



IL FASCINO DELLE EQUAZIONI

Carlo Toffalori

Mathesis, Montegrotto Terme, 24 luglio 2014

Algebra = risolvere equazioni?



Una ricerca etimologica: “algebra” deriva dall’arabo *al-jabr*

Abu Al-Khwarizmi (➔ algoritmo), *Hisah al-jabr w'al-muqabala*, *Calcolo della riduzione e del bilanciamento*

- al-jabr: da $x - 2 = 4 - 2x$ a $x + 2x = 4 + 2$
- al-muqabala: da $x + 2 = y + 2$ a $x = y$

La versione latina del 1140: *Liber Algebrae et al mucabala*

Ma che fascino possono esercitare le equazioni, e quindi l'algebra?

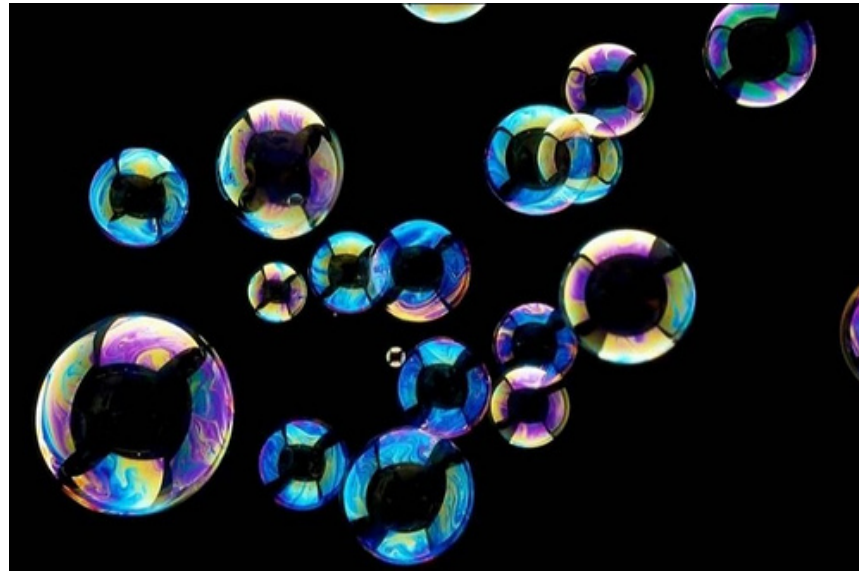


F. Dostoevskij, lettera al fratello del 31-10-1838

“Non si può considerare la filosofia” (il senso della vita?) “alla stregua di una semplice operazione matematica” (un’equazione?) “in cui l’incognita è rappresentata dalla natura.”

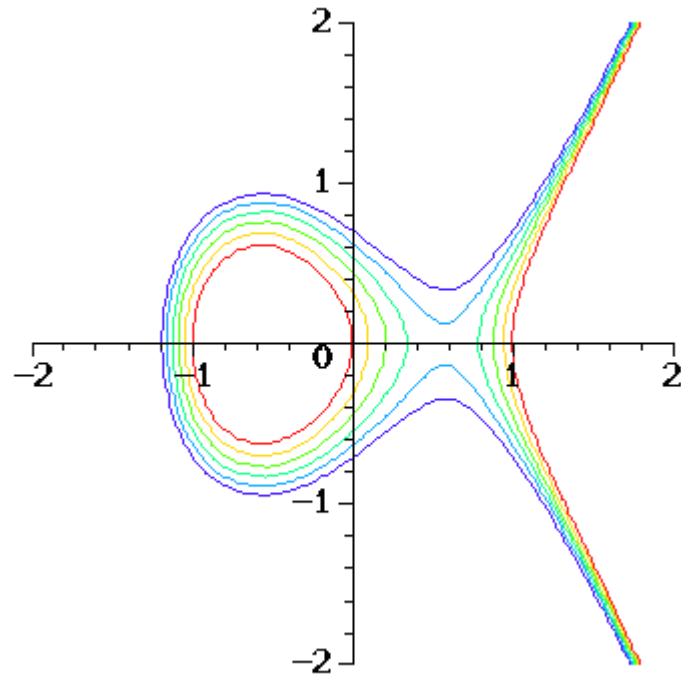
Ancora F. Dostoevskij, lettera al padre del 5-5-1839

La matematica? *“Che strana materia, e che sciocchezza occuparsene! [...] Senza una qualche applicazione pratica, equivale a un puro zero e in essa c'è tanta utilità quanta può essercene in una bolla di sapone.”*



Ma anche le bolle di sapone hanno un'algebra e una geometria emozionanti...

