MATHESIS

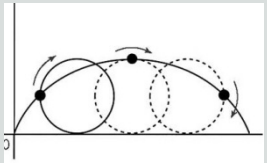
Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

SCUOLA ESTIVA

Il tema dei luoghi Geometrici

Montegrotto Terme, 22-25 Luglio 2014

Emilio Ambrisi



Qual è il grafico di $y = f(x)$?

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

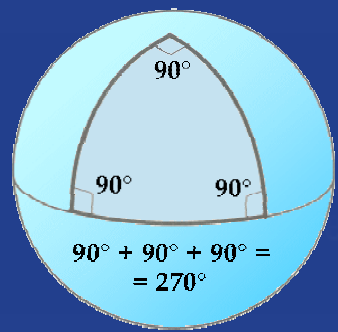
Esistono solo cinque poliedri regolari

Equazioni di luoghi geometrici

Equazioni?

Permutazioni
Disposizioni
Combinazioni

Come approssimare e, π, φ



$\aleph_0$

Chi è *aleph-zero*?

I teoremi di *Lagrange*, *Rolle*, *l'Hôpital*

Problemi di massimo e minimo

Il principio di induzione

Applicazione degli integrali al calcolo di aree e volumi

Dall'andamento del grafico alla possibile espressione analitica della funzione

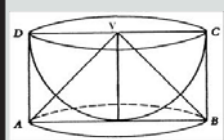
Come approssimare un integrale definito

Principio di Cavalieri

Cos'è un sistema assiomatico?

Quante volte devo giocare al lotto per vincere?

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Le Indicazioni Nazionali

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.

Che cos'è un luogo geometrico?

- Già in Euclide la retta come luogo dei punti che "giacciono ugualmente su stessi". La definizione IV:
- ***Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti)***
- Negli Elementi dell'edizione UTET di Lamberto Maccioni e Attilio Frajese

Nell'insegnamento

- Punti notevoli di un triangolo
- Asse di un segmento
- Bisettrice di un angolo (luogo dei centri delle circonferenze inscritte, luogo dei punti equidistanti dai lati)
- Luogo dei punti che vedono sotto angolo assegnato gli estremi di un segmento...

Tanti i temi assegnati alla maturità e ai concorsi a cattedre come punto di arrivo della comprensione della geometria analitica.

Esami di Stato del 2007

Si considerino i triangoli la cui base è $AB=1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo ABC.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo ABC che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Le reazioni al problema

- Problema fu giudicato difficile
- Proteste (la fronda veneta) e riprese vigore la proposta di un Syllabus per la prova scritta.
- Un ordinario di geometria: lasciate che i luoghi geometrici si trattino all'Università

1748

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

AL LETTORE.

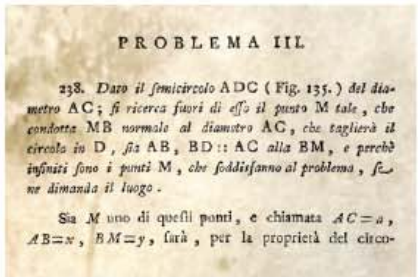
ON avvi alcuno, il quale informato eſſendo delle Matematiche coſe, non ſappia altresì quanto, in oggi ſpezialmente, ſia neceſſario lo ſtudio dell' Analiſi, e quali progreſſi ſi ſieno con queſta fatti, ſi facciano tuttora, e poſſano ſperarſi nell' avvenire; che però non voglio, nè debbo trattenermi qui in lodando quella ſcienza, che punto non ne abbiſogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la neceſſità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invoglj di farne acquiſto, grandi altrettanto ſono le difficoltà, che vi s'incontrano, ſendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella noſtra Italia, à perſone, che ſappiano, o vogliano inſegnarla, e non tutti ànno il modo di andar fuori della Patria a cercarne

LA VERSIERA

PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *ſia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti ſono i punti* M, *che ſoddisfanno al problema, ſe ne dimanda il luogo.*

Sia *M* uno di queſti punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, ſarà, per la proprietà del circo-



PROBLEMA III.

238. *Dato il semicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *si ricerca fuori di esso il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *sia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti sono i punti* M, *che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.*

Sia *M* uno di questi punti, e chiamata $AC=a$, $AB=x$, $BM=y$, sarà, per la proprietà del circo-

In occasione degli esami di Stato del giugno di quest'anno, i media hanno potuto parlare di matematica al grande pubblico in un modo diverso. Qualche giornale ha titolato: *"Quintiliano al classico, Fitzgerald al linguistico e Agnesi allo scientifico"*. Al nome di *Maria Gaetana Agnesi* (1718-1799) riconduceva infatti uno dei problemi assegnati ai giovani candidati: lo studio di una curva molto bella e interessante, nota appunto come *versiera di Agnesi*. In copertina, e qui sopra, la versiera è riportata nel disegno e nella formulazione che si ritrovano nelle *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* del 1748, scritte *onde la gioventù ardentemente s'invogli* di "fare acquisto" di una disciplina necessaria alla loro formazione e con un titolo decisamente importante e significativo per l'epoca. L'opera dell'Agnesi ebbe, per tali motivi, grande diffusione e influenza didattica e fu anche tradotta in altre lingue.

