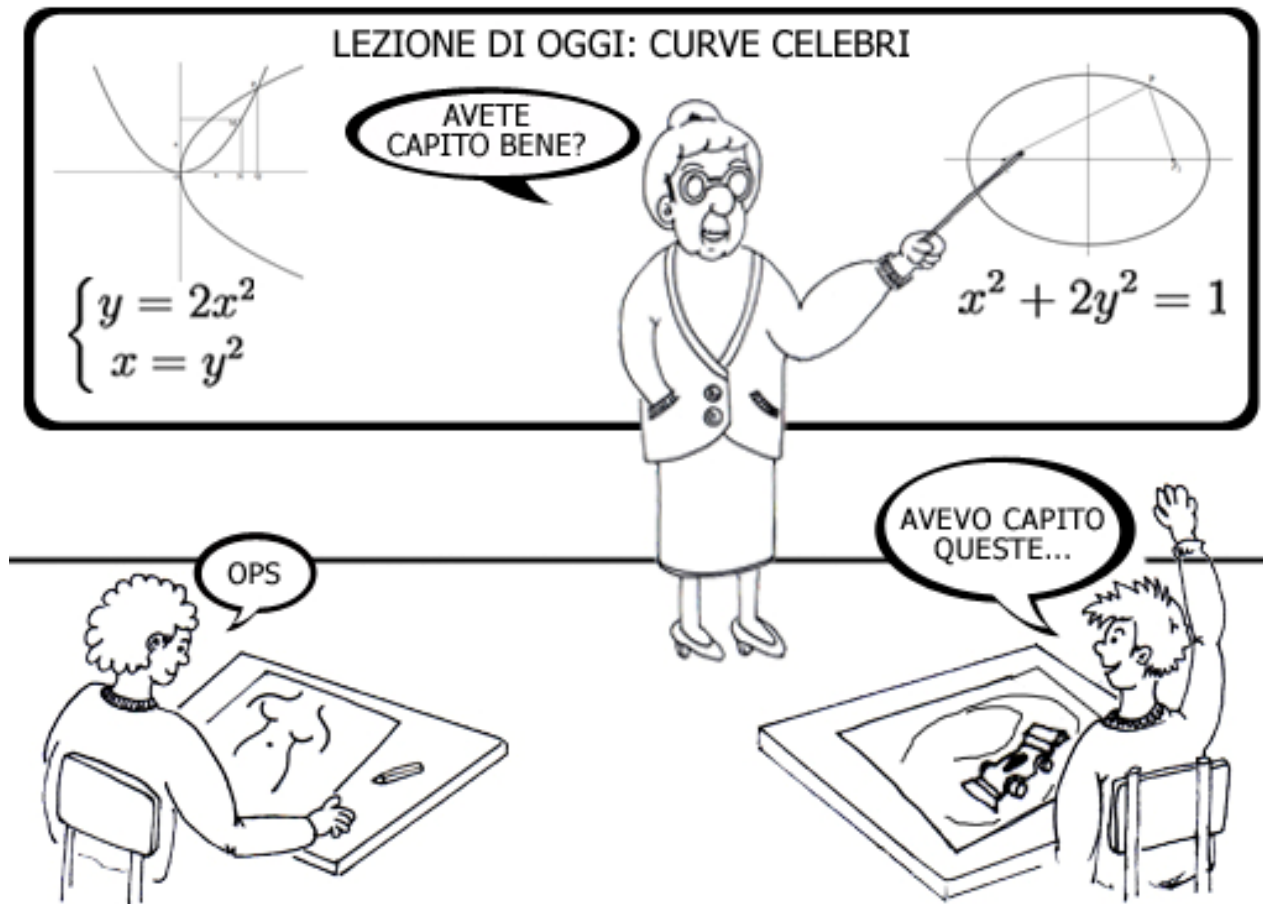
ma

- ***la proprietà che li definisce non consente di costruire il luogo per punti e, quindi, non si può studiare elementarmente la forma della curva***

Per ovviare a questo inconveniente si cerca di trovare una proprietà differente che definisca il luogo.

Nel prossimo numero presentiamo alcune curve “celebri” e per alcune di esse proporremo definizioni alternative che ne consentono la costruzione per punti e lo studio con il software Geogebra.

Curve “celebri” come luoghi geometrici



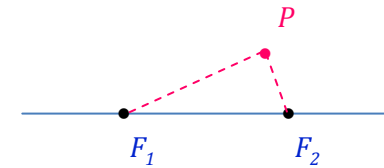
Ellisse

*Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a $2a$ è una curva detta **ellisse**.*

Ellisse

Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a $2a$ è una curva detta **ellisse**.