A prescindere da questo, vorremmo gustare *la poesia delle equazioni* a prescindere dall'utilità prosaica delle loro applicazioni pratiche



Spunti sparsi e disordinati...



I nomi di cinque matematici illustri come canovaccio e pretesto...

1. Galois
2. Hardy
3. Bombelli
4. Fermat
5. Hilbert

1. “Non ho tempo”

Qualche formula per cominciare

- L'equazione di primo grado in x $ax + b = 0$ con $a \neq 0$: la soluzione $-b/a$.
- L'equazione di secondo grado in x $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$: la soluzione

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

purché $b^2 - 4ac$ abbia una radice quadrata.

- Le equazioni di grado 3 e 4 in x : formule risolutive più complicate ma sempre “*per radicali*” (le soluzioni si ottengono dai coefficienti a , b , c mediante le operazioni di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione e, inoltre, l'estrazione di radici).

E per gradi da 5 in su?



- Paolo Ruffini (1765-1822)



- Niels Abel (1802-1829)



- Evariste Galois (1811-1832)

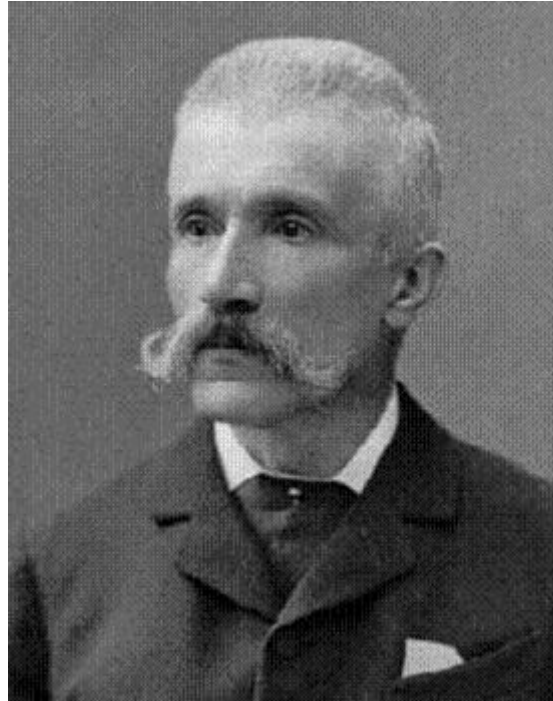
Impossibile una soluzione per radicali!

[illegible]

1°. Si après l'adjonction de r , l'équation en V est d'ordre n et qu'elle plus haut reste irréductible, il est clair que le groupe de l'équation ne sera pas changé. Il en est de même si l'équation en V se décompose en p facteurs de même degré et de la forme $f(V, r) \times f(V, r') \times f(V, r'') \times \dots$ étant p facteurs en V et $r, r', r'', \dots$ étant p valeurs conjuguées de r . Ainsi le groupe de l'équation proposée se décompose en p groupes chacun d'un même nombre de permutations, puisqu'à chaque valeur de V correspond une permutation. Ces groupes sont respectivement les groupes de l'équation proposée, quand on lui suppose successivement $r, r', r'', \dots$

Passione matematica e passione politica.

Per equazioni dal grado 5 in su si richiedono tecniche più sofisticate.