Mathesis
Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze
Seconda Università di Napoli
Via Vivaldi 43 – 81100 Caserta
www.mathesisnazionale.it

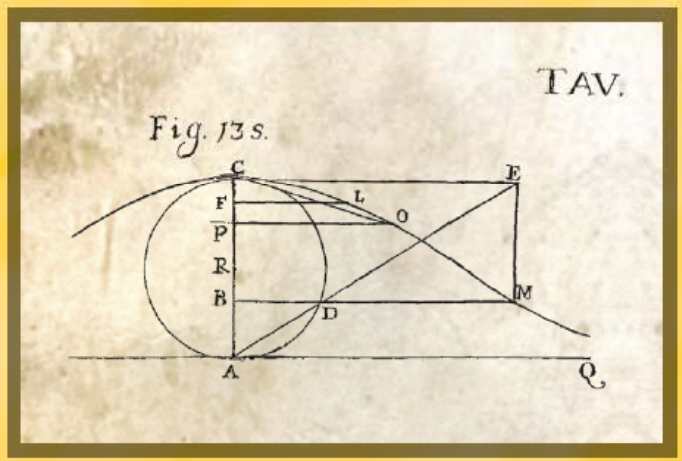
ISSN: 1582-8832

Periodico di matematiche

Numero 2, Mag-Ago 2013, Volume 5, Serie XI, Anno CXXIII

Rivista quadrimestrale

Periodico di matematiche



Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze matematiche e fisiche fondata nel 1895

Numero 2 Mag-Ago 2013
Volume 5 Serie XI
Anno CXXIII

Una delle formulazioni proposte (2013)

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da f(x)= 8/(4+x^2)

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti P(-2;1) e Q(2;1) e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro (0;1) . Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione y=2 in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate (x; y) di un punto di Φ.

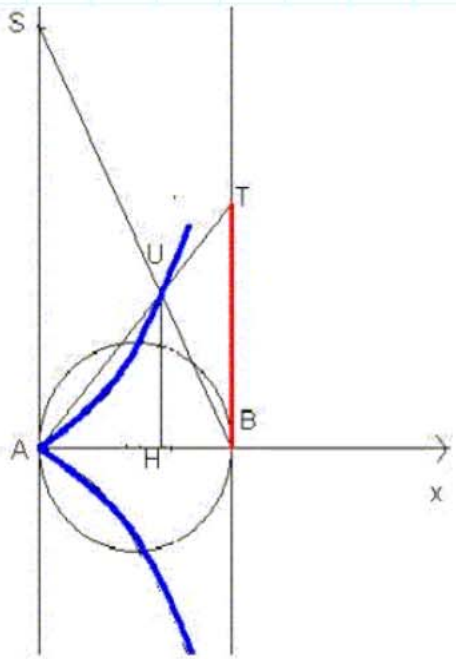
Concorso a cattedre del 2000

- Nel piano, sono dati: il cerchio γ di diametro AB, la retta t tangente ad esso in B, una retta r passante per A, i punti C, D intersezione di r rispettivamente con γ e t. Al variare di r, i punti P di essa per i quali è AP=CD (in valore e segno) descrivono la notissima cissoide di Diocle. Il candidato dopo averne esplicitato le equazioni – parametriche, cartesiana e polare – e calcolato le aree che essa delimita sia con il cerchio γ sia con l'asintoto si soffermi sull'utilizzo fattone da Diocle per duplicare il cubo. In ordine a tale ultima questione chiarisca il significato di problema classico dell'antichità e la visione più attuale di risolubilità di un problema.

Home
Antologia
Archivio
Biblioteca
Orientamento e Valutazione
Esami di Stato
Formazione
Insegnamento
Matematica Società
Programmi
Ricerca in Rete
Tecnologie

$$x^3 = (a - x)y^2$$

Si riporti sulla tangente in A alla circonferenza un segmento AS=2a. Congiungiamo S con B e detta U l'intersezione di SB con la cissoide, si unisca U c l'intersezione di AU con la tangente in B alla circonferenza (che è l'asintoto della cissoide).



Si ha che BT è il lato del cubo di volume doppio di quello considerato. Infatti consideriamo i triangoli SAB e UHB; essi sono simili per cui possia $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{UH} : \overline{HB}$.

U è un punto della cissoide di coordinate (x,y) con $0 \le x \le a$. La proporzione precedente diventa:

$2a : a = y : (a - x) \Rightarrow 2 = \frac{y}{a - x}$; dall'equazione della cissoide $x^3 = (a - x)y^2$ segue che $\frac{1}{a - x} = \frac{y^2}{x^3}$.