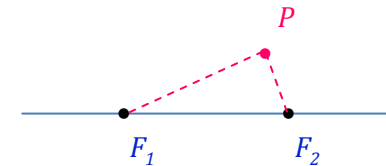
- oggetti fissi: i due fuochi F_1, F_2 , la distanza $d(F_1, F_2) = 2c$ e il numero reale $a > 0$
- relazione matematica: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$



Ellisse

Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a $2a$ è una curva detta **ellisse**.

- oggetti fissi: i due fuochi F_1, F_2 , la distanza $d(F_1, F_2) = 2c$ e il numero reale $a > 0$
- relazione matematica: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

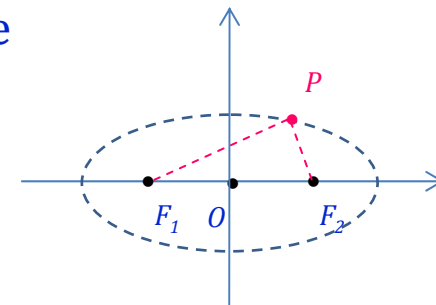


Fissato il riferimento cartesiano con l'origine nel punto medio del segmento F_1F_2 , asse delle ascisse la retta per F_1 ed F_2 e asse delle ordinate l'asse del segmento F_1F_2 , il luogo è costituito dai punti $P(x, y)$ del piano tali che $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Supposto $c < a$, si ha quindi

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

da cui, razionalizzando e ponendo $b^2 = a^2 - c^2$, si trae

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ellisse

Per costruire l'ellisse precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

L'ellisse è il luogo dei punti di intersezione della circonferenza γ_r di centro F_1 e raggio r con la circonferenza Γ_R di centro F_2 e raggio $R=2a-r$, al variare di r nell'intervallo chiuso $[a-c, a+c]$.

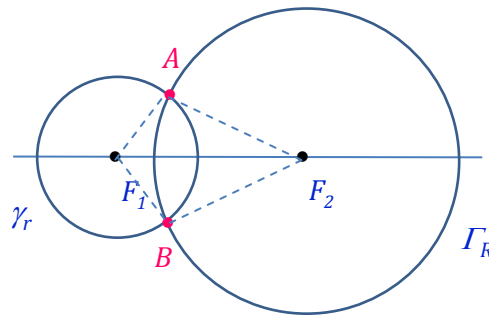
Ellisse

Per costruire l'ellisse precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

L'ellisse è il luogo dei punti di intersezione della circonferenza γ_r di centro F_1 e raggio r con la circonferenza Γ_R di centro F_2 e raggio $R=2a-r$, al variare di r nell'intervallo chiuso $[a-c, a+c]$.

Si ha infatti ovviamente

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = r + R = 2a, \quad d(B, F_1) + d(B, F_2) = r + R = 2a$$



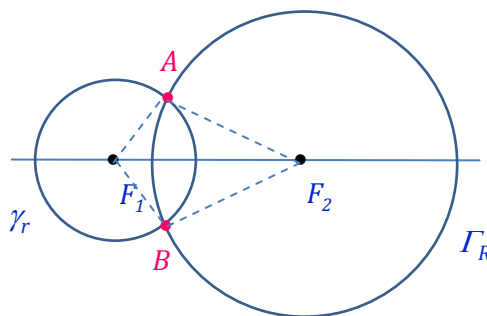
Ellisse

Per costruire l'ellisse precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

L'ellisse è il luogo dei punti di intersezione della circonferenza γ_r di centro F_1 e raggio r con la circonferenza Γ_R di centro F_2 e raggio $R=2a-r$, al variare di r nell'intervallo chiuso $[a-c, a+c]$.

Si ha infatti ovviamente

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = r + R = 2a, \quad d(B, F_1) + d(B, F_2) = r + R = 2a$$



*Animazione con Geogebra:
facendo variare r nello slider, i punti
 A e B descrivono l'ellisse*



ellisse costruzione.ggb

Considerazioni simili si possono fare per l'iperbole e la parabole

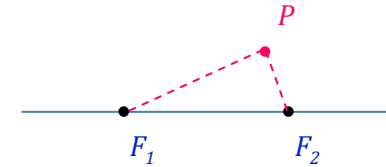
Ovale di Cassini

*Fissati due punti F_1 , F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che il prodotto delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a a^2 è una curva detta **ovale di Cassini***