- Hermite e Kronecker, grado 5,
- Brioschi, grado 6
- Poincaré, in generale

Brioschi: ancora equazioni e passione civile

2. *La misteriosa irrazionalità del mondo*



Godfrey Hardy, *Apologia di un matematico*

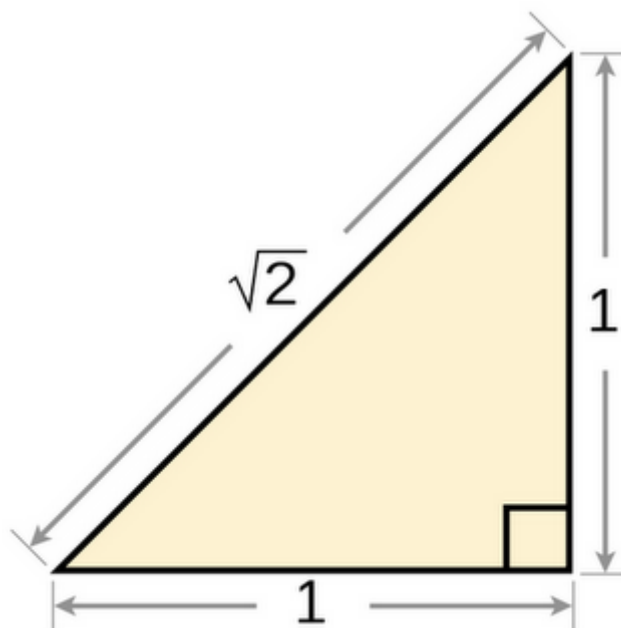
Due pietre miliari del contributo matematico alla storia del pensiero: “*due dei teoremi più famosi della matematica greca, ... «semplici»... e tuttavia di primissimo ordine. Ciascuno di essi conserva la freschezza e l'importanza di quando è stato scoperto*”.

Prima pietra miliare: l'infinità dei primi
La prova di Euclide, matematica e leggerezza



Seconda pietra miliare: il teorema di Pitagora

- La sua equazione $x^2 + y^2 = z^2$
- Il caso più semplice: il triangolo rettangolo isoscele, $x = y = 1$, $z^2 = 2$



Per $x = y = 1$, z è la radice di 2, un numero reale irrazionale infinitamente lungo 1,41421356237309504880168872420969...

La lezione di Hardy: come mai $\sqrt{2}$ non può essere un razionale $\frac{M}{N}$ con M, N interi positivi **primi tra loro**

- Altrimenti $\frac{M^2}{N^2} = 2$
- Quindi $M^2 = 2 N^2$
- Quindi, per l'unicità della decomposizione in fattori primi degli interi, M è pari e $M^2 = M \times M$ è divisibile per 4
- Quindi, sempre per l'unicità della decomposizione in fattori primi degli interi, anche N è pari

Ma M e N sono primi tra loro...

Una lezione ancor più antica ed emozionante: Platone e Menone:

- il dialogo tra Socrate e un giovane schiavo...
- ... proprio a riguardo della radice di 2 e dell'irrazionalità del mondo



Un commento di Imre Toth, *Lo schiavo di Menone*

La lezione di Socrate (e Platone): “*anziché Eine Kleine Nachtmusik, una vera o propria Offerta musicale*”

Mozart
Eine Kleine Nachtmusik
K. 525

Allegro

Violine I
Violine II
Viola
Violoncello und Kontrabaß

This image shows the first system of the printed musical score for Mozart's 'Eine Kleine Nachtmusik', K. 525. The score is for a string quartet, with parts for Violine I, Violine II, Viola, and Violoncello und Kontrabaß. The tempo is marked 'Allegro'. The key signature is one sharp (F#), and the time signature is 3/4. The first system consists of four staves, each with a treble clef. The music is in a lively, dance-like style, characteristic of the 'Allegro' tempo.

Original Score, von P. S. Bach 2. originaler Handschrift.

This image shows the first system of the handwritten musical score for P. S. Bach, titled 'Original Score, von P. S. Bach 2. originaler Handschrift.' The score is for a string quartet, with parts for Violine I, Violine II, Viola, and Violoncello und Kontrabaß. The tempo is marked 'Allegro'. The key signature is one sharp (F#), and the time signature is 3/4. The first system consists of four staves, each with a treble clef. The music is in a lively, dance-like style, characteristic of the 'Allegro' tempo.

Le motivazioni del dialogo tra Socrate e Menone

- Si può insegnare la virtù?
- Il rapporto tra scienza e virtù
- Si può insegnare la scienza?