Concorso a cattedre del 2000

- Una delle curve più famose è certamente la cicloide definita altresì l'«*Hélène de la géométrie*». Il candidato spieghi in che cosa essa consista; ne derivi (per la cicloide ordinaria) le equazioni e le misure delle grandezze più significative. Ne chiarisca infine le proprietà di tautocrona e di brachistocrona.
- George B. Thomas, JR. Ross L. Finney, *Analisi Matematica,* Zanichelli

Il luogo per eccellenza
la Sfera /Circonferenza

- ***Deus est sphaera cuius centrum ubique, circumferentia nusquam***
- Appare per la prima volta in un manoscritto del XII secolo.
- San Bonaventura (1221- 1274) in *Itinerarium mentis ad Deum:*

  "*Poichè Dio è eterno e assolutamente attuale, abbraccia e compenetra tutte le porzioni di tempo, quasi esistendo simultaneamente in tutti i loro momenti come loro centro e circonferenza. Poichè è infinitamente semplice e infinitamente grande, si trova, in tutta la sua completezza, all'interno ed all'esterno di tutto; ed è per questo che è una sfera intelligibile che ha il centro dovunque e la circonferenza in nessun luogo".*

Archetipo geometrico

- Invariante per omotetie, mantiene la sua struttura globale simile al suo germe, un'altra solidarietà tra locale/globale.
- ha influenzato tutto: teoria e pratica, dottrine teologiche, cosmologiche, psicologiche, utopistiche, sociologiche, letterarie, urbanistiche....
- G.Poulet, *Metamorfosi del cerchio*, Rizzoli 1971
- Umanesimo e Rinascimento: *Passando attraverso le età il grande emblema del centro e della sfera ha cambiato senso in maniera singolare. Ormai non si applica più esclusivamente a Dio, ma anche all'uomo. E' l'uomo che, pari a Dio, scopre di essere centro e sfera infinita*

LE CONICHE

- La teoria delle coniche è sviluppata da Apollonio (262-190 a.C.) – ultimo degli alessandrini - nell'opera "sezioni coniche": 8 libri per 487 proposizioni.
- Abbiamo: i primi 4 conservati in manoscritti greci del XII e XIII sec. e il V-VI-VII in traduzioni arabe del 1300; l'ottavo è perduto.
- **Perchè un'opera così importante è andata perduta?**
- fu decisamente una delle più profonde conquiste della geometria classica greca ma è il '600, il secolo matematico per eccellenza – secondo M. Kline - a conferire loro l'importanza che hanno.

Il canone della purezza

- "....per la geometria classica la retta e il cerchio occupano un posto privilegiato; l'uso delle coniche o di altre curve nelle costruzioni grafiche è considerato illegittimo, e alcuni strumenti poco più complicati del compasso ordinario vengono riguardati come strumenti imperfetti, da usarsi, occorrendo per la pratica, ma indegni di penetrare nel tempio della geometria pura." (E. Artom in Enciclopedia Hoepli, delle Matematiche Elementari e Complementi)
- "Nella sua interezza il cerchio è centralmente presente nel centro; poichè il centro è la causa, e il cerchio è ciò che viene causato da esso" (Proclo)
- **Apollonio non ha avuto al pari di Euclide un commentatore come Proclo**

L'arte dei numeri di J. Dieudonnè
-tra i dieci libri da leggere-

perché, per la definizione di prodotto di due rapporti (paragrafo 5):

$$x^3/a^3 = 2a \times x/(x \times a) = 2$$

Questo modo di porre il problema condusse Ippocrate di Chio (V secolo) a ridurre la duplicazione del cubo alla costruzione di *due* "medie proporzionali" tra a e $2a$, cioè due segmenti x, y verificanti le equazioni

$$(2) \qquad 2a/x = x/y = y/a$$

In effetti, per i greci, il prodotto di 3 segmenti A, B, C è il *volume* del parallelepipedo di lati A, B, C, e quindi le relazioni (2) implicano (Euclide, Libro VIII, 12 per i rapporti commensurabili)

$$y^3/a^3 = 2a \times x \times y/(x \times y \times a) = 2$$

La realizzazione di questa costruzione non sembrava più facile del problema di partenza. Ma Menecmo, un discepolo di Eudosso, osservò che la (2) poteva essere scritta anche sotto forma di due relazioni simultanee

$$(3) \qquad x^2 = 2ay$$
$$(4) \qquad xy = 2a^2$$

Allora ebbe l'idea di prendere in un piano due semirette perpendicolari OX, OY, e di considerare *separatamente* le relazioni (3) e (4) tra un segmento $x = OP$ su OX e un segmento $y = OQ$ su OY. Ma per *ogni* punto Q su OY con $OQ = y$ esistono, sulla parallela a OX condotta per Q (fig. 19), un punto M_1 tale che $x_1 = OP_1 = QM_1$ verifica $x_1^2 = 2ay$ (una "media proporzionale" tra $2a$ e y) e un punto M_2 tale che $x_2 = OP_2 = QM_2$ verifica $x_2 y = 2a^2$ (un "quarto proporzionale" dopo $2a$, y e a).