Ovale di Cassini

Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che il prodotto delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a a^2 è una curva detta **ovale di Cassini**

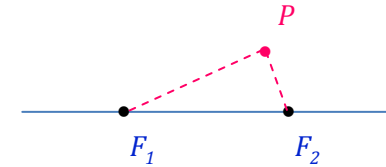
- oggetti fissi: i due fuochi F_1, F_2 , la distanza $d(F_1, F_2) = 2c$ e il numero reale $a > 0$
- relazione matematica: $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = a^2$



Ovale di Cassini

Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che il prodotto delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a a^2 è una curva detta **ovale di Cassini**

- oggetti fissi: i due fuochi F_1, F_2 , la distanza $d(F_1, F_2) = 2c$ e il numero reale $a > 0$
- relazione matematica: $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = a^2$

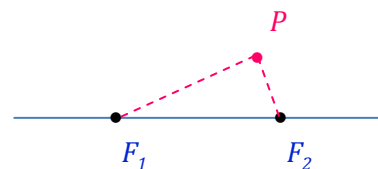


Fissato il riferimento cartesiano con l'origine nel punto medio del segmento F_1F_2 , asse delle ascisse la retta per F_1 ed F_2 e asse delle ordinate l'asse del segmento F_1F_2 , il luogo è costituito dai punti $P(x, y)$ del piano tali che $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = a^2$.

Ovale di Cassini

Fissati due punti F_1, F_2 (fuochi) ed un numero reale $a > 0$, il luogo dei punti P tali che il prodotto delle distanze da F_1 e F_2 sia uguale a a^2 è una curva detta **ovale di Cassini**

- oggetti fissi: i due fuochi F_1, F_2 , la distanza $d(F_1, F_2) = 2c$ e il numero reale $a > 0$
- relazione matematica: $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = a^2$



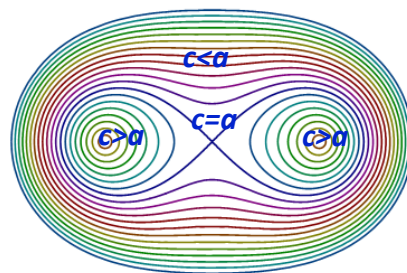
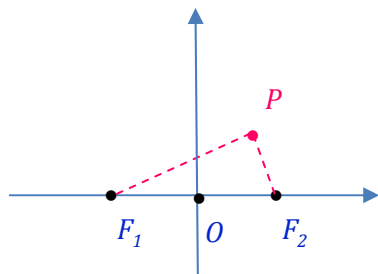
Fissato il riferimento cartesiano con l'origine nel punto medio del segmento $F_1 F_2$, asse delle ascisse la retta per F_1 ed F_2 e asse delle ordinate l'asse del segmento $F_1 F_2$, il luogo è costituito dai punti $P(x, y)$ del piano tali che $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = 2a$.

Si ha quindi

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2$$

da cui, razionalizzando si trae:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$



Ovale di Cassini

Per costruire l'ovale di Cassini precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

Sia Γ la circonferenza di diametro il segmento F_1F_2 , C un punto fissato sulla retta per F_1, F_2 tale che $d(C, F_1) \cdot d(C, F_2) = a^2$ ed A, B i punti di intersezione tra Γ e una retta per C . L'ovale è il luogo dei punti G, H di intersezione tra la circonferenza γ_1 , di centro F_1 e raggio il segmento CA , con la circonferenza γ_2 , di centro F_2 e raggio il segmento CB , al variare della retta per C .

Ovale di Cassini

Per costruire l'ovale di Cassini precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