Socrate: la reminiscenza

- *Teeteto* e la maieutica
- L'uomo per natura è razionalità e come tale è chiamato alla scienza e conosce le leggi aritmetiche e geometriche

Menone: Socrate come una torpedine che intorpidisce l'interlocutore

- pone domande per instillare dubbi, interroga senza insegnare

Socrate:

- il dubbio non danneggia ma porta alla scienza (la reminiscenza)



“Ricavare la scienza è ricordare”

L'esperimento col giovane schiavo digiuno di geometria



I tre momenti del dialogo

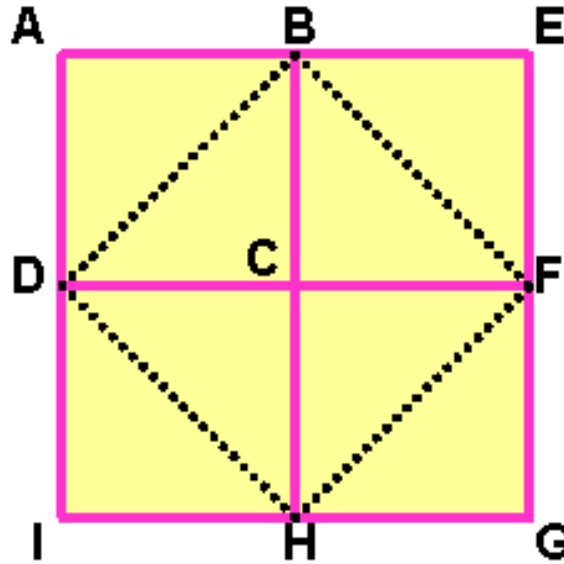
Primo momento: si pone il problema

- è dato un quadrato di lato 2 (piedi) e dunque area 4
- si considera il quadrato di area doppia 8 e si chiede la misura del suo lato



Secondo momento: tentativi aritmetici di soluzione

Lo schiavo azzarda prima 4, poi 3, ma poi si convince di sbagliare.
La sua conclusione: *“Per Zeus, Socrate, io non lo so davvero!”*



Terzo momento: la risoluzione geometrica

- Si considera il quadrato quadruplo di quello di partenza, dunque di area 16
- Si osserva che il quadrato formato dalle diagonali dei 4 quadrati di partenza è la metà e dunque ammette area 8
- Si identifica il lato cercato come la diagonale del quadrato di partenza.

Ma resta aperto il problema aritmetico della misura del nuovo lato: il doppio di, appunto, la radice di 2.

Epinomide, lo straniero di Atene: un numero miracoloso, “*non umano portento, ma divino*”



Commenti sparsi al dialogo del Menone

- a) Sensibilità didattica
- b) Matematica ancora attuale ed emozionante: la natura del numero (umana o divina?), il misterioso rapporto tra aritmetica e algebra, ...

3. “Anfibi tra l’essere e il non essere”

L’equazione $x^2 + 1 = 0$: *impossibile da risolvere anche tra i reali!* Non esiste la radice di -1 . Ma “*immaginiamo*” una soluzione i , dunque

$$i^2 = -1$$

Leibniz: “*un anfibio tra l’essere e il non essere*”



I numeri complessi: generati da i . Pura fantasia?

Eppure ruotando due volte di novanta gradi...



Di più: applicazioni alla fisica quantistica (e molto altro)



Robert Musil, *Il giovane Törless*

Difficile digerire “*La faccenda dei numeri immaginari*”

“*Ogni numero, sia positivo che negativo, elevato al quadrato dà un valore positivo*”



Niccolò Fontana detto il Tartaglia: come risolvere un'equazione di grado 3 “*per radicali*”

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

Algebra in poesia...

*“Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia a qualche numero discreto,
Trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
Che ’l loro prodotto sempre sia uguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Verrà la tua cosa principale”*

Un esempio: l’equazione di **Raffaele Bombelli** $x^3 - 15x - 4 = 0$

- coefficienti interi
- una soluzione intera 4
- ma per trovarla seguendo le formule risolutive delle equazioni di terzo grado bisogna estrarre una radice quadrata di -121 (11 per la radice quadrata di -1 se questa radice i esiste, e pura illusione altrimenti)



Ancora Musil e Törless

“In un calcolo del genere all’inizio ci sono dei numeri ben tangibili, che possono rappresentare metri o pesi o altre cose concrete, e per lo meno sono dei numeri reali. Alla fine del calcolo ci sono numeri dello stesso tipo. Ma questi e quelli stanno in relazione grazie a qualcosa che non esiste affatto. Non è come un ponte di cui esistano solo il primo e l’ultimo pilastro, e che tuttavia si possa attraversare con la stessa sicurezza che se esistesse per intero?”