Quando Q varia su OY, M_1 e M_2 descrivono due curve C_1, C_2; lo stesso Menecmo scoprì un po' più tardi che queste curve si potevano ottenere come sezioni piane di un cono di rotazione. Dopo Euclide e Archimede, queste sezioni piane, chiamate *coniche* furono studiate approfonditamente da Apollonio (III secolo a.C.) che chiamò C_1 una *parabola* e C_2 un'*iperbole*.

Se N è il punto di intersezione di queste due curve, i segmenti $OH = NK = x$ e $OK = NH = y$ forniscono la soluzione di (2). La storia aneddotica riferisce che questa soluzione non piacque a Platone, perché utilizzava curve diverse dalla retta e dal cerchio; ma questo tipo di "costruzioni" mediante intersezione di curve non diventò meno popolare tra i successori di Euclide (anche se comportava pro-

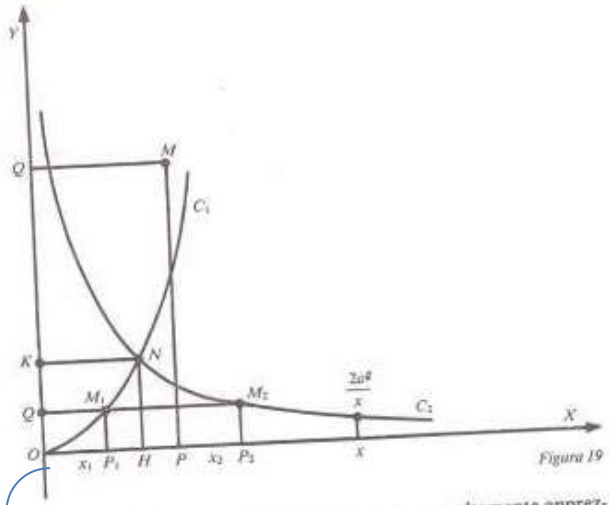


Figura 19

prietà "visibili" ma non dimostrate) ed era ancora altamente apprezzato da Cartesio e Newton.[19]

L'importanza del metodo utilizzato da Cartesio e Fermat deriva dal fatto che esso permette di *tradurre ogni problema di geometria piana in un problema equivalente di algebra*. Ciò risulta dal fatto che enti e relazioni dell'assiomatica di Hilbert possono essere interpretati come enti e relazioni della teoria dei numeri reali, secondo il "dizionario" seguente:

punto M	coppia di numeri (x, y) [20] si scrive $M = (x, y)$
retta	equazione $ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 \neq 0$
punto appartenente a...	coppia che verifica...

[19] Si potrebbe definire in modo analogo tre, quattro... "medie proporzionali" tra $2a$ e a, ma ciò non avrebbe permesso ai greci di effettuare "costruzioni" di radici di ordine > 3, dato che per loro un prodotto di più di tre lunghezze non aveva senso.

[20] Ovviamente $(x, y) \neq (y, x)$, eccetto il caso $x = y$.