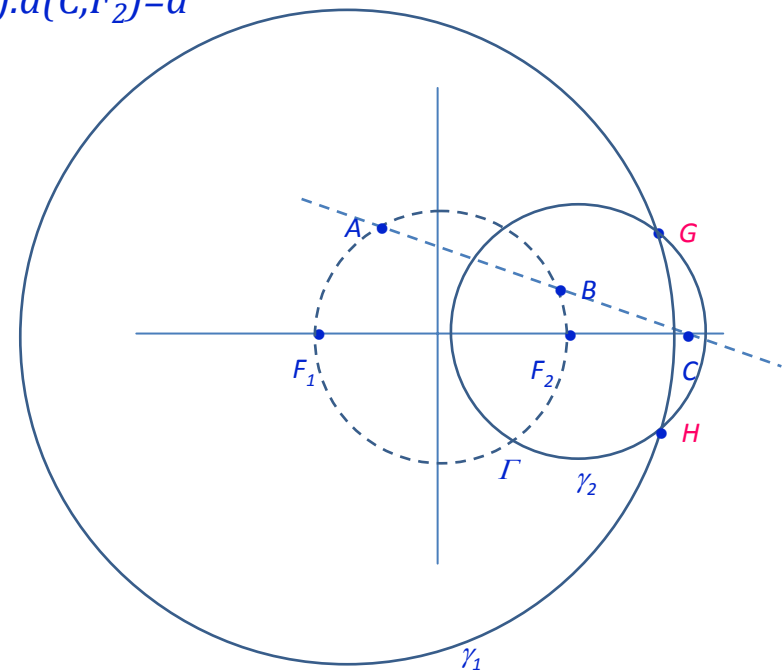
Sia Γ la circonferenza di diametro il segmento F_1F_2 , C un punto fissato sulla retta per F_1, F_2 tale che $d(C,F_1).d(C,F_2)=a^2$ ed A, B i punti di intersezione tra Γ e una retta per C . L'ovale è il luogo dei punti G, H di intersezione tra la circonferenza γ_1 , di centro F_1 e raggio il segmento CA , con la circonferenza γ_2 , di centro F_2 e raggio il segmento CB , al variare della retta per C .

Risulta infatti

$$d(C,A).d(C,B)=\text{potenza di } C \text{ rispetto a } \Gamma=\text{costante}=d(C,F_1).d(C,F_2)=a^2$$

e ovviamente

$$d(G,F_1)=d(H,F_1)=d(C,A) \text{ e } d(G,F_2)=d(H,F_2)=d(C,B)$$



Ovale di Cassini

Per costruire l'ovale di Cassini precedente per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

Sia Γ la circonferenza di diametro il segmento F_1F_2 , C un punto fissato sulla retta per F_1, F_2 tale che $d(C, F_1) \cdot d(C, F_2) = a^2$ ed A, B i punti di intersezione tra Γ e una retta per C . L'ovale è il luogo dei punti G, H di intersezione tra la circonferenza γ_1 , di centro F_1 e raggio il segmento CA , con la circonferenza γ_2 , di centro F_2 e raggio il segmento CB , al variare della retta per C .

Risulta infatti

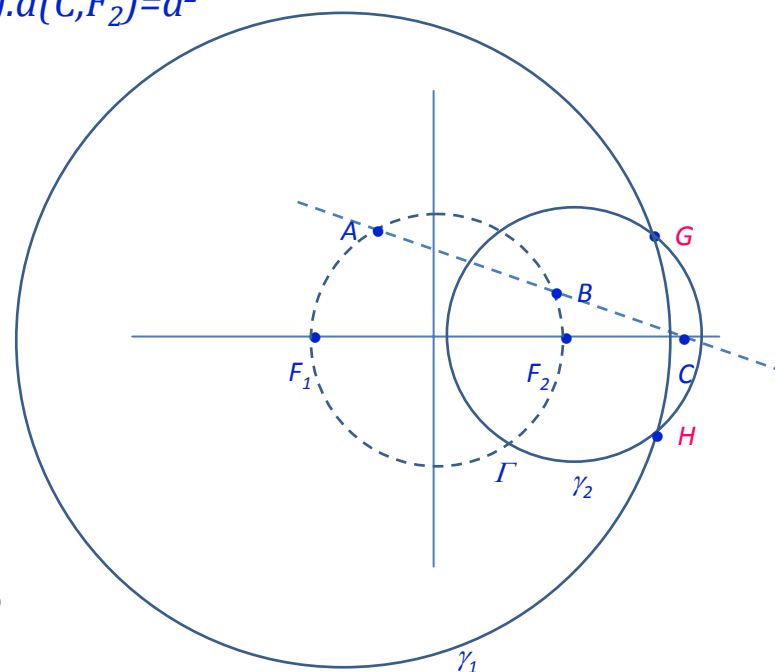
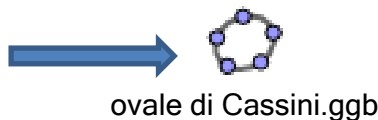
$$d(C, A) \cdot d(C, B) = \text{potenza di } C \text{ rispetto a } \Gamma = \text{costante} = d(C, F_1) \cdot d(C, F_2) = a^2$$

e ovviamente

$$d(G, F_1) = d(H, F_1) = d(C, A) \text{ e } d(G, F_2) = d(H, F_2) = d(C, B)$$

Animazione con Geogebra:

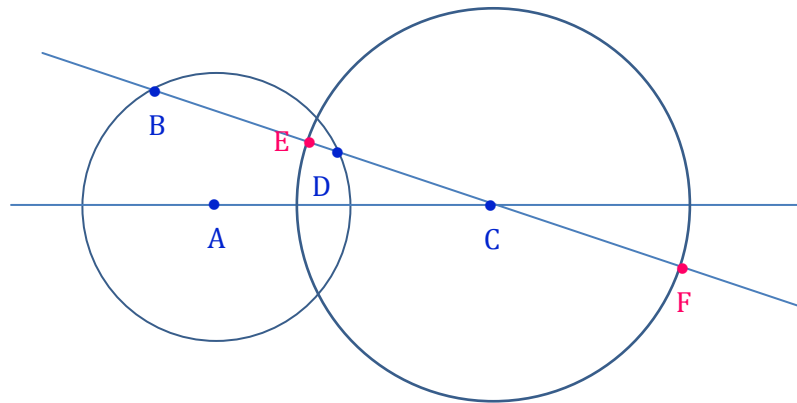
facendo variare A su Γ , i punti G e H descrivono l'ovale e variando opportunamente la posizione di C si ottengono vari tipi di ovali



Lemniscata di Bernoulli

La lemniscata di Bernoulli si può costruire, invece, al modo seguente:

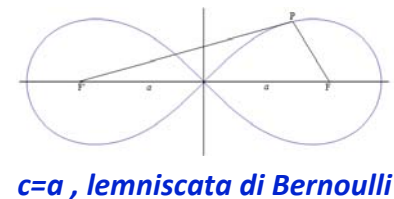
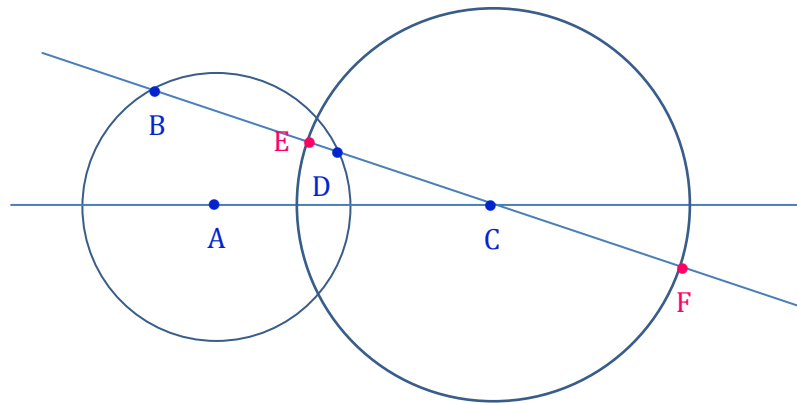
Sia Γ una circonferenza fissata, C un punto fissato su una retta il centro di Γ e non appartenente a Γ e B, D i punti di intersezione tra Γ e una retta per C . Il luogo dei punti E, F di intersezione tra la retta CB e la circonferenza γ di centro C e raggio il segmento BD , al variare della retta per C , è una lemniscata di Bernoulli.



Lemniscata di Bernoulli

La lemniscata di Bernoulli si può costruire, invece, al modo seguente:

Sia Γ una circonferenza fissata, C un punto fissato su una retta il centro di Γ e non appartenente a Γ e B, D i punti di intersezione tra Γ e una retta per C . Il luogo dei punti E, F di intersezione tra la retta CB e la circonferenza γ di centro C e raggio il segmento BD , al variare della retta per C , è una lemniscata di Bernoulli.



*Animazione con Geogebra:
facendo variare B su Γ , i punti E, F descrivono la
lemniscata di Bernoulli*



Lemniscata di Bernoulli.ggb

Asterioide

*Sia AB un segmento di lunghezza fissata $a > 0$ i cui estremi A e B scorrono rispettivamente su due rette r, s ortogonali tra loro e incidenti in un punto O . Denotato con C il punto di intersezione tra la parallela ad s per A e la parallela ad r per B , sia P il punto di intersezione tra AB e la perpendicolare ad AB condotta per C . Il luogo descritto dal punto P al variare dei punti A su r e B su s è una curva detta (algebrica) **asterioide**.*