L'ALGEBRA O P E R A

DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.

*Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta
cognitione della teorica dell' Aritmetica.*

Con vna Tsuola copiosa delle materie, che
in essa si contengono.

*Resta hora in luce à beneficio della studio di
dessa professione.*



IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Il compagno Beineberg

“In fondo, cosa c’è di diverso con i numeri irrazionali? E che idea puoi farti dicendo che rette parallele si incontrano solo all’infinito? Io credo che se si fosse troppo scrupolosi la matematica non esisterebbe... E comunque io di queste cose non mi impiccio perché non portano a niente”.

4. “*Hanc marginis exiguitas non caperet*”

Una storia matematica che assomiglia a un poliziesco...



L'antefatto: ancora il *teorema di Pitagora* e la sua equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

- coefficienti interi
- anche soluzioni intere?

Alla ricerca delle terne di interi (x, y, z) che soddisfano $x^2 + y^2 = z^2$

- banali: $x = 0, y = z$ e simili,
- non banali (*terne pitagoriche*): $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), \dots$

Una classificazione completa nota sin dall'antichità...





Pierre de Fermat, 1601-1665

- Giudice a Tolosa
- Matematico “dilettante”

Cartesio: “*uno sbruffone*”

Wallis: “*quel maledetto francese*”

Pascal: “*il più grande geometra d’Europa*”

Arithmeticonum Liber II. 61

intervallum nemtorum 2. minor autem
1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet
itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 1. & ad-
huc superaddere 10. Ter igitur 3. adfcit
vis unitatibus 10. aequatur 4 N. + 4. &
fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. &
satisfaciant quaestioni.

[illegible]

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm ut quadratus intervalli numerorum sit minor intervallo quadratorum, & Casus idem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITUM quadratum diuidere
in duos quadratos. Imponitur fit vt
16. diuidatur in duos quadratos. Ponitur
primus 1. Q. Oportet itaque 16 - 1. Q. quales
esse quadratos. Fingo quadratum 2. a nu-
meris quotquot libuerit. cum defectu to-
uitatur quod continet latus ipsius 16.
effo 2. 1. N. - 4. igitur itaque quadratus erit
4. 2. + 16. - 1. N. hinc aquabunt vir-
tutes 16 - 1. Q. Communis adiciatur
viriisque defectus. 2. 4. similibus auferen-
tur similia. fient 2. Q. aequales 16. N. & fit
1. N. 4. igitur alter quadratorum 16.
alter vero 2. & viriisque summa effo 16. 16.
16. & vterque quadratus est.

[illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos
& generatim nullum in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi.
Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

R Vnde oportet quadratum 16 dividere in duos quadratos. Ponatur rursus primi lateris 1 N. alterius vero quocunque numerum cum defectu tot uniatum, quot consiliet lateris dividendi. Elio itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. = 16. — 16 N. Ceterum volo utrumque simul æquari unitatibus 16. Igitur 5 Q. = 16. — 16 N. æquatur unitatibus 16. & fit 1 N. 7 erit