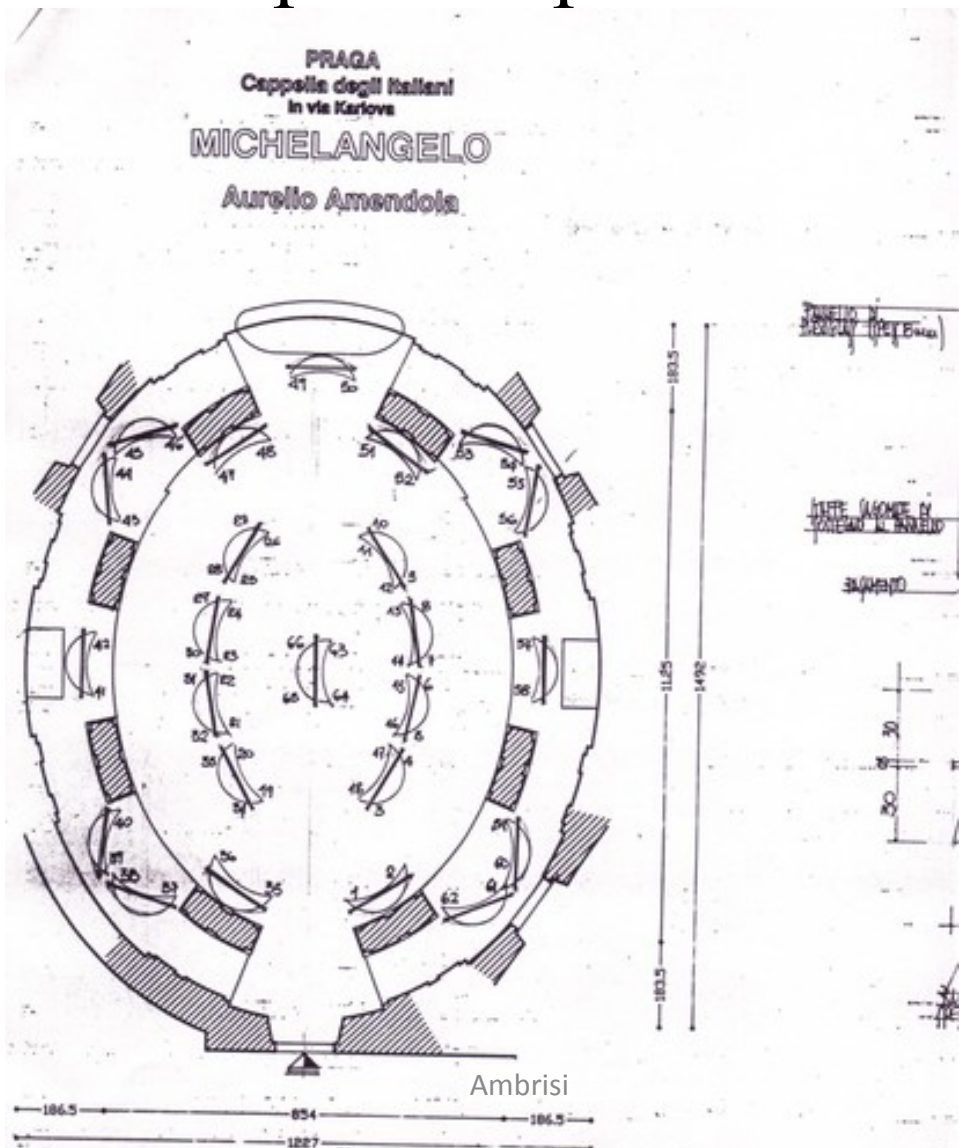
Quali i fatti fondamentali

- Galilei scoprì che un proiettile gettato orizzontalmente dalla cima di una torre, cade a terra descrivendo un arco di parabola (se si trascurano la resistenza dell'aria e se il movimento avviene sopra una parte della terra che possa essere considerata come un piano).
- Cartesio dà il metodo che consente di vederle come equazioni e come luoghi geometrici. Non è necessaria la costruibilità per sancire l'esistenza di una curva, è sufficiente che essa abbia un'equazione. E viceversa si allarga il concetto di curve ammissibili: ad una data equazione in x e y corrisponde una curva: "*Ma i moderni, procedendo molto più innanzi dei luoghi piani, solidi e lineari dei Greci, hanno accolto nella Geometria tutte le linee che possono essere espresse da equazioni*" (Newton, 1707)[*Arithmetica universalis]* .

L'Armonia del Mondo e il successo dell'ellisse

- Keplero (1571- 1630) : i pianeti percorrono orbite ellittiche. Le coniche sono anch'esse nella mente di Dio; il ***Mysterium Cosmographicum*** (1596) è svelato!
- Un'ottantina d'anni più tardi, Newton riuscì a dimostrare che l'orbita ellittica dei pianeti implica una legge di attrazione gravitazionale con forze inversamente proporzionali al quadrato della distanza. Nel seguito si scoprì ancora che le coniche compaiono non solo come orbite dei pianeti e dei satelliti ma anche come traiettorie di particelle atomiche elementari. Anche nella pratica il '600 affina il ricorso alle coniche per disegnare lenti o specchi e dilaga il loro uso nell'architettura e nell'arte in generale.

Religione e Matematica
La cappella degli italiani a Praga
forse la prima a pianta ellittica



Il Barocco

S. Carlo alle 4 fontane il capolavoro di

Francesco Borromini(1599-1667)

Divinatio Apollonii

Vincenzo Viviani (1622-1703)

DE MAXIMIS,
ET
MINIMIS
GEOMETRICA DIVINATIO
IN QVINTVM CONICORVM
APOLLONII PERGÆI
ADHVC DESIDERATVM.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM II.
MAGNVMDVCEM ETRVRIÆ.
LIBER PRIMVS.
AVCTORE
VINCENTIO VIVIANI.

FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ.
SVPERIORVM PERMISSV.

143

VINCENTII VIVIANI
AD LIB. DE MAX. ET MIN.
APPENDIX.

MONITVM.

HACTENVS habes Amice Lector plurima eorum, quæ iamdiu occasione Diuinationis in V. Conicor. excogitauimus, dum ex tribus illis fasciculis SERENISS. LEOPOLDI inuicto testimonio comprobatis, de quibus latiùs in Proœmio, priorem exinaniuimus, alterum extenuauimus. Ex eorum reliquijs tertium saltem librum efformare statueramus, circa MAXIMAS pariter, ac MINIMAS magnitudinis versantem, atque amplius illas eiusdem nominis, quæ à MAXIMIS, & MINIMIS plus minusue recedunt excutientem; quod rarò hucusque, ac tantùm necessitate cogente demonstrauimus, quodque de industria omisimus, tum ne à suscepta materia longius discederemus, tum vt ipsam expeditius persolueremus. Verum graues, ac diuturnæ egritudines, quæ nos, huic editioni incumbentes, exagitarunt, ita ipsimet remoram fecere, totque è contra sunt stimuli ad hoc in vulgus manandum, vt cætera ad aliud tempus proferre cogamur, si hæc tibi grata comperiamus. Liceat tamen ex tertio libro quasdam Propositiones aliunde receptas desumere, atque Appendicis nomine huc apponere, ad id præsertim impulsi, tum quod nostræ harum Propositionum demonstrationes huic tertio libro sint penitus inutiles, tum quia pollicitam quorundam fidem, solidam, incorruptamque prorsus non inuenerimus.