Asteroide

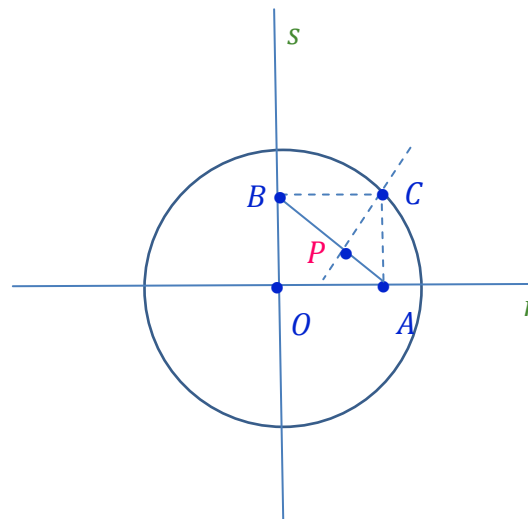
*Sia AB un segmento di lunghezza fissata $a > 0$ i cui estremi A e B scorrono rispettivamente su due rette r, s ortogonali tra loro e incidenti in un punto O . Denotato con C il punto di intersezione tra la parallela ad s per A e la parallela ad r per B , sia P il punto di intersezione tra AB e la perpendicolare ad AB condotta per C . Il luogo descritto dal punto P al variare dei punti A su r e B su s è una curva detta (algebrica) **asteroide**.*

- *Oggetti fissi: le rette r, s , il numero reale $a > 0$*
- *oggetto che descrive il luogo: punto P*
- *oggetti variabili: i punti A, B scorrono sulle rette r, s e il punto C descrive la circonferenza Γ di centro O e raggio a (essendo $d(O, C) = d(A, B) = a$)*
- *relazioni matematiche: $P = AB \cap (\text{retta per } C \text{ ortogonale ad } AB)$*

Asteroide

Sia AB un segmento di lunghezza fissata $a > 0$ i cui estremi A e B scorrono rispettivamente su due rette r, s ortogonali tra loro e incidenti in un punto O . Denotato con C il punto di intersezione tra la parallela ad s per A e la parallela ad r per B , sia P il punto di intersezione tra AB e la perpendicolare ad AB condotta per C . Il luogo descritto dal punto P al variare dei punti A su r e B su s è una curva (algebrica) detta **asteroide**.

- Oggetti fissi: le rette r, s , il numero reale $a > 0$
- oggetto che descrive il luogo: punto P
- oggetti variabili: i punti A, B scorrono sulle rette r, s e il punto C descrive la circonferenza Γ di centro O e raggio a (essendo $d(O, C) = d(A, B) = a$)
- relazioni matematiche: $P = AB \cap (\text{retta per } C \text{ ortogonale ad } AB)$



Asteroide

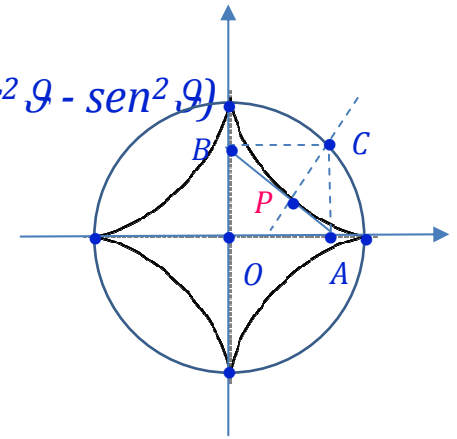
Fissato il riferimento cartesiano con origine nel punto O , asse delle ascisse e asse delle ordinate rispettivamente nelle rette r, s e introdotto il parametro $\vartheta = \angle(AOC)$, risulta

$$C(a\cos\vartheta, a\sin\vartheta), A(a\cos\vartheta, 0), B(0, a\sin\vartheta)$$

$$\text{retta } AB: (\sin\vartheta)x + (\cos\vartheta)y = a\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\text{perpendicolare per } C \text{ ad } AB: (\cos\vartheta)x - (\sin\vartheta)y = a(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

e quindi la rappresentazione analitica del luogo è:



Asteroide

Fissato il riferimento cartesiano con origine nel punto O , asse delle ascisse e asse delle ordinate rispettivamente nelle rette r, s e introdotto il parametro $\vartheta = \angle(AOC)$, risulta