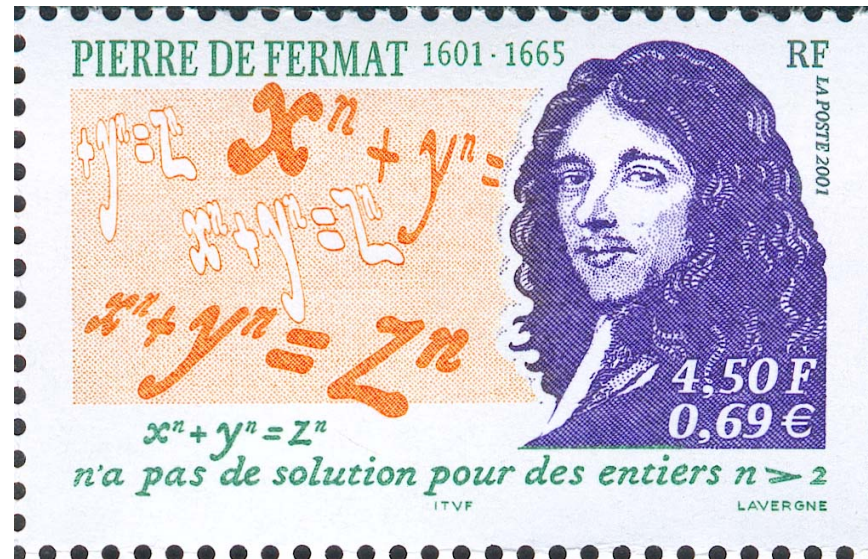
ΕΣΤΙΝ δὲ πάλιν τὴν αὐτὴν περιφραστικὴν ἀπο-
λάνειν ἐν δὲ τοῦ περιφραστικῶς τοιαύτης πάλιν
ἐν τῇ πρῶτῃ περιφρ. εἰ ἴσως, ἐν ᾧ τὸ ἴδιον
ἐν ὅμοιότητι λαμβάνει, ἐν ᾧ τὸ αὐτὸ ἐν ἀπο-
φαστικῇ πάλιν. ἴσως δὲ ἐν β' λαμβάνει μὲν
ἐν ἴσως, αὐτὴν περιφραστικῇ ἐν ἀπὸ ἀποφαστικῶς αὐτῆς
ἐν δὲ ἀποφαστικῇ μὲν αὐτὴ λαμβάνει ἐν σ'. β'.
λαμβάνει τὸ αὐτὸ κατὰ συνταξικῆς ἴσως δὲ
ἐν σ'. λαμβάνει αὖθις ἐν τῇ λαμβάνει ἐν τῇ ἴσως
μὲν σ'. καὶ γίνεται ἐν ἀποφαστικῇ καὶ ἀποφαστικῇ.

3433

1637-38, sul bordo di una pagina di un trattato
di Diofanto

*“Cubum autem in duos cubos, et quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et nullam in infinitum ultra secundam potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. **Hanc marginis exiguitas non caperet.**”*

“E’ impossibile suddividere una potenza cubica in cui potenze cubiche, e una potenza quarta in due potenze quarte e, in generale, ciascuna delle infinite potenze superiori alla seconda in due dello stesso grado. Della qual cosa ho trovato una dimostrazione meravigliosa. Ma il margine di questa pagina è troppo esiguo per contenerla.”



L'equazione di Fermat

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{per } n > 2 \text{ intero.}$$

Dunque: $x^3 + y^3 = z^3$, $x^4 + y^4 = z^4$, $x^5 + y^5 = z^5$, $x^6 + y^6 = z^6$, ...

L'ultimo teorema di Fermat: nessuna soluzione (x, y, z) intera non banale!

Le uniche soluzioni possibili: $x = 0$ e $y = z$, etc. etc.

Ultimo? Teorema? Secoli di mistero...



J. L. Borges

Abejacàn il Bojari, ucciso nel suo labirinto

“Il teorema che Fermat non scrisse in margine a una pagina di Diofanto”

L'ombra

“Il teorema perduto di Fermat”

n = 4: Fermat?

$$n = 3$$

- Fermat?
- Eulero (lettera a Goldbach del 1753)
- Gauss?



Il ruolo dei numeri immaginari

Sophie Germain (1776-1831), donne e matematica



- una donna appassionata di matematica
- una soluzione parziale del mistero di Fermat (1823)
- si spaccia per uomo (Mr. Leblanc) per comunicare con Gauss
- un posto a Gottingen?
- una morte prematura

Altri progressi parziali



$n = 5$: Dirichlet 1828, Legendre 1830

$n = 14$: Dirichlet 1832

$n = 7$: Lamé 1839, Legendre 1840

Ma i numeri naturali sono infiniti!

Un premio

1816, 3000 franchi e medaglia d'oro dell'*Académie des Sciences* di Parigi a chi risolve il problema



K. F. Gauss

“Vi ringrazio molto delle informazioni sul premio. Ma vi confesso che il Teorema di Fermat, come proposizione isolata, non mi interessa. Potrei proporre una miriade di problemi analoghi, che non si possono né provare né confutare.”

1847, Parigi, una sessione della Académie des Sciences

1 marzo

Gabriel Lamé annuncia una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat valida per ogni esponente primo dispari $n \geq 3$.



Altri contributi: Liouville, Cauchy,...