Duo potissimum sunt Problemata, quibus hæc Appendicula constatur. Primum (vti constat ex quadam variarum Propositionum narratione, quæ inter summum Geometram Torricellium, præstantioresque Gallíæ, ne

liæ, ne dicam Europæ Mathematicos interceſſere, quales, inter hos D. Fermat Senator Tholoſanus, D. Roberuallius in Pariſienſi Academia Regius Mathematum Profeſſor, ac D. de Verdus) præfatus Cl. Vir de Fermat ipſi Torricellio olim propoſuerat, qui licet ſtatim in ipſius ſolutionem non incidiſſet, inde mox animaduertens Problema determinatum eſſe, illud demum triplici via, altera nimirum per locos planos, reliquis per ſolidos demonſtrauit, nobiſque poſtmodum exercitationis gratia in hunc, qui ſequitur modum enodandum tradidit.

Dato triangulo, cuius vnuſquiſq; angulorum minor ſit graduum 120. punctum reperire, à quo ſi ad angulos tres rectæ educantur ipſarum aggregatum ſit MINIMVM.

Quod, vt vera fatear, non niſi iteratis oppugnationibus tunc nobis vincere datum fuit, ſed aggreſsione omnino ab alijs diſcrepante, ac, ni decipimur, ſatis iucunda, & ad ipſiuſmet Problematis propagationem valde accommoda, dum non tantum ad tria data puncta, (quæ ſunt vertices angulorum propoſiti trianguli) verum etiam ad quotcunque libuerit, ex alio quæſito puncto, MINIMVM eductarum aggregatum reperiri queat, manente tamen determinata eorum poſitione, prout determinatum eſt prædictum triangulum.

Alterum Problema præclariſsimum Virum, & Auorum ſplendore, & morum integritate conſpicuum agnoſcit Auctorem: P. Honoratum Fabri, natione Gallum, in Ieſuitarum celeberrima Societate magni nominis Theologum, omnigena hiſtoriarum, humaniorumque literarum eruditione decoratum, Mathematicum præſtantiſsimum, Philoſophum acutiſsimum, qui olim Lugduni apud Gallos Philoſophiam publice edocens, ſummam egregij acuminis famam ſibi peperit, quod manifeſtò teſtantur (ita nobis aſſerente alibi iam, ſed parum commendato nobiliſsimo Adoleſcente Laurentio Magalotti tanti Viri amantiſsimo, & obſequentiſsimo) quædam ipſius PROPOSITIONES PHYSICAE, CVM BREVISSIMIS RATIONVM MOMENTIS, tunc ibidem publici iuris factæ, & prout fuſius, Deo dante, patebit ex nouis eiuſdem geometricis, ac phyſicomathematicis contemplationibus, quibus Literatorum Reſpublica aliquando ſe locupletaturam expectat.

Hoc igitur Problema, anno 1656. idem Cl. Adoleſcens Laurentius Magalotti, (dum in Piſano Lyceo Iuriſprudentiam excoleret) à prædicto P. Fabbri, tunc Romæ immorante receperat, nobiſque per epiſtolam, Piſis, ſub 27. Decembris datam communicarat, cui poſt triduum reſpondentes, vniuerſaliorem quæſiti propoſitionem, ita expoſuimus;

Dua-

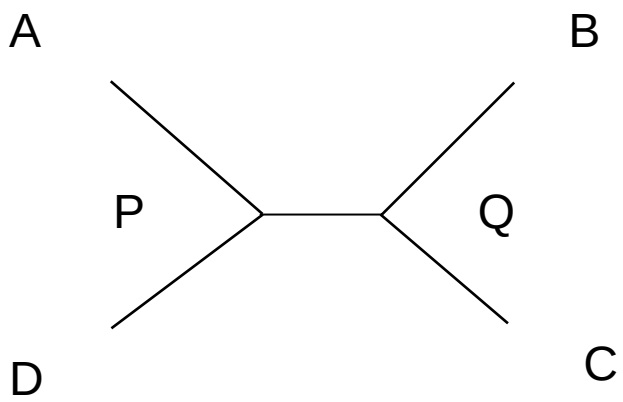
Il punto da cui si vedono i lati di un triangolo sotto un angolo di 120°

- Il problema risolto da Viviani non pare abbia suscitato altri interessi anche successivi e rimase nell'ombra fino a quando J. Steiner (1796-1863) non lo riscoprì per suo conto nel 1837 dandone anche una generalizzazione ritenuta però, in seguito, di scarso interesse e "una delle generalizzazioni superficiali che si incontrano spesso nella letteratura matematica".
- Il giudizio sulla generalizzazione operata da Steiner è di R. Courant e H. Robbins che hanno avuto il merito di riformulare il problema, che impropriamente attribuiscono a Steiner, e di portarlo all'attenzione della comunità matematica in ragione del largo e meritato successo del loro "**Che cos'è la matematica?**

La generalizzazione del problema

- Per trovare - scrivono Courant e Robbins - la generalizzazione del problema di Steiner che abbia un vero interesse, si deve abbandonare la ricerca di un solo punto P e proporsi invece la determinazione del **reticolato** di lunghezza totale. In termini matematici diremo: “Dati n punti A1, A2, ... , An, trovare un sistema connesso di segmenti, di minima lunghezza totale, tale che ogni coppia di punti possa essere collegata con un poligono formato da segmenti del sistema”.