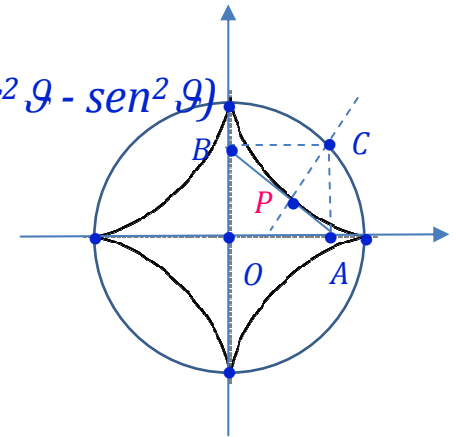
$$C(a \cos \vartheta, a \sin \vartheta), A(a \cos \vartheta, 0), B(0, a \sin \vartheta)$$

$$\text{retta } AB: (\sin \vartheta)x + (\cos \vartheta)y = a \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\text{perpendicolare per } C \text{ ad } AB: (\cos \vartheta)x - (\sin \vartheta)y = a(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

e quindi la rappresentazione analitica del luogo è:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \vartheta \\ y = a \sin^3 \vartheta \end{cases}$$



Asteroide

Fissato il riferimento cartesiano con origine nel punto O , asse delle ascisse e asse delle ordinate rispettivamente nelle rette r, s e introdotto il parametro $\vartheta = \angle(AOC)$, risulta

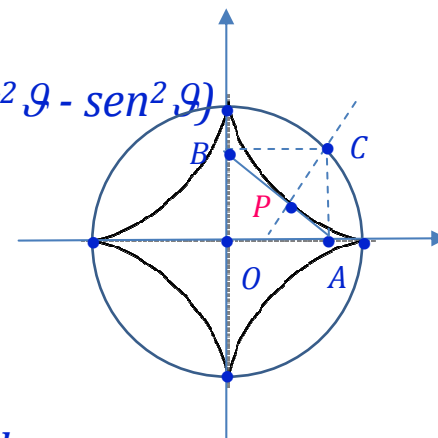
$$C(a \cos \vartheta, a \sin \vartheta), A(a \cos \vartheta, 0), B(0, a \sin \vartheta)$$

$$\text{retta } AB: (\sin \vartheta)x + (\cos \vartheta)y = a \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\text{perpendicolare per } C \text{ ad } AB: (\cos \vartheta)x - (\sin \vartheta)y = a(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

e quindi la rappresentazione analitica del luogo è:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \vartheta \\ y = a \sin^3 \vartheta \end{cases}$$



Elevando tali due espressioni alla potenza $\frac{2}{3}$ e sommando si ha:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Elevando due volte consecutive tale equazione alla potenza 3 si ottiene infine:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$$

Animazione con Geogebra: facendo variare il punto C sulla circonferenza il punto P descrive il luogo



asteroide.ggb

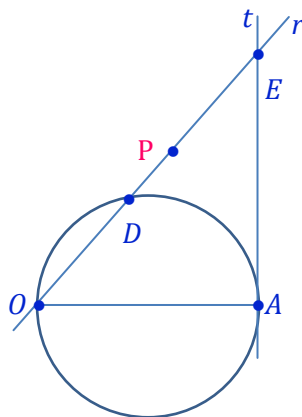
Cissoide di Diocle

*Sia Γ una fissata circonferenza, O un suo punto fissato e t la retta tangente a Γ nel punto A di Γ diametralmente opposto ad O . Considerata una retta r per O e denotati con D, E i suoi punti di intersezione con Γ e t , rispettivamente, il luogo descritto dal punto P della retta r tale che $d(O, P) = d(D, E)$, al variare di r , è una curva (algebrica) detta **cissoide di Diocle**.*

Cissoide di Diocle

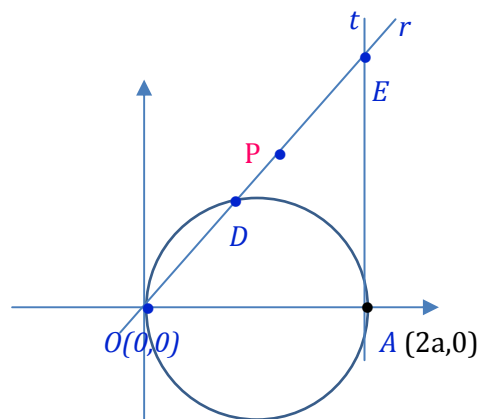
Sia Γ una fissata circonferenza, O un suo punto fissato e t la retta tangente a Γ nel punto A di Γ diametralmente opposto ad O . Considerata una retta r per O e denotati con D, E i suoi punti di intersezione con Γ e t , rispettivamente, il luogo descritto dal punto P della retta r tale che $d(O, P) = d(D, E)$, al variare di r , è una curva (algebrica) detta **cissoide di Diocle**.