24 maggio

Ernst Kummer segnala un errore nella prova di Lamé: ha pensato allo stesso argomento 3 anni prima e ha trovato una dimostrazione che funziona per molti primi, ma forse non per $n = 37$.



Un altro premio

Paul Wolfskehl: salvato dalla depressione grazie all'Ultimo Teorema di Fermat...



Il premio Wolfskehl (1908): 100.000 marchi (di allora) a chi dimostra che Fermat aveva ragione (dunque nessun premio a chi prova che l'Ultimo Teorema di Fermat è falso)



La testimonianza di Schlichting (segretario del premio, 1974)

“I manoscritti che arrivano si suddividono in

- complete stupidaggini,*
- materiale che assomiglia alla matematica.*

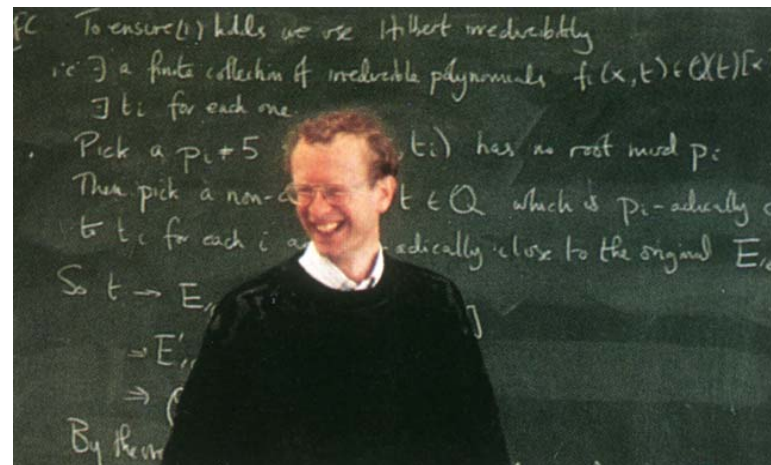
Quelli della seconda categoria sono consegnati all'Università di Gottinga, dove il lavoro di leggere, trovare errori e rispondere è delegato a uno degli assistenti. Al momento la vittima sono io... c'è chi spedisce la prima parte della dimostrazione e promette la seconda in cambio di un anticipo, e chi mi assicuro il 10 per cento dei profitti pubblicitari se gli do una mano...”

La storia prosegue: con l'avvento dei calcolatori, il teorema è provato fino a $n \leq 4 \cdot 10^6$ (1993). *Ma vale la pena di ripetere:* gli esponenti n da controllare sono infiniti, e non c'è computer che sappia considerarli tutti!

Ricorso a strumenti matematici sempre più sofisticati: curve ellittiche, forme modulari, ...

E finalmente, nel 1994, la prima dimostrazione completa!

Andrew Wiles (1953 - ...)



Cenni storici sulla dimostrazione

- 7 anni di ricerca e isolamento
- 21-23 giugno 1993, Cambridge: il primo annuncio
- 1993-1994: un punto oscuro nella dimostrazione
- 1 aprile 1994: la voce di un contro esempio trovato al calcolatore (per $n > 10^{20}$), ma è solo un pesce di aprile!
- 25 ottobre 1994: presentata la versione corretta in due lavori, il secondo scritto col contributo di Taylor.

Una storia di premi

- Non esiste un premio Nobel per la Matematica (il ruolo oscuro di Mittag-Leffler)



- Esistono premi analoghi per i matematici: il premio Abel (recentissimo), oppure la medaglia Fields, assegnata ogni 4 anni (durante un incontro internazionale dell'ICM) a *matematici per risultati ottenuti prima di aver superato i 40 anni*



- Andrew Wiles nasce nel 1953, dà il primo annuncio del suo risultato nel 1993, ma la dimostrazione corretta solo nel 1994
- Siccome i matematici sono pignoli... nessuna medaglia Fields all'ICM di Zurigo, 1994



- In compenso, una medaglia speciale all'ICM di Berlino, 1998, e una grandovizia di altri riconoscimenti (incluso il premio Wolskehl)

5. “La misteriosa incalcolabilità del mondo”



Il 10° problema di Hilbert (Parigi, 1900). Determinare un procedimento per stabilire,

- per ogni equazione a coefficienti interi (di qualunque grado, in qualunque numero di variabili),
- se questa equazione ha o no soluzioni intere.