Un’idea delle difficoltà può formarsi dall’esame della situazione, particolarissima, di 4 punti disposti ai vertici di un rettangolo, dove occorrono due punti aggiuntivi, detti anche **punti di Steiner**



La somma
AP+DP+PQ+QB+QC
è la lunghezza minima
per congiungere i 4 punti
A, B, C, D.

La rete minima

- Il fatto è che al crescere del numero n di punti (n si può assumere come la misura della dimensione del problema) il problema diventa intrattabile. I tempi di risoluzione crescono esponenzialmente con n: è cioè un problema **NP** (non deterministico in un tempo polinomiale).

o anche dall'esame del grafico seguente, rappresentativo del collegamento minimo tra 29 città degli Stati Uniti [i]

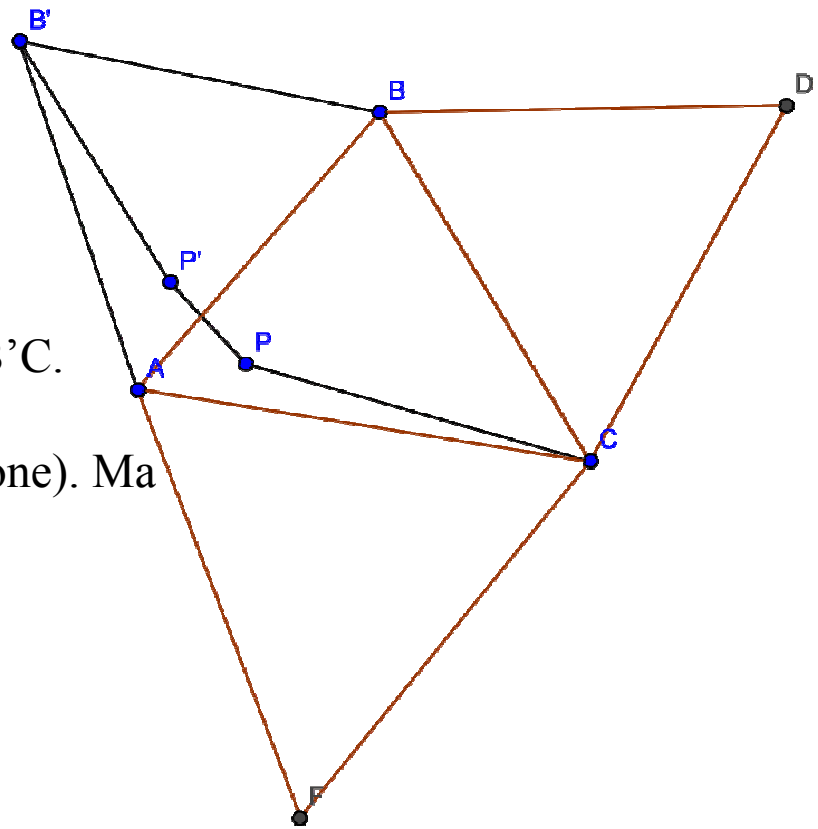
Il problema con 29 punti qualche decennio fa era già al limite delle possibilità di elaborazioni di potenti computer.