- Oggetti fissi: la circonferenza Γ , il suo raggio $a > 0$, i punti O, A e la retta t
- oggetto che descrive il luogo: punto P
- oggetti variabili: la retta r per O
- relazioni matematiche: $P \in r$ e $d(O, P) = d(D, E)$



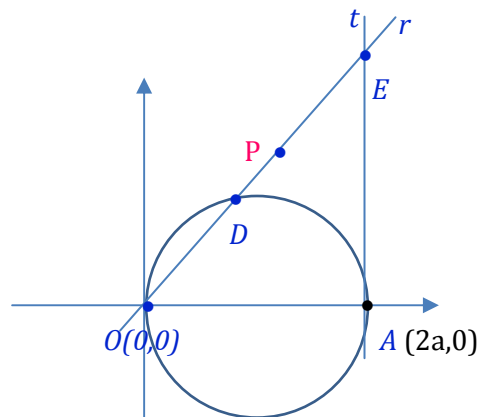
Cissoide di Diocle

Fissato il riferimento cartesiano con origine il punto O , asse delle ascisse la retta per O, A e asse delle ordinate la tangente a Γ in A , risulta



Cissoide di Diocle

Fissato il riferimento cartesiano con origine il punto O , asse delle ascisse la retta per O, A e asse delle ordinate la tangente a Γ in A , risulta



$\Gamma: (x-a)^2 + y^2 = a^2$, $r: y = mx$, $t: x = 2a$, onde

$$D\left(\frac{2a}{1+m^2}, \frac{2am}{1+m^2}\right), \quad E(2a, 2am)$$

Cissoide di Diocle

*Osserviamo ora che le condizioni $P \in r$, $d(O,P)=d(D,E)$ equivalgono
ovviamente alla relazione $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE}$*

*Ne segue che le coordinate del punto P , ovvero le equazioni parametriche del luogo,
sono*

$$P: \begin{cases} x = \frac{2am^2}{1+m^2} \\ y = \frac{2am^3}{1+m^2} \end{cases}$$

Cissoide di Diocle

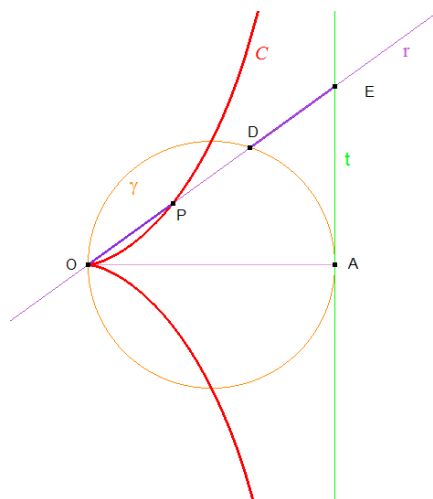
Osserviamo ora che le condizioni $P \in r$, $d(O,P)=d(D,E)$ equivalgono ovviamente alla relazione $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE}$

Ne segue che le coordinate del punto P , ovvero le equazioni parametriche del luogo, sono

$$P: \begin{cases} x = \frac{2am^2}{1+m^2} \\ y = \frac{2am^3}{1+m^2} \end{cases}$$

Eliminando il parametro m si ottiene l'equazione ordinaria del luogo:

$$x^3 + (x-2a)y^2 = 0$$



Cissoide di Diocle

Per costruire la cissoide di Diocle per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

Considerati due punto C, C' sulla retta per i punti O, A simmetrici rispetto al centro O' di Γ , siano F, G i punti di intersezione di Γ con la retta per C' parallela all'asse delle ordinate e P_1, P_2 i simmetrici rispetto alla parallela all'asse delle ordinate per O' dei punti di intersezione della retta per C parallela all'asse delle ordinate con le rette AD e AE , rispettivamente. Il luogo descritto dai punti P_1, P_2 al variare di C sull'asse delle ascisse è la cissoide di Diocle.

Cissoide di Diocle

Per costruire la cissoide di Diocle per punti si può osservare che essa si ottiene anche al modo seguente:

Considerati due punti C, C' sulla retta per i punti O, A simmetrici rispetto al centro O' di Γ , siano F, G i punti di intersezione di Γ con la retta per C' parallela all'asse delle ordinate e P_1, P_2 i simmetrici rispetto alla parallela all'asse delle ordinate per O' dei punti di intersezione della retta per C parallela all'asse delle ordinate con le rette AD e AE , rispettivamente. Il luogo descritto dai punti P_1, P_2 al variare di C sull'asse delle ascisse è la cissoide di Diocle.

*Animazione con Geogebra:
facendo variare il punto C
sull'asse delle ascisse i punti
 P_1, P_2 descrivono il luogo*



cissoide di Diocle.ggb