Per intendersi

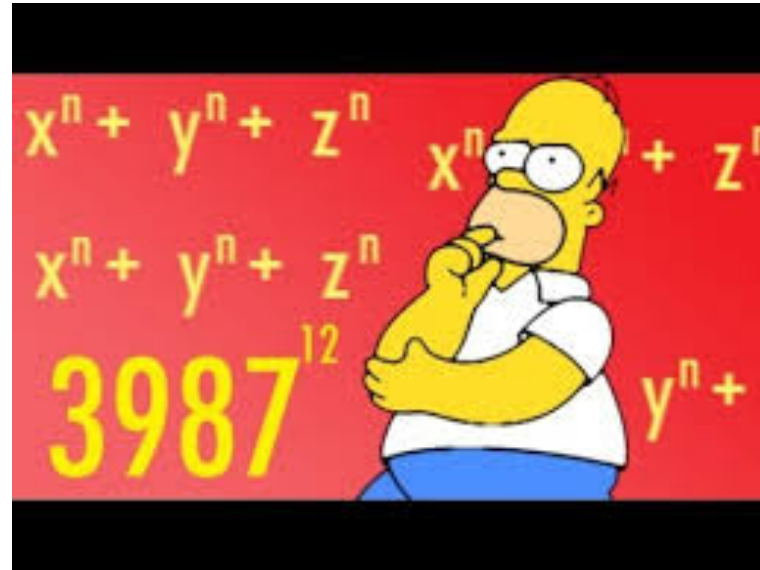
$$\begin{array}{lll} 2x + 4 = 0, & x^2 - 1 = 0, & x^2 + y^2 - 1 = 0, \dots \\ 2x + 5 = 0, & x^2 - 2 = 0, & x^2 + y^2 + 1 = 0, \dots \end{array}$$

sono tutte equazioni a coefficienti interi, ma

- quelle della prima riga hanno anche soluzioni intere, rispettivamente -2 , ± 1 , $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$,
- quelle della seconda riga no,

eppure la differenza tra le prime e le seconde è quasi impalpabile.

C'è un algoritmo generale che sa distinguere le prime equazioni dalle seconde?



Casi appena incontrati e discussi (a testimoniare la difficoltà del problema)

- l'equazione $x^2 - 2 = 0$ che determina $\sqrt{2}$,
- l'equazione $x^2 + 1 = 0$ che determina i ,
- l'equazione di Bombelli $x^3 - 15x - 4 = 0$,
- le equazioni di Pitagora e Fermat $x^n + y^n = z^n$ per $n \geq 2$.

La soluzione del problema (1970, Yuri Matijasevic, a coronamento del lavoro di Martin Davis, Julia Robinson...)





... e Hilary Putnam): *l'algoritmo richiesto non esiste!*

(A proposito di Julia Robinson: ancora donne in matematica, una storia in evoluzione)

Una soluzione sorprendente, basata su una svolta epocale nella storia della scienza: la rivoluzione informatica.



*Alan Turing, 1936-37: il primo modello teorico di calcolatore (la *Macchina di Turing*)*



Una proposta impegnativa: la Tesi di Church e Turing (1936)

E' calcolabile esattamente quello che una macchina di Turing sa calcolare (e dunque non è calcolabile quello che una macchina di Turing non sa calcolare)

Argomenti a sostegno (validi ancor oggi)

- l'equivalenza tra la teoria di Turing e altri approcci alla calcolabilità (Church, Kleene, Gödel, ...)
- l'assenza di smentite sperimentali
- la simulazione della mente umana (l'impiegato diligente)

1936: la scoperta di problemi che non si risolvono...

- l'Entscheidungsproblem
- il problema dell'arresto per le macchine di Turing

Su questa base, qualche anno dopo...

1970, Davis, Putnam, J. Robinson, Matijasevic: nessuna macchina di Turing sa risolvere il 10° problema di Hilbert!



La storia delle equazioni: uomini, donne, passioni, idee, fallimenti, vittorie...

Ribaltando Dostoevskij: la matematica come una religione?

Hermann Broch, *L'incognita*



O comunque, più semplicemente, almeno un qualche fascino?