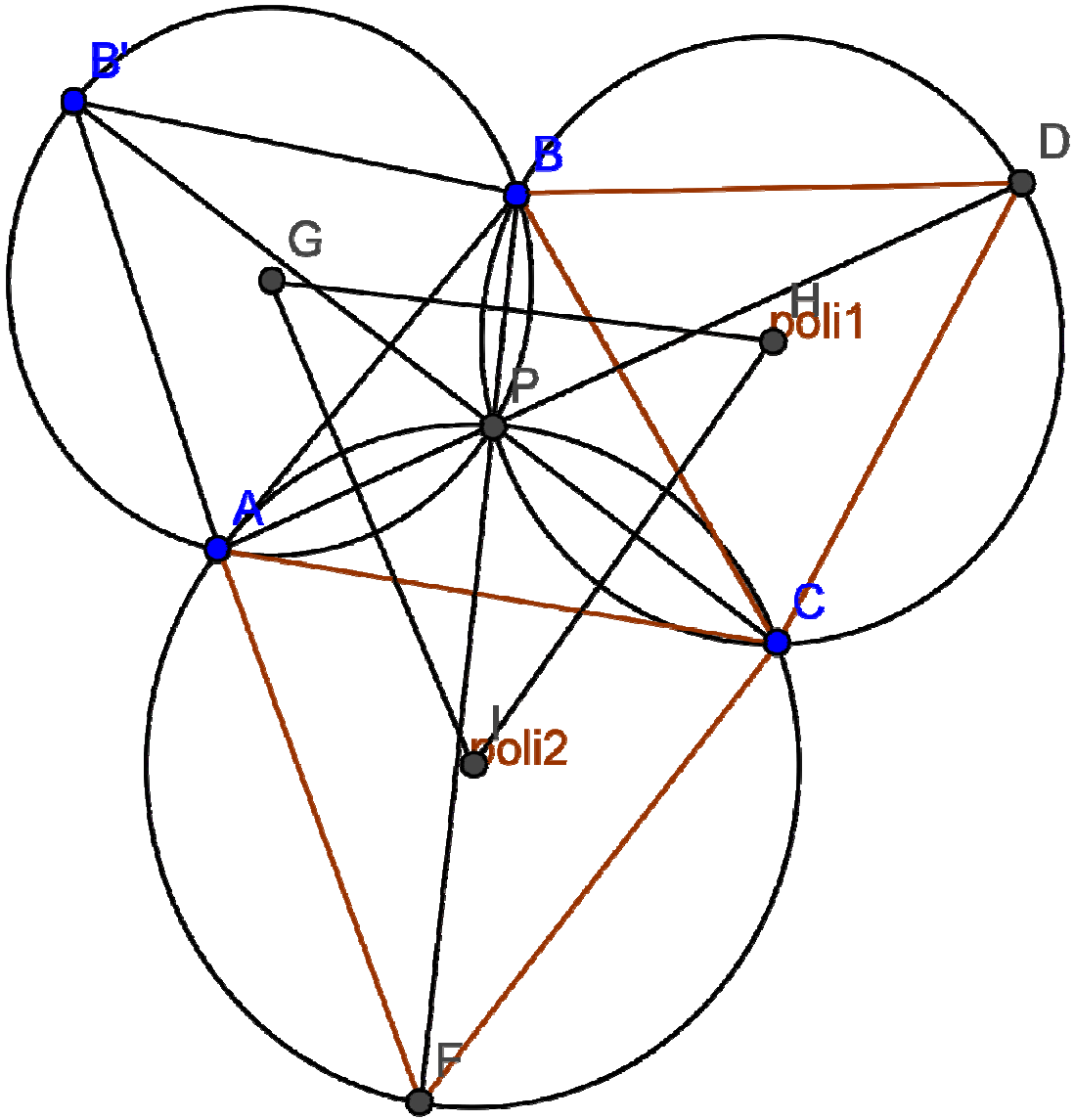
---

[i]il grafico è tratto da : "*Il problema della rete di lunghezza minima*" di M.W. Bern-R.Graham in LE SCIENZE n.247, marzo 1989.

Le possibilità grafiche

La dimostrazione del teor. di Torricelli-Viviani è immediata. Con il ricorso ad una rotazione di 60° di centro A, P va in P' e B in B'. ABB' è equilatero e i triangoli AP'B' e APB sono congruenti. La spezzata B'P'PC ha lunghezza pari a PB+PA+PC. Essa è minima quando i punti della spezzata sono allineati, cioè quando P appartiene a B'C. P dunque è l'intersezione di B'C con BF e con DA (rifacendo il ragionamento con altro centro di rotazione). Ma anche i tre cerchi circoscritti ai tre triangoli esterni si incontrano in P.





P è il punto cercato. Conseguenza immediata è il teorema di ***Napoleone***. I centri G,H,I dei triangoli equilateri costruiti esternamente ad ABC sono vertici di un triangolo equilatero.

I Frattali

- luogo geometrico è tutto ciò che sostanzia la nostra percezione dello spazio vitale e che si associa alla forma di ogni oggetto ideale o concreto che lo riempie o può descriverlo.
- Gli oggetti ai quali ci si riferisce sono gli *artefatti* (letteralmente: prodotti di un'arte – più in particolare dell'uomo) i cui elementi caratteristici sono gli elementi della geometria euclidea (angoli, spigoli, angoli diedri, superfici piane.....)

La geometria della natura

- Nuvole, catene montuose, coste frastagliate,.... si presentano diverse e tali apparirebbero – secondo l' E.T. del film di Spielberg ed il biologo J. Monod - lontani dai canoni euclidei. Sono gli oggetti della natura, i frattali, figure molto complesse immerse in spazi molto semplici.
- Luoghi geometrci di estrema bellezza, mostri matematici dotati di continuità ma non di derivabilità eppure ottenibili da semplici procedure iterative, anzi dal trattamento ricorsivo di semplici equazioni. Il successo della formula di Newton!

Conclusione

- Il discorso è appena abbozzato.....l'intera matematica è suscettibile di un'immagine, un luogo geometrico che essa permea e domina allo stesso tempo.
- E' solo abbozzato il racconto che possiamo fare dei luoghi, artefatti e naturali che siano. E c'è ancora un'altra geometria che si sostanzia di altri caratteri, altre simmetrie, altre curvature, a metà strada tra oggetti fatti dall'uomo e oggetti naturali, modelli di forme che Dio realizzò a sua immagine e somiglianza!